Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра математики и математического моделирования

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение
Часть 1

Алматы 2018

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение. Часть 1. - Алматы: АУЭС, 2018.- 35 стр.

Методические указания и задания содержат расчетно-графическую работу №1 дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 5В070400 - Вычислительная техника и программное обеспечение. Приведены теоретические вопросы программы, варианты заданий по основным понятиям, теоремам и законам теории вероятностей. Дано решение типового варианта вместе с необходимыми теоретическими сведениями.

Ил.10, табл. 12, библиогр. 7 назв.

Рецензент: доцент каф. МММ А.К.Искакова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2018 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2018 г.

Введение

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие массовым случайным явлениям, причём не сами явления, а их математические модели. Она обеспечивает теоретическую базу для широкого круга практических задач. Вероятностные методы в той или иной степени применяются во многих областях науки.

Данные методические указания содержат два раздела теории вероятностей: случайные события и случайные величины.

По каждому разделу приведены теоретические вопросы, задания и решение типового варианта.

Номер варианта студента определяется по списку группы. Расчетно-графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчетно-графическая работа №1. Элементы теории вероятностей

Цели: ознакомиться с понятиями случайного события и его вероятностью, основными теоремами теории вероятностей, изучить законы распределения и числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

1.1 Теоретические вопросы

1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.
2. Статистическое, геометрическое и классическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли.
5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Повторение испытаний. Формула Пуассона.
6. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения дискретной случайной величины.
7. Интегральная функция распределения. Плотность распределения.
8. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретных и непрерывных случайных величин.
9. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Равномерное и показательное распределения, функция надёжности.
10. Нормальное распределение.
11. Понятие о предельных теоремах теории вероятностей.

1.2 Расчётные задания

1. В ящике изделия трёх сортов: n_1 изделий первого сорта, n_2 - второго, n_3 - третьего ($\sum_i^3 n_i = n$). Найти:

а) относительную частоту изделий первого сорта;

б) вероятность того, что все m ($m = \sum_i^3 m_i$) выбранных изделий будут первого сорта;

в) вероятность того, что среди m выбранных изделий будет m_1 первого сорта;

г) вероятность того, что среди m выбранных изделий будет m_1 первого сорта, m_2 - второго, m_3 - третьего;

д) вероятность того, что среди m выбранных изделий будет хотя бы одно первого сорта.

№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
1.1	20	26	24	2	1	2	1.16	41	29	30	5	3	2
1.2	40	20	15	4	1	3	1.17	29	21	40	6	4	2
1.3	35	30	20	2	1	2	1.18	25	35	25	2	2	3
1.4	20	40	30	2	2	3	1.19	18	42	20	1	2	2
1.5	30	45	12	3	2	3	1.20	43	27	25	3	4	2
1.6	25	55	20	8	3	4	1.21	22	28	20	2	4	3
1.7	40	24	26	4	3	2	1.22	30	21	29	3	1	1
1.8	28	42	25	3	5	2	1.23	42	20	28	1	3	2
1.9	30	15	40	2	2	3	1.24	24	26	25	2	4	2
1.10	17	33	40	1	3	2	1.25	37	33	30	2	3	5
1.11	31	25	29	2	2	1	1.26	26	34	30	3	2	3
1.12	28	32	15	1	2	2	1.27	31	29	20	1	2	2
1.13	30	41	29	3	4	2	1.28	29	31	35	3	2	3
1.14	32	28	20	3	2	2	1.29	34	26	36	4	1	2
1.15	24	26	35	1	3	1	1.30	25	35	29	1	2	2

2. Прибор состоит из трёх независимо работающих узлов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени равна p_1, p_2, p_3 соответственно для первого, второго и третьего узлов. Найти вероятность того, что в течение этого времени:

а) все три узла будут безотказно работать (событие A);

б) безотказно работать будет только один узел (событие B);

в) безотказно работать будут два узла, один откажет (событие C);

г) безотказно работать будет хотя бы один узел (событие D).

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0.9	0.6	0.5	2.11	0.5	0.9	0.4	2.21	0.5	0.7	0.9
2.2	0.8	0.7	0.6	2.12	0.7	0.8	0.5	2.22	0.6	0.5	0.8
2.3	0.7	0.5	0.8	2.13	0.5	0.7	0.6	2.23	0.7	0.9	0.7
2.4	0.6	0.9	0.8	2.14	0.4	0.6	0.7	2.24	0.8	0.4	0.6
2.5	0.5	0.7	0.9	2.15	0.5	0.5	0.8	2.25	0.9	0.5	0.5
2.6	0.9	0.6	0.8	2.16	0.6	0.9	0.5	2.26	0.4	0.6	0.8
2.7	0.8	0.5	0.7	2.17	0.7	0.8	0.6	2.27	0.5	0.7	0.9
2.8	0.5	0.8	0.6	2.18	0.8	0.5	0.7	2.28	0.6	0.8	0.7
2.9	0.6	0.9	0.5	2.19	0.9	0.6	0.8	2.29	0.7	0.9	0.5
2.10	0.7	0.9	0.4	2.20	0.9	0.4	0.9	2.30	0.8	0.9	0.4

3. Три завода производят детали, поступающие в магазин. Из первого завода поступило n_1 деталей, из второго - n_2, из третьего - n_3 ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Вероятность того, что деталь бракованная для первого завода составляет m_1%, для второго - m_2%, для третьего - m_3%. Требуется

а) найти вероятность того, что приобретённая в магазине деталь будет бракованной;

б) приобретённая в магазине деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она из i – го завода (i =1,2,3).

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
3.1	520	220	5	8	7	1	3.16	100	250	7	8	5	1
3.2	270	410	10	5	9	2	3.17	430	180	5	4	7	2
3.3	250	140	8	7	4	2	3.18	170	540	6	5	8	3
3.4	190	380	5	9	30	1	3.19	650	120	10	9	8	2
3.5	290	610	6	3	3	2	3.20	400	180	7	10	5	1
3.6	270	430	10	6	4	2	3.21	120	380	10	6	9	2
3.7	280	360	7	10	9	1	3.22	270	340	9	5	4	3
3.8	520	110	5	7	10	1	3.23	430	120	10	7	6	2
3.9	240	290	9	8	4	3	3.24	360	120	5	10	8	1
3.10	310	410	7	2	5	3	3.25	420	210	8	7	6	1
3.11	520	110	3	6	7	2	3.26	370	130	10	6	5	2
3.12	280	310	9	8	4	2	3.27	410	200	5	10	8	3
3.13	400	320	4	5	8	1	3.28	280	510	10	6	5	3
3.14	350	240	9	8	7	1	3.29	710	120	2	10	4	3
3.15	190	520	5	2	4	3	3.30	460	240	5	9	7	1

4. Проводится n испытаний (для варианта a n=10; для варианта b n=100), в каждом из которых вероятность появления некоторого случайного события равна p. Найти вероятность того, что это событие появится:

а) ровно k_1 раз (событие A);

б) не более k_1 раз (событие B);

в) не менее k_2 раз (событие C);

г) хотя бы один раз (событие D) (для варианта a);

д) от k_1 до k_2 раз (событие E) (для варианта b).

№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p
4.1	a	2	5	0.9	4.11	a	4	6	0.5	4.21	a	2	6	0.3
	b	80	90			b	75	95			b	40	60	
4.2	a	3	7	0.8	4.12	a	5	8	0.6	4.22	a	3	7	0.2
	b	85	95			b	20	60			b	35	70	
4.3	a	4	8	0.7	4.13	a	3	8	0.7	4.23	a	4	7	0.3
	b	70	95			b	30	85			b	50	80	
4.4	a	3	5	0.6	4.14	a	2	4	0.8	4.24	a	5	7	0.4
	b	60	95			b	40	75			b	40	65	
4.5	a	2	7	0.5	4.15	a	4	9	0.9	4.25	a	3	5	0.5
	b	50	90			b	80	95			b	45	75	
4.6	a	4	6	0.4	4.16	a	3	9	0.8	4.26	a	2	4	0.6
	b	65	75			b	50	95			b	30	80	
4.7	a	5	9	0.3	4.17	a	1	3	0.7	4.27	a	2	8	0.7
	b	55	80			b	65	85			b	40	90	
4.8	a	4	7	0.2	4.18	a	2	6	0.6	4.28	a	1	4	0.8
	b	40	80			b	50	70			b	25	70	
4.9	a	2	8	0.3	4.19	a	2	4	0.5	4.29	a	4	7	0.9
	b	65	80			b	55	75			b	35	90	
4.10	a	3	6	0.4	4.20	a	3	5	0.4	4.30	a	4	6	0.9
	b	20	85			b	45	80			b	10	60	

5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
5.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
5.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6

	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
5.4	*X*	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
5.5	*X*	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
6.6	*X*	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
5.7	*X*	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
5.8	*X*	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
5.9	*X*	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
5.10	*X*	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.11	*X*	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
5.12	*X*	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
5.13	*X*	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
5.14	*X*	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
5.15	*X*	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		
5.16	*X*	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
5.17	*X*	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
5.18	*X*	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
5.19	*X*	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
5.20	*X*	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
5.21	*X*	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
5.22	*X*	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
5.23	*X*	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
5.24	*X*	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		

5.25	X	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
5.26	X	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.27	X	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
5.28	X	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
5.29	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.30	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал $(a;b)$.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
6.1	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	6.16	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right),\ 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2
6.2	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \le -2 \end{cases}$	-2,5	0	6.17	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
6.3	$\begin{cases} 0, x \le -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0{,}5\cos x, -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{4}$	6.18	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
6.4	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	6.19	$\begin{cases} 0,\ x \le 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5},\ 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5
6.5	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > \pi/2 \\ \cos x,\ 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	6.20	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1
6.6	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ 0{,}5\sin x, 0 < x \le \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$	6.21	$\begin{cases} 0,\ x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2,\ -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1

6.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \dfrac{x+2}{6}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	1	2	6.22	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$	$\dfrac{1}{4}$	1
6.8	$\begin{cases} 0,\ x \le 4, x > 5 \\ \dfrac{2x}{9},\ 4 < x \le 5 \end{cases}$	3	4,5	6.23	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \dfrac{7{,}5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4
6.9	$\begin{cases} 0, x \le \dfrac{\pi}{2}, x > \dfrac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\dfrac{2\pi}{3}$	6.24	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\dfrac{\pi}{12}$
6.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	1,5	2	6.25	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x-2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
6.11	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{4}$	6.26	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
6.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{x}{4}), 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	6.27	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \dfrac{2}{5}(1-\dfrac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4
6.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \dfrac{x+1}{4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	-1	1	6.28	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{9}$
6.14	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0,2	1,2	6.29	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2
6.15	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	6.30	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \dfrac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3

7. Среди N отобранных шаров m% белых. Составить закон распределения числа белых шаров среди отобранных (случайная величина X). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

№	N	m	№	N	m	№	N	m
7.1	3	10	7.11	4	15	7.21	3	11
7.2	2	12	7.12	5	13	7.22	2	16
7.3	4	20	7.13	3	14	7.23	4	29
7.4	5	25	7.14	2	20	7.24	5	10

7.5	3	30	7.15	4	27	7.25	3	17
7.6	2	10	7.16	5	20	7.26	2	21
7.7	4	15	7.17	3	19	7.27	4	22
7.8	5	17	7.18	2	23	7.28	5	24
7.9	3	12	7.19	4	11	7.29	3	18
7.10	2	15	7.20	5	28	7.30	2	22

8. Изделие состоит из N элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна p и не зависит от состояния других элементов. Требуется:

а) составить закон распределения числа отказавших элементов;

б) какова вероятность отказа не менее m элементов в год?

№	N	m	p	№	N	m	p	№	N	m	p
8.1	2000	4	0,001	8.11	1500	6	0,005	8.21	1000	6	0,005
8.2	1000	5	0,007	8.12	4000	2	0,006	8.22	4500	2	0,003
8.3	3000	7	0,004	8.13	8000	2	0,001	8.23	2000	4	0,001
8.4	2000	5	0,002	8.14	6500	6	0,002	8.24	1000	5	0,007
8.5	1000	6	0,005	8.15	3000	2	0,005	8.25	3000	7	0,004
8.6	5000	2	0,001	8.16	1500	3	0,002	8.26	2000	5	0,002
8.7	2000	4	0,001	8.17	2000	4	0,001	8.27	1000	6	0,005
8.8	1500	5	0,008	8.18	1000	5	0,007	8.28	6500	8	0,007
8.9	3500	7	0,004	8.19	3500	1	0,002	8.29	7000	6	0,002
8.10	2000	2	0,003	8.20	2000	5	0,001	8.30	5500	9	0,004

9 а. Варианты 1-15.

Цена деления измерительного прибора равна a. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Случайная величина X – ошибка при округлении отсчёта. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая (большая) m.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

9 б. Варианты 16 – 30.

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения a минут. Случайная величина X – время ожидания автобуса. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее (более) m минут.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	a	m	№	a	m	№	a	m
9.1	0,2	0,04	9.11	0,3	0,08	9.21	19	8
9.2	0,3	0,02	9.12	0,6	0,01	9.22	20	5
9.3	0,1	0,06	9.13	0,9	0,06	9.23	25	5
9.4	0,5	0,01	9.14	0,5	0,05	9.24	9	3
9.5	0,6	0,05	9.15	0,8	0,07	9.25	14	7
9.6	0,9	0,02	9.16	5	3	9.26	18	9
9.7	0,1	0,08	9.17	10	4	9.27	24	8
9.8	0,7	0,01	9.18	15	5	9.28	6	3
9.9	0,4	0,06	9.19	6	2	9.29	12	6
9.10	0,5	0,07	9.20	20	10	9.30	16	8

10. Время безотказной работы элемента (случайная величина T) имеет показательное распределение с параметром λ, где λ - интенсивность отказов, т.е. среднее число отказов в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t элемент откажет и вероятность того, что за время t элемент не откажет.

Построить графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
10.1	1	5	10.11	2	5	10.21	3	8
10.2	2	10	10.12	3	10	10.22	4	4
10.3	3	6	10.13	4	6	10.23	6	3
10.4	4	8	10.14	6	8	10.24	7	2
10.5	6	4	10.15	7	4	10.25	8	1
10.6	7	3	10.16	8	3	10.26	9	10
10.7	8	2	10.17	9	2	10.27	10	6
10.8	9	1	10.18	10	1	10.28	1	7
10.9	10	7	10.19	1	10	10.29	2	8
10.10	1	9	10.20	2	6	10.30	3	2

11. Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания (случайная величина X) подчинены нормальному закону распределения с параметрами a и σ. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

д) вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	1	8	14	2	11.16	10	2	9	14	2
11.2	12	2	7	14	3	11.17	12	4	5	14	3
11.3	14	3	10	15	5	11.18	14	1	9	15	5
11.4	11	5	9	12	3	11.19	11	6	8	12	3
11.5	13	2	6	13	2	11.20	13	4	6	17	2
11.6	12	3	7	15	4	11.21	12	9	8	15	4
11.7	10	2	8	17	2	11.22	10	3	6	17	2
11.8	12	4	6	14	6	11.23	12	5	6	13	6
11.9	14	6	11	19	5	11.24	14	2	12	19	5
11.10	15	5	8	12	3	11.25	15	3	4	12	3
11.11	17	4	6	14	2	11.26	17	1	5	14	2
11.12	12	5	7	18	4	11.27	12	4	9	18	4
11.13	18	5	6	12	3	11.28	11	3	4	12	3
11.14	10	4	6	15	2	11.29	17	2	5	19	5
11.15	12	3	5	18	4	11.30	13	5	6	18	3

1.3 Решение типового варианта

1. В ящике изделия трёх сортов: 40 изделий первого сорта, 50 - второго, 30 - третьего (всего 120 изделий). Найти:

а) относительную частоту изделий первого сорта;

б) вероятность того, что все 20 выбранных наудачу изделий будут первого сорта;

в) вероятность того, что среди 20 выбранных наудачу изделий будет 9 первого сорта;

г) вероятность того, что среди 20 выбранных наудачу изделий будет 9 первого сорта, 6 - второго, 5- третьего;

д) вероятность того, что среди 20 выбранных наудачу изделий будет хотя бы одно первого сорта.

Решение:

а) относительной частотой события A (обозначается $P^*(A)$) называется отношение числа m испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых испытаний: $P^*(A) = m/n$.

Пусть A – выбор изделия первого сорта, тогда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$.

В остальных пунктах используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/ n$, где m – число испытаний, благоприятствующих появлению события A, n – общее число испытаний;

б) пусть событие A - все 20 выбранных изделий будут первого сорта. Общее число элементарных событий равно числу различных способов взять 20 изделий из 120, т.е. $n = C_{120}^{20}$; число благоприятствующих событий равно числу различных способов взять из 40 изделий первого сорта 20, т.е. $m = C_{40}^{20}$. Таким образом, $P(A) = m/ n = C_{40}^{20}/ C_{120}^{20} = 4{,}679\times10^{-12}$;

в) пусть событие A – среди 20 выбранных изделий будет 9 первого сорта. Как выше сказано, $n = C_{120}^{20}$. Число m благоприятствующих событию A элементарных событий находится по одному из правил комбинаторики: пусть во множестве из n элементов имеются s подмножеств, состоящих соответственно из $n_1, n_2,..., n_s$ элементов $(\sum_1^s n_i = n)$. Тогда, если из этого множества происходит отбор по схеме: m_1 из n_1 элементов, m_2 из n_2 элементов,…, m_s из n_s элементов, то общее число N способов образования s групп по $m_1, m_2,..., m_s$ элементов без учёта порядка в каждой из них равно $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_s}^{m_s}$. Таким образом, в этом пункте $m = C_{40}^{9}\cdot C_{80}^{11}$, где C_{40}^{9} равно числу различных способов выбрать 9 изделий первого сорта из 40 первого сорта, а C_{80}^{11} равно числу различных способов выбрать 11 изделий не первого сорта из 80 не первого сорта. Итак, $P(A) = m/ n = C_{40}^{9}\cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097$;

г) пусть событие A - среди 20 выбранных наудачу изделий 9 первого сорта, 6 - второго, 5 - третьего. Для решения задачи также используем классическое определение вероятности события A: $P(A) = m/ n$, где n число всех возможных способов выбора 20 изделий из имеющихся 120, т.е. $n = C_{120}^{20}$. Число m, благоприятствующих событию A элементарных событий, находится по выше приведённому правилу комбинаторики, т.е. $m = C_{40}^{9}\cdot C_{50}^{6}\cdot C_{30}^{5}$. Поэтому $P(A) = m/ n = 0{,}021$;

д) пусть событие A – среди 20 выбранных изделий будет хотя бы одно первого сорта, тогда противоположное событие $\bar{A}$ - среди 20 выбранных изделий не будет ни одного изделия первого сорта. Как в случае б) вероятность этого события найдём по формуле $P(\bar{A}) = m/ n = C_{80}^{20}/ C_{120}^{20} = 1{,}2\times10^{-4}$. Тогда вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1{,}2\times10^{-4} \approx 1$, т.е. это событие почти достоверное.

При вычислении числа сочетаний была использована функция combin в Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором combin(Q,R) введена как функция пользователя C(Q,R), позволяющая получать значения сочетаний при произвольных Q и R.

$$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R),$$

$$C(120,20) = 2.946\times10^{22},$$

$C(40,9) = 2.734 \times 10^{8}$, $C(80,11) = 1.048 \times 10^{13}$,

$C(40,20) = 1.378 \times 10^{11}$,

$\dfrac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2 \times 10^{-4}$, $\dfrac{C(40,9) \cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097$,

$\dfrac{C(40,9) \cdot C(50,6) \cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021$

2. Прибор состоит из трёх независимо работающих узлов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени равна 0,75, 0,8, 0,9 соответственно для первого, второго и третьего узлов. Найти вероятность того, что в течение этого времени:

а) все три узла будут безотказно работать (событие A);

б) безотказно работать будет только один узел (событие B);

в) безотказно работать будут два узла, один откажет (событие C);

г) безотказно работать будет хотя бы один узел (событие D).

Решение: пусть событие A_1 – безотказная работа первого узла, A_2 – второго, A_3 – третьего. По условию $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9.

а) так как событие A - все три узла будут работать безотказно, то $A = A_1 A_2 A_3$ и, т.к. A_1, A_2, A_3 события независимые, то $P(A)$ = $P(A_1 A_2 A_3)$ = $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

б) событие B - безотказно работать будет только один узел, поэтому $B = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$, где $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ события противоположные A_1, A_2, A_3, т.е. отказ первого, второго и третьего узла соответственно. Так как $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) =$ $= 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ и т.к. слагаемые есть события несовместные, то $P(B) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$ 0,08;

в) событие C - безотказно работать будут два узла, один откажет, составляется аналогично, как в предыдущем пункте, т.е. $C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3$. Его вероятность определяется также аналогично: $P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9$=0,3456;

г) событие D - безотказно работать будет хотя бы один узел. Рассмотрим противоположное событие: $\overline{D}$- откажут все три узла. Т.к. $\overline{D} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$, то $P(D) = 1 - P(\overline{D})$ $= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1$=0,995.

3. Три завода производят детали, поступающие в магазин. Из первого завода поступило 100 деталей, из второго - 300, из третьего - n_3= 1000 -

$n_1 - n_2 =$ 600. Вероятность того, что деталь бракованная для первого завода составляет 5%, для второго - 4%, для третьего - 6%. Требуется

а) найти вероятность того, что приобретённая в магазине деталь будет бракованной;

б) приобретённая в магазине деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она из второго завода.

Решение: пусть событие A – приобретённая в магазине деталь будет бракованной; события B_1, B_2, B_3 - приобретённая деталь соответственно из первого, второго, третьего завода (эти события называются гипотезами).

а) вероятность события A находится по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)$, где $P(A/B_i)$ – условные вероятности того, что приобретённая деталь из i – го завода (i=1,2,3). По условию задачи имеем: $P(B_1)$ = 100/1000 = 0,1; $P(B_2)$ = 300/1000 = 0,3; $P(B_3)$ = 600/1000 = 0,6; $P(A/B_1)$=0,05; $P(A/B_2)$=0,04; $P(A/B_3)$=0,06. Поэтому $P(A)$ = $0.1 \cdot 0.05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}06 = 0{,}053$;

б) в этом пункте требуется найти условную вероятность $P(B_2/A)$. Используем для этого формулу Байеса: $P(B_i/A) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

В нашем случае $P(B_2/A) = \dfrac{P(B_2)P(A/B_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A/B_k)} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}04}{0{,}053} = 0{,}226.$

4. Проводится n испытаний (для варианта a n=10; для варианта b n=100), в каждом из которых вероятность появления некоторого случайного события равна 0,8. Найти вероятность того, что это событие появится:

а) ровно k_1 раз (событие A);

б) не более k_1 раз (т.е. $\le k_1$), (событие B);

в) не менее k_2 раз (т.е. $\ge k_2$), (событие C);

г) хотя бы один раз (событие D) (для варианта a);

д) от k_1 до k_2 раз (событие E) (для варианта b).

Решение: вероятность того, что в n испытаниях случайное событие появится k раз, обозначается $P_n(k)$. В зависимости от условий задачи к её определению подходят по разному:

a) n =10, пусть k_1=2, k_2=9. Здесь n не велико, поэтому вероятность события A можно найти точно по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$, $(k = 0,1,2,\ldots n)$. Вероятности событий B и C определяются как суммы вероятностей: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$- вероятность того, что событие произойдёт не более k раз в n независимых испытаниях, т.е. или 0, или 1, или 2,…, или k раз; $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$- вероятность того, что событие произойдёт не менее, чем k раз в n независимых испытаниях, т.е. или k, или $k+1$,…, или n раз. Эти вероятности называют комулятивными (накопленными). Таким образом,

а) $P(A) = P_{10}(2) = C_{10}^2 0{,}8^2 0{,}2^8 = 0{,}000074$;

б) $P(B) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0{,}000078$;

в) $P(C) = P_{10}(9) + P_{10}(10) = 0{,}376$;

г) рассмотрим событие $\overline{D}$, противоположное *D*. $\overline{D}$ - в серии из 10 независимых испытаний данное случайное событие не появилось ни разу. Тогда $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P_{10}(0) \approx 1$;

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$$

$$C(10,2)\cdot 0.8^2\cdot 0.2^8 = 7.373\times 10^{-5}$$

$$C(10,9)\cdot 0.8^9\cdot 0.2^1 + C(10,10)\cdot 0.8^{10}\cdot 0.2^0 = 0.376$$

$$C(10,0)\cdot 0.8^0\cdot 0.2^{10} + C(10,1)\cdot 0.8^1\cdot 0.2^9 + C(10,2)\cdot 0.8^2\cdot 0.2^8 = 7.793\times 10^{-5}$$

$$1 - C(10,0)\cdot 0.8^0\cdot 0.2^{10} = 1$$

b) $n=100$, пусть $k_1=70$, $k_2=80$. Поскольку число независимых испытаний n велико, то вероятность $P_n(k)$ появления случайного события k раз в n испытаниях определяется по локальной теореме Муавра-Лапласа и приближённо равна $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (значения этой функции находят из таблиц или с помощью встроенной функции dnorm в системе Mathcad).

Для определения вероятностей событий *B*, *C* и *E* используют интегральную теорему Муавра-Лапласа: вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что число появления некоторого события будет находится в промежутке от k_1 до k_2 приближённо равна $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ - функция Лапласа, значения которой находятся из специальных таблиц или с помощью встроенной функции pnorm в системе Mathcad.

а) $P(A) = P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\varphi(2{,}5) = 0{,}018/4 = 0{,}0045$; $x = \frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}$=-2,5;

б) $P(B) = P_{100}(k \le 70) = P_{100}(0{,}70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0{,}006$; $x_1 = -2{,}5$, $x_4 = -20$;

в) $P(C) = P_{100}(k \ge 80) = P_{100}(80{,}100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}5$; $x_3 = 5$;

д) $P(E) = P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}494$, $x_2 = 0$.

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad.

$n := 100, \quad k1 := 70, \quad k2 := 80,$

$p := 0.8, \quad q := 1 - p,$

$$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x3 := \frac{n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x4 := \frac{0 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

$x1 = -2.5, \quad x2 = 0, \quad x3=5, \quad x4 = -20$

$\mathrm{pnorm}(x2,0,1) - \mathrm{pnorm}(x1,0,1) = 0.494, \quad \mathrm{dnorm}(x1,0,1) = 0.018$

$\mathrm{pnorm}(x3,0,1) - \mathrm{pnorm}(x2,0,1) = 0.5,$

$\mathrm{pnorm}(x1,0,1) - \mathrm{pnorm}(x4,0,1) = 6.21 \times 10^{-3},$

или другой вариант:

$\Phi(x) := \mathrm{pnorm}(x,0,1) - 0.5,$

$P(k1,k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1).$

$\Phi(x1) = -0.494, \quad \Phi(x2) = 0,$

$P(k1,k2) = 0.494,$

$\Phi(x3) = 0.5, \quad \Phi(x4) = -0.5,$

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5, \quad \Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}.$

Замечание: известна ещё одна формула для определения вероятности $P_n(k)$, которую применяют, если n велико, p мало, а произведение $\lambda = n \cdot p$ - небольшое число. Это формула Пуассона $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

Пусть n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$, поэтому $P(A)$ = $= P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6!$=0,05.

При вычислении можно использовать таблицу значений функции $p(k,\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, приводимую в некоторых учебниках, или функцию dpois в Mathcad. Ниже приведена копия файла, в котором проведены вычисления в Mathcad: $p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda), \quad p(6,3) = 0.05.$

5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$, построить график $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду;

в) вероятность попадания X в интервал (15;45).

Решение:

а) функция распределения $F(x)$ (интегральная функция распределения) случайной величины X определяет вероятность события $X< x$. Для дискретной случайной величины она находится по формуле $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} p_i =$ $= \sum_{x_i<x} P(X = x_i)$, где суммирование ведётся по всем i, для которых $x_i < x$.

Итак,

- если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$;
- если $0 < x \le 10$, то $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$;
- если $10 < x \le 20$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$;
- если $20 < x \le 30$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;
- если $30 < x \le 40$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$;
- если $40 < x \le 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) =$ $= 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$;
- если $x > 50$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) + P(X = 50) = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ x \le 0 \\ 0{,}05, \ \textit{если} \ 0 < x \le 10 \\ 0{,}2, \ \textit{если} \ 10 < x \le 20 \\ 0{,}5, \ \textit{если} \ 20 < x \le 30 \\ 0{,}75, \ \textit{если} \ 30 < x \le 40 \\ 0{,}95, \ \textit{если} \ 40 < x \le 50 \\ 1, \ \textit{если} \ x > 50 \end{cases}$;

График построен в системе Mathcad (см. ниже).

б) найдём числовые характеристики. Для дискретной случайной величины математическое ожидание равно сумме произведений всех её возможных значений на вероятности этих значений: $M(X) = \sum_i x_i p_i$. Поэтому

$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 10 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}25 + 40 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}05 = 25{,}5.$

Дисперсия случайной величины X находится либо по формуле $D(X) = M[X - M(X)]^2$, либо по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Для дискретной случайной величины эти формулы перепишутся так:

$D(X)=\sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ или $D(X)=\sum_i x_i^{\,2} p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; мода дискретной случайной величины (обозначается M_0) – это её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью; вероятность попадания X в интервал $(a;b)$ находится по формуле $P(a;b)=F(b)-F(a)$. В нашей задаче эти величины равны:

$D(x)$=154,75; $\sigma(x)=\sqrt{154{,}75}=12{,}44$; M_0=20;

$P(15;45)=F(45)-F(15)$=0,75.

Ниже приведена копия файла, в котором сделаны вычисления в системе Mathcad, причём вычисление дисперсии проведено по обеим формулам.

ORIGIN= 1

$s := (0\ \ 10\ \ 20\ \ 30\ \ 40\ \ 50)$,

$M := s^T \cdot p^T$,

$p := (0.05\ \ 0.15\ \ 0.3\ \ 0.25\ \ 0.2\ \ 0.05)$,

$M = 25.5$,

$s0 := s^T - M$,

$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$,

$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)}\right]^T \cdot p^T$,

$D = 154.75$,

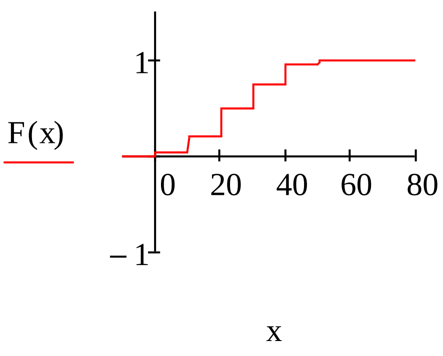
$s2 := \left(0^2\ \ 10^2\ \ 20^2\ \ 30^2\ \ 40^2\ \ 50^2\right)$,

$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2$,

$D1 = 154.75$,

$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$,

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \le 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \le 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \le 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \le 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \le 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases},$$



$F(45) - F(15) = 0.75$.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\begin{cases} 0,\ если\ x\le 0 \\ \frac{2}{9}(3x-x^2),\ если\ 0<x\le 3 \\ 0,\ если\ x>3 \end{cases}$. Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану;

в) вероятность попадания X в интервал (1;4).

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение:

а) функцию распределения находим по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Итак:

- если $x\le 0$, то $f(x)=0$, поэтому $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx=0$;

- если $0<x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx=-\ \frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- если $x>3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{3}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx+\int\limits_{3}^{x} 0\,dx=1.$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид $F(x)=\begin{cases} 0,\ если\ x\le 0 \\ -\frac{x^2(2x-9)}{27},\ если\ 0<x\le 3; \\ 1,\ если\ x>3 \end{cases}$

б) числовые характеристики непрерывных случайных величин находятся по формулам: математическое ожидание - $M(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия - $D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)}(x-M(x))^2 f(x)dx$ или $D(x)=\int\limits_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2$ (пределы интегрирования зависят от того, принадлежат ли возможные значения случайной величины всей оси OX или интервалу $(a;b)$); среднее квадратическое отклонение - $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; модой непрерывной случайной величины X называется то её значение M_o, при котором плотность распределения максимальна; медианой непрерывной случайной величины X называется такое её значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e, т.е. $P(X<M_e)=P(X>M_e)=0{,}5$.

Таким образом, в нашей задаче $M(x)=\int_0^3 2/9x(3x-x^2)dx=1{,}5;$ $D(x)=\int_0^3 x^2\cdot 2/9(3x-x^2)dx-1{,}5^2=0{,}45;$ $\sigma(X)=\sqrt{0{,}45}=0{,}671.$

Для определения моды надо найти максимум функции $f(x)=2/9(3x-x^2)$ на отрезке [0; 3]. Для этого находим производную и приравниваем её к нулю: $f'(x)=2/3-4x/9$, $f'(x)=0$ при x=3/2, эта точка критическая. Проверяем её на экстремум: $f'(1)>0,\ f'(2)<0$. Итак, при переходе через точку x=3/2 знак производной сменился с плюса на минус, значит, x=3/2 - точка максимума, поэтому M_o = 3/2. Заметим, что если $f(x)$ линейная функция, то её экстремумы находятся на концах отрезка [*a;b*], и максимум проще найти по графику $f(x)$.

Медиану находим из условия $P(X<M_e)=0{,}5$, где $P(X<M_e)=$ $=P(-\infty<X<M_e)=$ $P(0<X<M_e)$. Так как $P(0<X<M_e)=\int_0^{M_e}2/9(3x-x^2)dx=$ $=-M_e^{\,2}(2M_e-9)/27$, то, решая уравнение $-M_e^{\,2}(2M_e-9)/27=0{,}5$, получим три корня, из которых подходит один: M_e = 1,5.

в) вероятность попадания X в интервал (1;4) равна

$$P(1<X<4)=P(1<X<3)+P(3<X<4)=\int_1^3 2/9(3x-x^2)dx+\int_3^4 0dx=0{,}741$$

или $P(1<X<4)=F(4)-F(1)=1-\left(-\dfrac{1\cdot(2-9)}{27}\right)=\dfrac{20}{27}=0{,}74.$

Ниже приведёна копия файла с вычислениями в системе Mathcad.

$f(x):=\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x-x^2\right)$, $\sqrt{\frac{9}{20}}=0.671$,

$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx\to\frac{3}{2}=1.5$, $\int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2\to\frac{9}{20}=0.45$,

$\frac{d}{dx}f(x)\to\frac{2}{3}-\frac{4\cdot x}{9}$, $f1(x):=\frac{d}{dx}f(x)$,

$\int_0^y f(x)\,dx\to-\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27}$, $f1(x)\ \text{solve}\ \to\frac{3}{2}$,

$f1(1)=0.222$, $f1(2)=-0.222$,

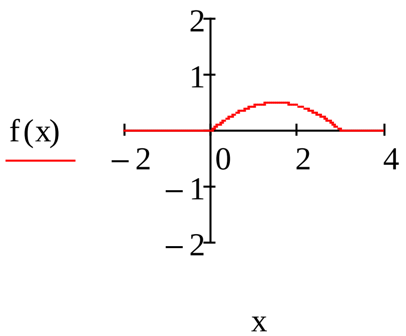
$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y-9)}{27}-0.5 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

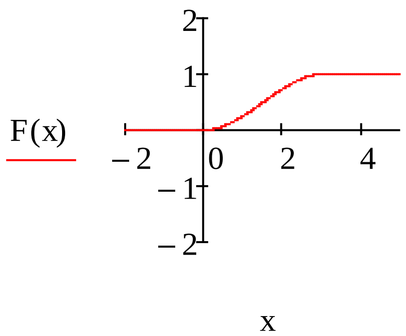
$$\int_1^3 f(x)\,dx \to \frac{20}{27} = 0.741, \qquad f2(x) := -\frac{x^2\cdot(2\cdot x-9)}{27},$$

$$f2(1) = 0.259, \qquad 1-0.259 = 0.741.$$

Графики функций *F*(*x*) и *f*(*x*) построим в системе Mathcad:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)\right] & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}, \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9-2\cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases},$$





7. Среди 6 отобранных шаров 25% белых. Составить закон распределения числа белых шаров среди отобранных (случайная величина X). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение: дискретная случайная величина X – число белых шаров среди отобранных. Её возможные значения: $x_1 = 0$ (нет белых шаров среди отобранных), $x_2 = 1$ (один белый шар среди отобранных) и т.д. $x_7 = 6$ (шесть белых шаров среди отобранных). Возможные значения независимы и вероятность появления каждого из них одинакова и равна р = 0,25, поэтому случайная величина X распределена по биномиальному закону: $P(X=k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0,1,2,\ldots,6$, $q = 1-p$, $n = 6$.

Итак, $P(X=0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6 = 0{,}178$;

$P(X=1)=P_6(1)=C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5=0{,}356;$ $P(X=2)=P_6(2)=C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4=0{,}297;$
$P(X=3)=P_6(3)=C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3=0{,}132;$ $P(X=4)=P_6(4)=C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2=0{,}033;$
$P(X=5)=P_6(5)=C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1=0{,}004;$ $P(X=6)=P_6(6)=C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0=0{,}0002.$

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Числовые характеристики биномиального распределения можно определить по известным формулам для дискретных случайных величин:
$M(X)=\sum_i x_i p_i$, $D(X)=\sum_i (x_i-M(X))^2\cdot p_i$ или $D(X)=\sum_i x_i^{\,2} p_i-(\sum_i x_i p_i)^2$.

Однако проще воспользоваться свойствами математического ожидания и дисперсии, когда X – число появления события в n испытаниях: $M(X)=np$, $D(X)=npq$. Итак, в нашем случае $M(X)=6\cdot 0{,}25=1{,}5$, $D(X)=6\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75=1{,}125$. $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}06$.

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$C(Q,R):=\text{combin}(Q,R)$

$C(6,0)\cdot 0.25^0\cdot 0.75^6=0.178$

$C(6,1)\cdot 0.25^1\cdot 0.75^5=0.356$

$C(6,4)\cdot 0.25^4\cdot 0.75^2=0.033$

$C(6,2)\cdot 0.25^2\cdot 0.75^4=0.297$

$C(6,3)\cdot 0.25^3\cdot 0.75^3=0.132$

$C(6,5)\cdot 0.25^5\cdot 0.75^1=4.395\times 10^{-3}$

$C(6,6)\cdot 0.25^6\cdot 0.75^0=2.441\times 10^{-4}$

Анализ биномиального распределения удобно проводить в среде Mathcad с использованием специальных функций с корневым словом binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Например, функция dbinom(k,n,p) выводит значения вероятностей и т.д.

8. Изделие состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Требуется:

а) составить закон распределения числа отказавших элементов;

б) найти вероятность отказа не менее 2 элементов в год.

Решение:

а) дискретная случайная величина X – число отказавших элементов распределена по закону Пуассона (предельный для биномиального закон распределения, когда вероятность p появления события в каждом испытании мала, а число n проводимых испытаний велико): $P(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1$, $k=0,1,2,\ldots,1000$, $n=1000$.

Таким образом, $P(X=0)=P_{1000}(0)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}$=0,368;

$P(X=1)=P_{1000}(1)\approx\frac{1^0}{1!}e^{-1}$= 0,368; $P(X=2)=P_{1000}(2)\approx\frac{1^2}{2!}e^{-1}$=0,184;

$P(X=3)=P_{1000}(3)\approx\frac{1^3}{3!}e^{-1}0{,}061$, и т.д. $P(X=10)=P_{1000}(10)\approx\frac{1^{10}}{10!}e^{-1}$=0,0000001 и т.д. Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3	…	10	…
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…

б) вероятность отказа не менее двух элементов вычисляется по формуле: $P(X\geq 2)=1-P(X<2)$ или

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$ = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.

Ниже приведена копия файла из Mathcad с вычислениями.

$p(k,\lambda) := \text{dpois}(k,\lambda)$

$p(0,1) = 0.368$; $p(4,1) = 0.015$;

$p(1,1) = 0.368$; $p(5,1) = 3.066\times 10^{-3}$;

$p(2,1) = 0.184$; $p(10,1) = 1.014\times 10^{-7}$;

$p(3,1) = 0.061$; $p(1000,1) = 0$.

В среде Mathcad закону распределения Пуассона соответствуют специальные функции с корневым словом pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Например, функция dpois(k,n,p) выводит значения вероятностей и т.д.

9 а. Цена деления измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Случайная величина X – ошибка при округлении отсчёта. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка меньшая (большая) 0,04.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: случайная величина X – ошибка при округлении отсчёта распределена равномерно между двумя целыми делениями; $b-a=0{,}2$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Для равномерного распределения имеют место формулы:

- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ если } x\in(a,b)\\ 0, \text{ если } x\notin(a,b)\end{cases}$ - плотность распределения;
- $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a<x\le b\\ 1, \text{ если } x>b\end{cases}$ - функция распределения;
- $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ - математическое ожидание;
- $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсия;
- $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ - вероятность попадания в интервал (α,β).

Поэтому в нашей задаче:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}2}=5, \text{ если } x\in(0;0{,}2)\\ 0, \text{ если } x\notin(0;0{,}2)\end{cases}$;

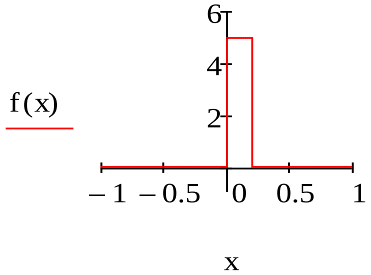
б) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0\\ \dfrac{x}{0{,}2}=5x, \text{ если } 0<x\le 0{,}2\\ 1, \text{ если } x>0{,}2\end{cases}$;

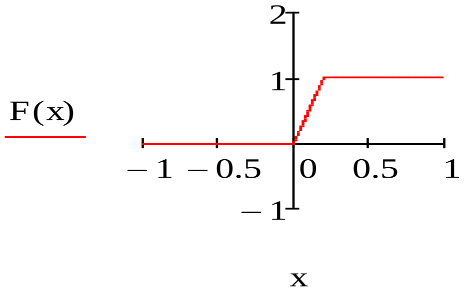
в) $M(X)=\dfrac{0{,}2+0}{2}=0{,}1$; $D(X)=\dfrac{(0{,}2-0)^2}{12}=0{,}003$;

г) ясно, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая 0,04, если она попадёт в интервал (0; 0,04) или в интервал (0,16; 0,2) (событие *A*), т.е. вероятность этого события равна $P(A)=P(0<X<0{,}04)+P(0{,}16<X<0{,}2)=$ $=\dfrac{0{,}04-0}{0{,}2}+\dfrac{0{,}2-0{,}16}{0{,}2}$=0,4; при отсчёте будет сделана ошибка, большая 0,04, если она попадёт в интервал (0,04; 0,16) (событие *B*), т.е. вероятность этого события равна $P(B)=P(0{,}04<X<0{,}16)=\dfrac{0{,}16-0{,}04}{0{,}2}$=0,6 или $P(B)=1-P(A)$.

Построим графики *F*(*x*) и *f*(*x*) в системе Mathcad.

$f(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } x\le 0\\ 5 \text{ if } 0<x\le 0.2\\ 0 \text{ if } x>0.2\end{vmatrix}$ $\quad F(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } x\le 0\\ (5\cdot x) \text{ if } 0<x\le 0.2\\ 1 \text{ if } x>0.2\end{vmatrix}$





9 б. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Случайная величина X – время ожидания автобуса. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобуса менее (более) 3 минут.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: случайная величина X – время ожидания автобуса распределена равномерно между двумя последовательными прибытиями автобуса; $b-a=5$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Все формулы для равномерного распределения смотри в предыдущей задаче 9а.

В нашей задаче:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}=0{,}2, \; \textit{если} \;\; x\in(0;5) \\ 0, \;\; \textit{если} \;\; x\notin(0;5)\end{cases}$;

б) $F(x)=\begin{cases}0, \;\; \textit{если}\; x\le 0 \\ \dfrac{x}{5}=0{,}2x, \; \textit{если}\; 0<x\le 5 \\ 1, \; \textit{если}\; x>5\end{cases}$;

в) $M(X)=\dfrac{5+0}{2}=2{,}5$; $D(X)=\dfrac{(5-0)^2}{12}=2{,}08$;

г) ясно, что пассажир будет ждать автобуса менее 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 3) или, что всё равно, в интервал (2; 5) (событие A), т.е. вероятность этого события равна

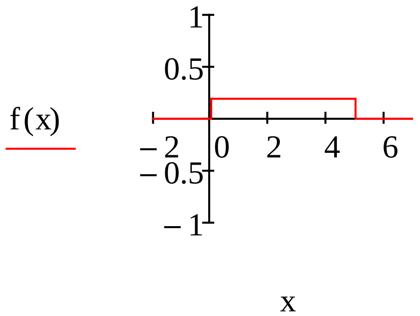
$$P(A)=P(0<X<3)=\frac{3-0}{5}=0{,}6;$$

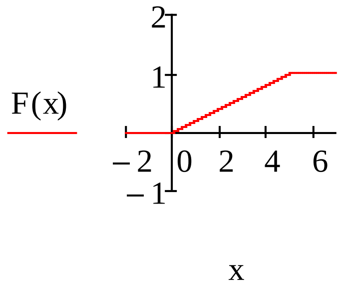
пассажир будет ждать автобуса более 3 минут, если он подойдёт к остановке в интервал времени (0; 2) или, что всё равно, в интервал (3; 5) (событие B), т.е. вероятность этого события равна

$P(B)=P(3<X<5)=\dfrac{5-3}{5}$=0,4 или $P(B)=1-P(A)$.

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$ в системе Mathcad.

$$f(x):=\begin{cases}0 & \text{if } x\le 0\\ 0.2 & \text{if } 0<x\le 5\\ 0 & \text{if } x>5\end{cases}\qquad F(x):=\begin{cases}0 & \text{if } x\le 0\\ (0.2\cdot x) & \text{if } 0<x\le 5\\ 1 & \text{if } x>5\end{cases}$$





В среде Mathcad равномерному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом unif: dunif(x,a,b)– выводит значения плотности распределения; punif(x,a,b) – выводит значения функции распределения; runif(n,a,b) – выводит массив из n значений независимых случайных чисел, распределённых равномерно в интервале (a,b).

10. Время безотказной работы элемента (случайная величина T) имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}5$, где λ – интенсивность отказов, т.е. среднее число отказов в единицу времени. Найти:

а) плотность распределения $f(t)$;

б) функцию распределения $F(t)$, указать её вероятностный смысл;

в) функцию надёжности $R(t)$, указать её вероятностный смысл;

г) математическое ожидание, дисперсию;

д) вероятность того, что за время t=5ч. элемент откажет и вероятность того, что за время t=5ч. элемент не откажет.

Построить графики $F(t)$, R(t) и $f(t)$.

Решение: показательным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x<0\\ \lambda e^{-\lambda x},\ \textit{если}\ x\ge 0\end{cases}$. Другие понятия и формулы для показательного распределения: $F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x<0\\ 1-e^{-\lambda x},\ \textit{если}\ x\ge 0\end{cases}$ - функция распределения; если случайная величина X = T – время безотказной работы элемента, то $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа элемента за время t; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$ –

функция надёжности, определяет вероятность безотказной работы элемента за время t;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

В нашей задаче, учитывая то, что $t\geq 0$, имеем:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность отказа элемента за время t;

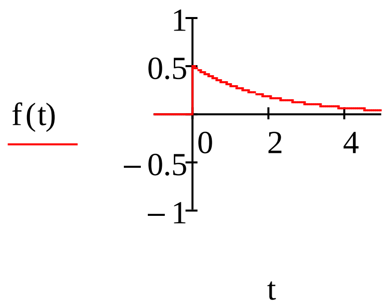
в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, определяет вероятность безотказной работы элемента за время t;

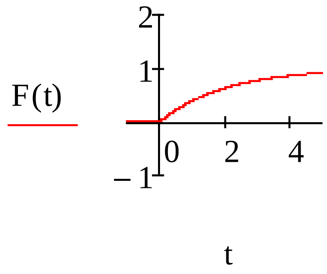
г) $M(X)=\dfrac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\dfrac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) поскольку функция распределения определяет вероятность отказа за время t, то, подставив в неё t=5, получим вероятность отказа за время t=5ч: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; события «элемент откажет» и «элемент не откажет» - противоположные, поэтому вероятность безотказной работы элемента за время t=5 равна 1-0,918=0,082. Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надёжности: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

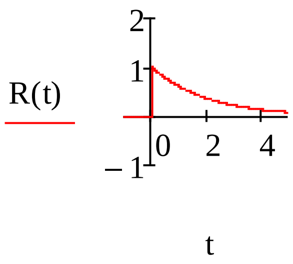
Построим графики $F(t)$, $R(t)$ и $f(t)$ и сделаем некоторые вычисления в системе Mathcad:

$$f(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \ \text{if} \ \ t<0 \\ 0.5\cdot e^{-0.5\cdot t} \ \ \text{if} \ \ t\geq 0 \end{vmatrix} \qquad F(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \ \text{if} \ \ t<0 \\ 1-e^{-0.5\cdot t} \ \ \text{if} \ \ t\geq 0 \end{vmatrix}$$





$$R(t) := \begin{vmatrix} 0 \ \ \text{if} \ \ t<0 \\ e^{-0.5\cdot t} \ \ \text{if} \ \ t\geq 0 \end{vmatrix}$$



$$e^{-2.5}=0.082$$
$$1-e^{-2.5}=0.918$$

В среде Mathcad показательному закону распределения соответствуют специальные функции с корневым словом exp: dexp(x,λ) – выводит значения плотности распределения; pexp(x,λ) – выводит значения функции распределения; rexp(n, λ) – выводит массив из n значений независимых случайных чисел, распределённых по показательному закону с параметром λ.

11. Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания (случайная величина X) подчинены нормальному закону распределения с параметрами a = 10 и σ = 2. Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию;

г) вероятность попадания в интервал $(12;14)$;

д) вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине δ=3.

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: нормальным называют закон распределения непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a =$M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(X)$– среднее квадратическое отклонение X. Другие понятия и формулы для нормального распределения:

- $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ или $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$ - функция распределения, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, её значения табулированы или их можно определить в системе Mathcad ;

- $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$;

- $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ - вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на δ.

В нашей задаче

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

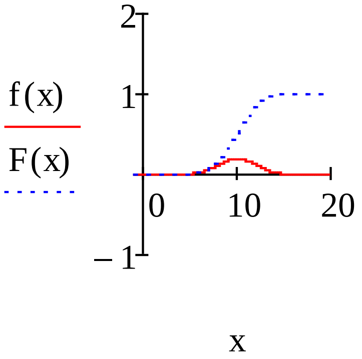
в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

г) $P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) $P(|X-10|\le 3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=2\Phi(1{,}5)=0{,}4332.$

Здесь значения функции Лапласа взяты из таблицы, хотя их можно было бы найти в системе Mathcad, где нормальному закону распределения соответствуют функции, имеющие в названии корневое слово norm и начинающиеся с букв d, p, q, r. Например, dnorm (x,a,σ) – выводит значения плотности распределения $f(x)$; pnorm (x,a,σ) – выводит значения функции распределения $F(x)$. Воспользуемся этими функциями для построения соответствующих графиков. Копия файла из Mathcad приведена ниже.

$f(x) := \mathrm{dnorm}(x,10,2)$ $\qquad F(x) := \mathrm{pnorm}(x,10,2)$



Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2003.- 279 с.

2 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятносей и математической статистики.- М.: Наука, 1982г.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 2013.- 400 с.

4 Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами изадачами в среде Mathcad. - СПб.: БХВ- Петербург, 2008. – 528 с.

5 Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики, случайные процессы. – М.: Айрис -пресс, 2006. – 288 с.

6 Сборник индивидуальных заданий для технических ВУЗов. Часть 2/ Под ред. В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря.-2-е изд.-СПб.: Издатеьство «Лань», 2013.-320 с.

Содержание

Дополнительный план 2018 г., поз. 7

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Маншук Жумамуратовна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности
5В070400- Вычислительная техника и программное обеспечение
Часть 1

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать_______ Формат 6084 1/16
Тираж 30 экз. Бумага типографическая №1
Объем 2,0 уч.-из.л. Заказ______ Цена 1000 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013 Алматы, ул.Байтурсынова, 126