



**Некоммерческое
акционерное общество**

**АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И
СВЯЗИ**

Кафедра математики и
математического
моделирования

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности

5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение

Часть 2

Алматы 2018

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение. Часть 2. - Алматы: АУЭС, 2018.- 23 стр.

Методические указания и задания содержат расчетно-графическую работу №2 дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 5В070400 - Вычислительная техника и программное обеспечение. Приведены теоретические вопросы программы, варианты заданий по разделу математической статистики. Дано решение типового варианта вместе с необходимыми теоретическими сведениями.

Ил. 11, табл. 11, библиогр. 6 назв.

Рецензент: доцент каф. МММ А.К.Искакова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2018 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2018 г.

Введение

Теория вероятностей обеспечивает теоретическую базу для широкого круга практических задач, которыми занимается математическая статистика. Основными задачами математической статистики являются обработка и анализ результатов наблюдений случайных массовых явлений.

Данное методическое указание содержит задания, которые предполагают изучение этих основных задач математической статистики.

Приведены теоретические вопросы, задания и решение типового варианта.

Номер варианта студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики

Цели: изучить основные задачи математической статистики: задачи обработки и анализа результатов наблюдений случайных массовых явлений.

1.1 Теоретические вопросы

1. Предмет математической статистики и её основные задачи. Основные понятия (выборка, объём выборки, варианты, статистический ряд, интервальный ряд).

2. Эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма.

3. Определение неизвестных параметров распределения (выборочная средняя, выборочная и исправленная выборочная дисперсии).

4. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

5. Точность и надёжность оценки. Доверительный интервал.

6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известным σ .

7. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины.

8. Понятие корреляционной зависимости. Функции и линии регрессии.

9. Понятие о моментах распределения.

1.2 Расчётные задания

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);

б) статистические ряды частот и относительных частот;

в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);

г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки:

а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;

б) по дискретному статистическому ряду найти:

- полигон частот и относительных частот;

- эмпирическую функцию распределения;

- выборочную среднюю;

- выборочную и исправленную выборочную дисперсии;

- выборочное и исправленное выборочное средние квадратические отклонения;

б) выборочные моду и медиану.

3. По статистическим рядам частот и относительных частот найти:

а) выборочные начальные моменты третьего и четвертого порядков;

б) выборочный эксцесс;

в) выборочный коэффициент асимметрии, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; сравнить их с найденными выше.

1	112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
	125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
	106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
	120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
	132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
	128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
	112	121	105	117	112	129	129	118	112	116
2	87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
	120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
	115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
	88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
	95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
	94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
	100	101	123	97	90	104	108	101	96	111

3	547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
	565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
	543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
	552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
	558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
	577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
	599	561	552	551	561	538	533	541	588	558
	4	90	123	132	85	122	105	125	142	99
118		105	115	92	115	142	98	123	103	144
106		92	118	105	118	86	125	105	122	138
102		130	112	98	115	120	118	103	118	129
112		115	88	118	103	102	95	124	106	135
95		124	103	102	118	112	115	92	115	119
103		122	94	112	97	128	102	116	125	132
5		139	112	132	85	122	105	125	142	99
	116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
	106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
	125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
	134	112	101	105	117	92	129	99	118	112
6	154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
	145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169
	7	770	701	790	764	764	750	733	702	720
799		740	769	751	707	735	703	701	759	775
797		797	789	775	798	780	721	737	710	756
750		741	773	788	737	787	767	749	797	739
732		785	790	790	775	710	731	769	735	789
784		767	750	731	775	785	756	756	780	741
750		758	711	757	736	799	774	789	789	733
8		450	434	424	432	440	443	415	446	423
	442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
	438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
	496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
	466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
	481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
	444	498	466	442	483	462	492	435	449	422

9	250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
	248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
	271	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	10	165	143	152	167	164	199	171	171	156
147		155	158	145	158	177	161	181	153	171
175		153	174	154	163	174	152	188	162	197
187		158	154	171	163	172	152	178	151	172
153		186	147	169	147	166	161	171	161	186
148		161	189	199	162	167	198	168	135	152
154		175	163	149	162	161	161	193	172	175
161		164	178	138	164	172	187	178	143	161
11	153	174	154	163	174	152	188	162	197	134
	188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
	165	163	177	161	149	146	152	139	156	152
	12	212	231	251	204	246	232	282	242	252
297		242	254	218	226	252	238	224	298	260
277		254	282	242	270	254	260	232	268	242
245		276	224	240	272	268	281	234	268	232
272		212	234	292	204	261	254	266	278	248
253		262	256	264	272	242	244	246	253	234
237		264	252	248	247	268	229	235	262	212
238		242	254	263	261	266	254	264	248	251
13	165	143	152	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	

14	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	15	165	143	152	167	165	199	171	171	156
149		155	158	145	158	177	161	181	153	171
153		174	154	163	174	152	188	162	197	178
190		158	154	171	163	172	152	178	151	172
159		186	147	169	147	166	161	171	161	186
151		161	189	199	162	167	198	168	135	152
160		175	163	149	162	161	161	193	172	175
165		164	178	137	164	172	187	178	143	161
16		147	153	179	165	159	149	141	102	169
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125
	17	558	563	569	547	552	562	554	549	575
561		552	551	561	538	533	547	552	557	543
547		565	587	553	548	554	561	564	562	558
566		555	563	568	586	549	575	564	553	555
567		556	546	552	543	554	556	566	592	562
544		568	574	564	547	549	553	578	557	561
553		545	554	571	569	539	549	538	575	554
577		552	566	557	551	552	546	584	572	535
18		577	568	557	564	547	549	553	578	557
	554	545	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556

19	77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
	48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
	38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
	63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
	68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
	12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
	55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
	74	51	82	52	46	75	49	55	57	54
20	347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
	365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
	343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
	352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
	366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
	377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
	399	363	361	352	351	361	338	353	333	357
21	9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
	6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
	6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
	7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
	5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
	6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
	3	6	9	8	12	11	9	10	4	14
22	39	40	38	43	41	42	40	38	41	42
	41	40	42	39	41	41	36	43	41	42
	34	36	37	42	42	42	40	41	41	46
	47	48	52	56	68	70	68	64	56	58
	41	42	39	33	34	37	43	45	47	71
	43	42	43	41	42	47	48	49	52	53
	57	52	41	42	46	48	49	39	32	40
	39	37	42	43	54	58	59	64	66	68
23	10	15	16	17	18	19	20	15	16	11
	17	12	13	14	15	11	18	16	15	18
	20	20	21	23	26	28	23	28	27	24
	27	24	25	25	26	32	33	31	34	43
	26	32	26	27	28	29	30	21	22	23
	42	24	23	35	23	25	36	37	24	21
	58	54	49	47	32	36	43	23	24	28

24	150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
	116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
	142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
	152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
	144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
	144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
	162	164	164	172	142	144	146	112	171	
	25	128	105	115	92	115	142	98	123	103
112		115	88	118	103	102	95	124	106	135
95		124	103	102	118	112	115	92	115	119
92		112	132	85	122	105	125	142	99	125
106		92	118	105	118	86	125	105	122	138
102		130	112	98	115	120	118	103	118	129
103		122	94	112	97	128	102	116	125	132
26		102	112	118	185	112	115	103	195	122
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
	151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	165	169	165	148	151	153	139	166	138	128
27	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
28	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235

29	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
30	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	143	161

4. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью γ , зная выборочную среднюю \bar{x}_e , объём выборки n и среднее квадратическое отклонение σ .

№	γ	\bar{x}_e	n	σ	№	γ	\bar{x}_e	n	σ	№	γ	\bar{x}_e	n	σ
4.1	0.95	75.17	36	6	4.11	0.97	5.21	46	6	4.21	0.92	11.48	36	6
4.2	0.97	7.27	56	7	4.12	0.96	55.23	38	5	4.22	0.94	23.38	39	8
4.3	0.93	75.17	35	5	4.13	0.92	5.21	36	7	4.23	0.93	30.44	56	7
4.4	0.94	8.27	58	9	4.14	0.95	55.23	68	7	4.24	0.99	15.32	38	5
4.5	0.98	76.17	46	6	4.15	0.98	7.21	56	6	4.25	0.95	10.48	46	6
4.6	0.99	7.37	58	7	4.16	0.93	65.23	78	5	4.26	0.98	13.38	39	8
4.7	0.93	65.13	34	6	4.17	0.92	8.21	49	7	4.27	0.93	20.44	66	7
4.8	0.94	9.27	53	8	4.18	0.95	51.23	58	9	4.28	0.97	14.32	58	6
4.9	0.93	85.17	35	6	4.19	0.94	5.21	39	6	4.29	0.94	30.44	86	7
4.10	0.95	8.27	57	9	4.20	0.95	85.23	58	7	4.30	0.99	16.32	38	9

5. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

- точность оценки математического ожидания a по выборочной средней \bar{x}_e с надёжностью γ ;
- доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ .

Выборочную среднюю \bar{x}_e , объём выборки n , среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 4.

6. Высота горы измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ . Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить высоту горы с ошибкой не более δ при надёжности γ ?

№	γ	σ	δ	№	γ	σ	δ	№	γ	σ	δ
6.1	0.95	23	6	6.11	0.97	15	5	6.21	0.92	11	4
6.2	0.97	14	8	6.12	0.96	14	6	6.22	0.94	23	8
6.3	0.93	21	9	6.13	0.92	23	4	6.23	0.93	25	7
6.4	0.94	15	5	6.14	0.95	12	3	6.24	0.99	17	5
6.5	0.98	13	6	6.15	0.98	14	8	6.25	0.95	10	3
6.6	0.99	20	4	6.16	0.93	20	6	6.26	0.98	13	4
6.7	0.93	24	7	6.17	0.92	22	7	6.27	0.93	21	7
6.8	0.94	18	4	6.18	0.95	19	5	6.28	0.97	14	5
6.9	0.93	16	7	6.19	0.94	16	3	6.29	0.94	24	8
6.10	0.95	19	6	6.20	0.95	18	4	6.30	0.99	12	4

1.3 Решение типового варианта

1. Для данной выборки выполнить задачу обработки и систематизации, определить:

- а) вариационный ряд (выборку в порядке возрастания);
- б) статистические ряды частот и относительных частот;
- в) интервальные статистические ряды частот и относительных частот (минимальную и максимальную варианты, размах выборки, число интервалов, длину интервалов);
- г) дискретные (группированные) статистические ряды частот и относительных частот.

2. Для данной выборки выполнить задачу анализа и оценки:

- а) по интервальному статистическому ряду построить гистограмму частот и относительных частот;
- б) по дискретному статистическому ряду найти:
 - полигон частот и относительных частот;
 - эмпирическую функцию распределения;
 - выборочную среднюю;
 - выборочную и исправленную выборочную дисперсии;

- выборочное и исправленное выборочное средние квадратические отклонения;

- выборочные моду и медиану.

3. По статистическим рядам частот и относительных частот найти:

а) выборочные начальные моменты третьего и четвёртого порядков;

б) выборочный эксцесс;

в) выборочный коэффициент асимметрии, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение; сравнить их с найденными выше.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Решение: заметим, что вычисления и построение графиков производятся в среде Mathcad. Копия файла из Mathcad приведена ниже. То, что получено в Mathcad, следует оформить и пояснить.

1. а) объём выборки $n = 55$. Вариационный ряд (выборка в порядке возрастания):

$$Y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(в среде Mathcad эта таблица просматривается вся нажатием на указатель направления движения);

б) по вариационному ряду посчитаем, сколько раз имеет место каждая варианта, т.е. частоту (n_i) каждой варианты. Полученные данные занесём в таблицу – статистический ряд частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	9	7	5	1	2

Относительные частоты вариантов найдём по формуле $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где n объём выборки, полученные результаты занесём в таблицу - статистический ряд относительных частот:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0,127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				
p_i^*	0,164	0,127	0,091	0,018	0,036				

в) для построения интервального статистического ряда определим сначала следующее: наибольшая и наименьшая варианты: $a = x_{\min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$; размах выборки: $R = b - a = 13$; величину интервалов найдём по формуле Стерджеса $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, $h = 1,917$ и округляем до целого $h \approx 2$; число интервалов – знаменатель этой формулы $m = 1 + \log_2 n$ или $m = \frac{R}{h} = 6,781$, округляем до целого $m \approx 8$; за начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $x_{нач} = 9,041 \approx 9$; число вариант, попавших в каждый интервал (т.е. частоты n_i) и относительные частоты (т.е. $p_i = \frac{n_i}{n}$) найдены в среде Mathcad (см. $w1^T$ и $w2^T$). Заметим, что выше найденные числа следует округлять не по правилам арифметики, а так, чтобы все варианты вошли в полученные интервалы.

Таким образом, искомый интервальный ряд имеет вид.

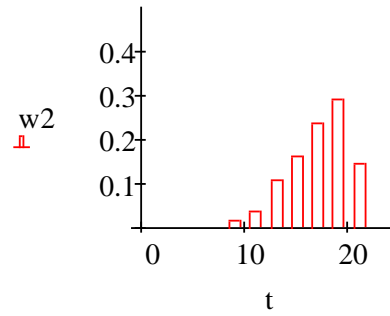
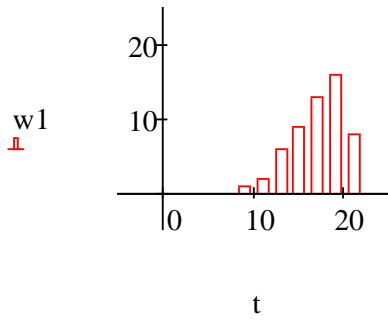
Инт.	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23)	[23,25)
n_i	1	2	6	9	13	16	6	2
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,109	0,036

г) для построения дискретного статистического ряда (или в некоторых учебниках его называют группированным статистическим рядом) найдём середины интервалов $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (см. x^T в Mathcad), им будут отвечать соответствующие частоты и относительные частоты из интервального ряда.

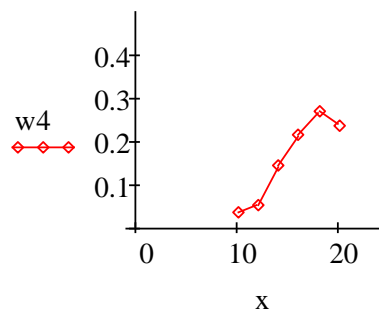
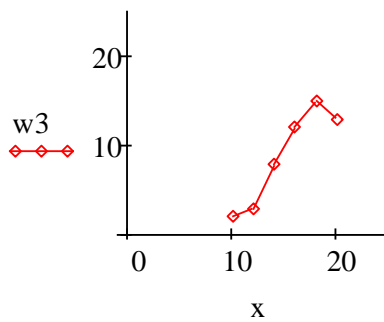
Искомый дискретный статистический ряд.

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22	24
n_i	1	2	6	9	13	16	6	2
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,109	0,036

2. а) по интервальному статистическому ряду построим гистограмму частот и относительных частот (в среде Mathcad):

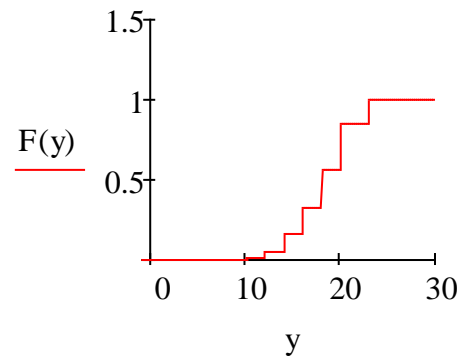


б) по дискретному статистическому ряду найдём:
 - полигон частот и относительных частот:



- эмпирическую функцию распределения (см. F^T и $F(y)$ в Mathcad):

$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \leq 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \leq 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \leq 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \leq 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \leq 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \leq 22 \\ 0.963 & \text{if } 22 < y \leq 24 \\ 0.999 & \text{if } y > 24 \end{cases}$$



- выборочную среднюю (см. $\text{mean}(X)$ в Mathcad): $\bar{x}_g = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n}$ или

$$\bar{x}_g = \sum_i x_i \cdot p_i = 17,564;$$

- выборочную и исправленную выборочную дисперсии (см. $\text{var}(X)$ и s^2 в

$$\text{Mathcad): } D_g = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_g)^2}{n} \text{ или } D_g = \frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_g)^2 = 8,428 - \text{ выборочная}$$

дисперсия; $s^2 = \frac{n}{n-1} D_g = 8,584$ – исправленная выборочная дисперсия;

- выборочное среднеквадратическое отклонение (см. $\text{stdev}(X)$ или σ в Mathcad) и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (см. s в Mathcad): $\sigma = \sqrt{D_g} = 2,903$; $s = \sqrt{s^2} = 2,93$

- выборочные моду и медиану (см. $\text{mode}(X)$ и $\text{median}(X)$ в Mathcad):

мода $M_0 = 19$ определяет вариант, имеющий наибольшую частоту (мода может быть не одна, её просто найти по статистическому ряду частот); медиана $M_e = 18$ определяет середину вариационного ряда и зависит от

$$\text{чётности объёма выборки: } M_e = \begin{cases} x_{k+1}, \text{ при } n = 2k + 1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \text{ при } n = 2k. \end{cases}$$

3. Основные числовые характеристики являются частным случаем моментов распределения. Рассматриваются моменты двух видов: начальные и центральные. Начальным моментом k -го порядка называется математическое ожидание случайной величины X^k , т.е. $\nu_k = M(X^k)$. Центральным моментом k -го порядка называется математическое ожидание случайной величины $[X - M(X)]^k$, т.е. $\mu_k = M[X - M(X)]^k$. Таким образом, начальный момент первого порядка - это математическое ожидание $\nu_1 = M(X)$; центральный момент первого порядка по свойствам математического ожидания равен нулю: $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$, второго порядка равен дисперсии $\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = D(X)$. Для описания свойств случайных величин применяются также центральные моменты третьего и четвёртого порядков, они характеризуют форму кривой распределения – симметричность (коэффициент асимметрии $a_x = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$), островершинность или плосковершинность (эксцесс $c_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$). В статистике вычисляют выборочные аналоги этих величин. По статистическим рядам частот и относительных частот (см. y и p в Mathcad) найдём:

а) выборочные начальные и центральные моменты k -го порядка ($M(k)$ и $m(k)$ в Mathcad), затем, полагая k равно 3 и 4, выборочные начальные $M(3) = 5,845 \cdot 10^3$, $M(4) = 1,1 \cdot 10^5$ и выборочные центральные $m(3) = -10,506$, $m(4) = 196,233$ моменты третьего и четвёртого порядков;

б) полагая k равно 1 и 2, найдем выборочную среднюю $M(1) = 17,547 = \bar{x}_g$, выборочную дисперсию $m(2) = 8,388 = D_g$, выборочное

среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2,896$. Они отличаются от рассмотренных выше, т.к. определены по другим статистическим рядам;

в) выборочный эксцесс $a_x^* = \frac{m(3)}{\sigma^3} = -0,432$;

г) выборочный коэффициент асимметрии $c_x^* = \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0,211$.

Копия файла из Mathcad:

$X := (20 \ 15 \ 17 \ 19 \ 23 \ 18 \ 21 \ 15 \ 16 \ 13 \ 20 \ 16 \ 19 \ 20 \ 14 \ 20 \ 16 \ 14 \ 20 \ 19 \ 15)$

$n := 55$

$$Y^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & 10 & 11 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 14 & 14 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$Y := \text{sort}(X^T)$

$a := \min(X) \quad b := \max(X) \quad a = 10 \quad b = 23$

$R := b - a \quad R = 13$

$x_0 := a - \frac{h}{2}$

$h := \frac{b - a}{1 + \frac{\ln(55)}{\ln(2)}}$

$a_1 := 9 \quad m := \frac{R}{h}$

$i := 0..m_1 - 1$

$j := 0..m_1$

$t_j := a_1 + h_1 \cdot j$

$x_i := t_i + \frac{h_1}{2}$

$w_4 := \frac{w_3}{n}$

$x_0 = 9.041$

$h = 1.917 \quad h_1 := 2$

$m = 6.781$

$m_1 := 8$

$t^T = (9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 23 \ 25)$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

$X^T =$

$$w1 := \text{hist}(t, X) \quad w2 := \frac{w1}{n}$$

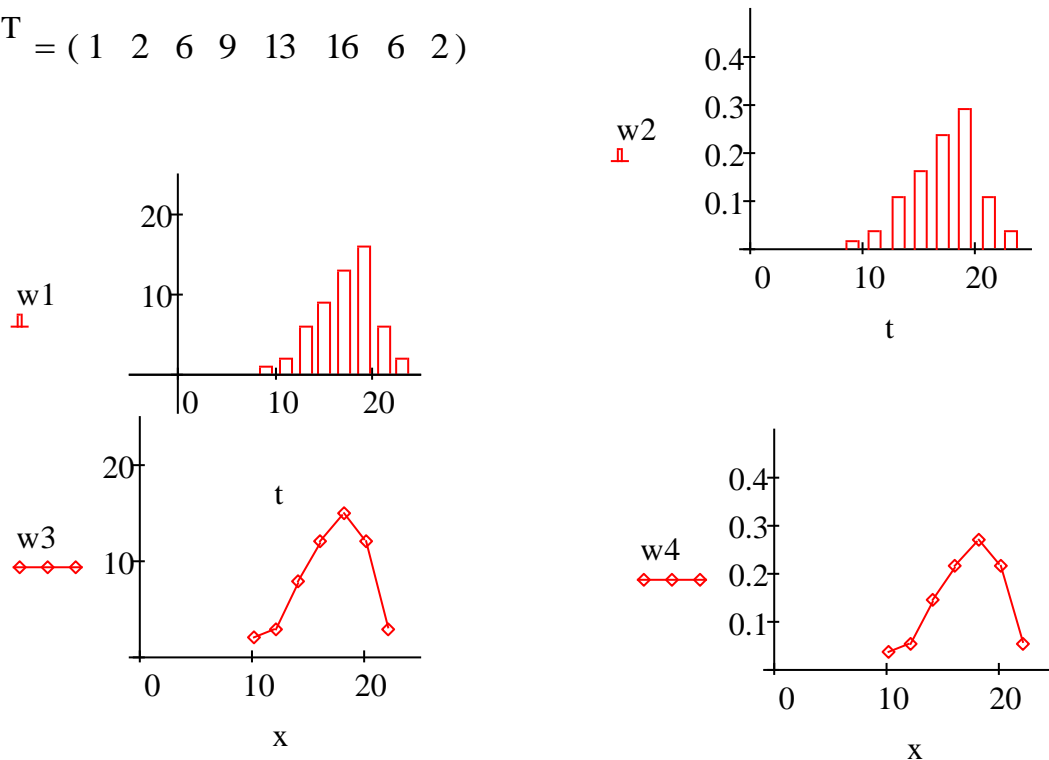
$$x^T = (10 \ 12 \ 14 \ 16 \ 18 \ 20 \ 22 \ 24)$$

$$w3 := \text{hist}(x, X)$$

$$w2^T = (0.018 \ 0.036 \ 0.109 \ 0.164 \ 0.236 \ 0.291 \ 0.109 \ 0.036)$$

$$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.109 + 0.036 = 0.999$$

$$w1^T = (1 \ 2 \ 6 \ 9 \ 13 \ 16 \ 6 \ 2)$$



$$\text{mode}(X) = 19 \quad x1 := \text{mean}(X) \quad x1 = 17.564$$

$$x2 := \text{var}(X) \quad x2 = 8.428 \quad s2 := \frac{n}{n-1} \cdot x2 \quad s2 = 8.584$$

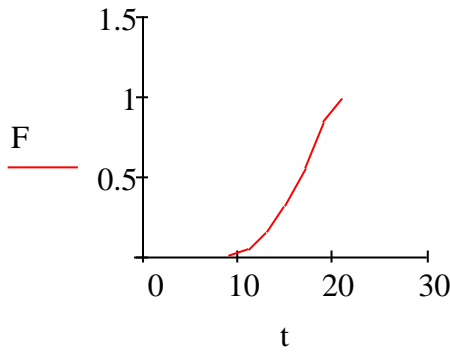
$$s := \sqrt{s2} \quad s = 2.93 \quad \text{stdev}(X) = 2.903$$

$$M := \text{median}(X) \quad M = 18 \quad \sigma := \sqrt{x2} \quad \sigma = 2.903$$

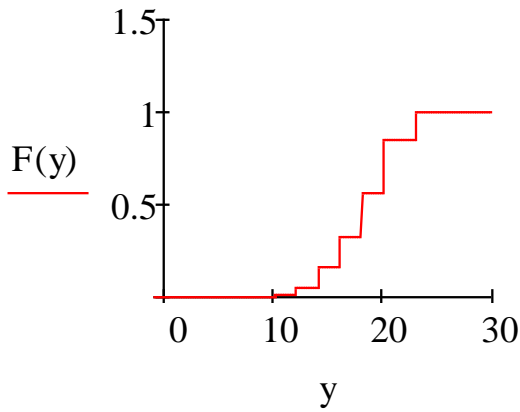
$$i := 0..7 \quad F_i := \sum_{j=0}^i w_j$$

$$w := (0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.109 \quad 0.036)^T$$

$$F^T = (0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.963 \quad 0.999)$$



$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \leq 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \leq 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \leq 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \leq 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \leq 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \leq 22 \\ 0.963 & \text{if } 22 < y \leq 24 \\ 0.999 & \text{if } y > 24 \end{cases}$$



$$y := (10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 23)^T$$

$$p := (0.018 \quad 0.018 \quad 0.018 \quad 0.036 \quad 0.073 \quad 0.073 \quad 0.091 \quad 0.127 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.127 \quad 0.091 \quad 0.018 \quad 0.036)^T$$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} [(y_i)^k \cdot p_i] \quad m(k) := \sum_{i=0}^{13} [(y_i - M(1))^k \cdot p_i]$$

$$M(1) = 17.547 \quad M(2) = 316.593 \quad M(3) = 5.845 \times 10^3 \quad M(4) = 1.1 \times 10^5$$

$$m(1) = 0.018 \quad m(2) = 8.388 \quad m(3) = -10.506 \quad m(4) = 196.233$$

$$\underline{\underline{\sigma}} := \sqrt{m(2)} \quad \sigma = 2.896 \quad \frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.432 \quad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.211$$

4. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью 0,95, зная выборочную среднюю 18, объём выборки 25 и среднее квадратическое отклонение 3.

Решение: доверительный интервал для оценки математического ожидания a имеет вид $\bar{x}_e - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Все величины, кроме t , известны.

Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$, где $\Phi(t)$ функция Лапласа, её значения табулированы. По таблице $t = 1,96$. Таким образом, $18 - 1,96 \frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1,96 \frac{3}{\sqrt{25}}$. Ответ: (16,824; 19,176).

5. Для данных задач 1-2 и результатов этих задач, предполагая, что задано нормальное распределение, найти:

а) точность оценки математического ожидания a по выборочной средней \bar{x}_e с надёжностью γ ;

б) доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью γ .

Выборочную среднюю \bar{x}_e , объём выборки n , среднее квадратическое отклонение σ взять из задач 1-2, γ - из задачи 3.

Решение: из задач 1-2 выборочная средняя $\bar{x}_e = 17,564$, объём выборки $n = 55$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2,903$, из задачи 4 $\gamma = 0,95$;

а) точность оценки математического ожидания a определяется формулой $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. t найдено в задаче 4: $t = 1,96$. Поэтому точность будет равна $\delta = \frac{1,96 \cdot 2,903}{\sqrt{55}} \approx 0,77$;

б) по формуле, указанной в задаче 4, найдём доверительный интервал: $17,564 - 1,96 \frac{2,903}{\sqrt{55}} < a < 17,564 + 1,96 \frac{2,903}{\sqrt{55}}$ или $16,794 < a < 18,334$.

6. Высота горы измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15$. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить высоту горы с ошибкой не более $\delta = 5$ при надёжности $\gamma = 0,9$?

Решение: из формулы, определяющей точность оценки математического ожидания $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ найдём $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$. Определим t из соотношения

$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$. По таблице $t = 1,65$. Поэтому $n = \frac{1,65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24,5025$. Таким образом, надо сделать не менее 25 измерений.

Список литературы

- 1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.
- 2 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики.- М.: Наука, 1982г.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 2013.- 400 с.
- 4 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.
- 5 Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики, случайные процессы. – М.: Айрис -пресс, 2006. – 288 с.
- 6 Сборник индивидуальных заданий для технических ВУЗов. Часть 2/ Под ред. В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря.-2-е изд.- СПб.: Издательство «Лань», 2013.-320 с.

Содержание

1 Расчётно-графическая работа №2. Элементы математической статистики.....	3
1.2 Расчётные задания.....	3
1.3 Решение типового варианта.....	11
Список литературы.....	20

Дополнительный план 2018 г., поз. 8

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение
Часть 2

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать _____
Тираж 30 экз.
Объем 1,3 уч.-изл.

Формат 6084 1/16
Бумага типографическая №1
Заказ _____ Цена 660 тг.

Копировально-множительное бюро

некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул.Байтурсынова, 126