Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Математика және математикалық үлгілеу кафедрасы

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

5В070400- Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Алматы 2018

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070400- Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандығы студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. 1 бөлім. - Алматы: АЭжБУ, 2018. - 32 б.

«Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика» пәні бойынша 5В070400- Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандығы студенттері үшін №1 есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмаларынын тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары, негізгі ұғымдары, теоремалары мен ықтималдықтар теориясының заңдары бойынша тапсырмалар енгізілген. Қажетті мағлұматтармен типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Безендіру10, кесте 12, библиогр. 7 атауы.

Пікір беруші: ММҮ кафедрасының аға оқытушысы Абдулланова Ж.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2018 ж. жоспары бойынша басылды

Кіріспе

Ықтималдық теориясы жаппай кездейсоқ құбылыстарға тән заңдылықтарды зерттейді. Ол математикалық статистика айналысатын кең ауқымды қолданбалы есептерге теориялық негіз болып табылады. Ықтималдық әдістері ғылымның салаларында қолданылатын әдістердің қатарында жатады.

Есептеу-сызба жұмыстары ықтималдық теориясының екі бөлімнен тұрады: кездейсоқ оқиғалар және кездейсоқ шамалар.

Әрбір бөлімде теориялық сұрақтар, типтік варианттың тапсырмалары мен шешуі келтірілген.

Әр студенттің вариантының нөмірі топтың тізімі бойынша анықталады. Есептеу-сызба жұмыс оқушы дәптеріне анық орындалуы керек.

1 Есептік-сызба жұмыс №1. Ықтималдық теориясы элементтері

Мақсаты: кездейсоқ оқиғалар мен оның ықтималдығы туралы түсініктермен, ықтималдық теориясының негізгі теоремаларымен таныстыру. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын және үлестірім заңдарын оқып, үйрену.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Ықтималдық теориясы пәні. Кездейсоқ оқиғалар. Элементар оқиғалар кеңістігі. Оқиғалар алгебрасы.
2. Ықтималдықтың статистикалық, геометриялық және классикалық анықтамалары.
3. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Шартты ықтималдық.
4. Толық ықтималдықтар формуласы. Байес формуласы. Бернулли формуласы.
5. Лапластың аймақтық және интегралдық теоремасы. Тәжірибенің қайталануы. Пуассона формуласы.
6. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.
7. Интегралдық үлестірім функциясы. Үлестірім тығыздығы.
8. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың математикалық үміті, дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы.
9. Биномдық үлестірім, Пуассон үлестірімі. Бірқалыпты және көрсеткіштік үлестірім, сенімділік функциясы.
10. Қалыпты үлестірім.
11. Шектік теоремалар туралы ұғым. Үлкен сандар заңы, орталық шектік теорема.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Жәшікте үш сұрыпты өнім бар: n_1 - бірінші, n_2 - екінші сұрыпты өнім, n_3 - үшінші сұрыпты өнім ($\sum_i^3 n_i = n$).

Табу керек:

а) бірінші сұрыпты өнімнің қатысты жиілігін;

б) таңдап алынған m өнімнің барлығы бірінші сұрыпты болу ықтималдығын;

в) таңдап алынған m өнімнің ішінде m_1-і бірінші сұрыпты болу ықтималдығын;

г) таңдап алынған m өнімнің ішінде m_1-і бірінші сұрыпты, m_2-і екінші сұрыпты, m_3-і үшінші сұрыпты ($\sum_i^3 m_i = m$) болу ықтималдығын;

д) таңдап алынған m өнімнің ішінде ең болмағанда біреуі бірінші сұрыпты болу ықтималдығын.

№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
1.1	20	26	24	2	1	2	1.16	41	29	30	5	3	2
1.2	40	20	15	4	1	3	1.17	29	21	40	6	4	2
1.3	35	30	20	2	1	2	1.18	25	35	25	2	2	3
1.4	20	40	30	2	2	3	1.19	18	42	20	1	2	2
1.5	30	45	12	3	2	3	1.20	43	27	25	3	4	2
1.6	25	55	20	8	3	4	1.21	22	28	20	2	4	3
1.7	40	24	26	4	3	2	1.22	30	21	29	3	1	1
1.8	28	42	25	3	5	2	1.23	42	20	28	1	3	2
1.9	30	15	40	2	2	3	1.24	24	26	25	2	4	2
1.10	17	33	40	1	3	2	1.25	37	33	30	2	3	5
1.11	31	25	29	2	2	1	1.26	26	34	30	3	2	3
1.12	28	32	15	1	2	2	1.27	31	29	20	1	2	2
1.13	30	41	29	3	4	2	1.28	29	31	35	3	2	3
1.14	32	28	20	3	2	2	1.29	34	26	36	4	1	2
1.15	24	26	35	1	3	1	1.30	25	35	29	1	2	2

2. Қондырғы бір бірінен тәуелсіз жұмыс істейтін түйіннен тұрады. Мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығы бірінші, екінші, үшінші түйін үшін сәйкес p_1, p_2, p_3. Келесі оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

а) үш түйін мүлтіксіз жұмыс істейді (A оқиғасы);

б) тек бір түйін мүлтіксіз жұмыс істейді (B оқиғасы);

в) екі түйін мүлтіксіз жұмыс істейді, біреуі істен шығады (C оқиғасы);

г) ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істейді (D оқиғасы).

№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3	№	p_1	p_2	p_3
2.1	0.9	0.6	0.5	2.11	0.5	0.9	0.4	2.21	0.5	0.7	0.9
2.2	0.8	0.7	0.6	2.12	0.7	0.8	0.5	2.22	0.6	0.5	0.8
2.3	0.7	0.5	0.8	2.13	0.5	0.7	0.6	2.23	0.7	0.9	0.7
2.4	0.6	0.9	0.8	2.14	0.4	0.6	0.7	2.24	0.8	0.4	0.6
2.5	0.5	0.7	0.9	2.15	0.5	0.5	0.8	2.25	0.9	0.5	0.5
2.6	0.9	0.6	0.8	2.16	0.6	0.9	0.5	2.26	0.4	0.6	0.8
2.7	0.8	0.5	0.7	2.17	0.7	0.8	0.6	2.27	0.5	0.7	0.9
2.8	0.5	0.8	0.6	2.18	0.8	0.5	0.7	2.28	0.6	0.8	0.7
2.9	0.6	0.9	0.5	2.19	0.9	0.6	0.8	2.29	0.7	0.9	0.5
2.10	0.7	0.9	0.4	2.20	0.9	0.4	0.9	2.30	0.8	0.9	0.4

3. Дүкенге үш зауыттан бұйымдар әкелінді: n_1 бірінші зауыттан, n_2 екіншіден, n_3 үшіншіден ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші зауыттан m_1% сапасыз бұйым бар, екіншісінде - m_2%, үшіншісінде - m_3%.

Табу керек:

а) кез келген ретпен алынған бұйымның сапасыз болу ықтималдығын табу керек;

б) кез келген ретпен алынған бұйымның сапасыз болып шықты. Осы бұйымның i – ші зауыттан болу (i =1,2,3) ықтималдығын.

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
3.1	520	220	5	8	7	1	3.16	100	250	7	8	5	1
3.2	270	410	10	5	9	2	3.17	430	180	5	4	7	2
3.3	250	140	8	7	4	2	3.18	170	540	6	5	8	3
3.4	190	380	5	9	30	1	3.19	650	120	10	9	8	2
3.5	290	610	6	3	3	2	3.20	400	180	7	10	5	1
3.6	270	430	10	6	4	2	3.21	120	380	10	6	9	2
3.7	280	360	7	10	9	1	3.22	270	340	9	5	4	3
3.8	520	110	5	7	10	1	3.23	430	120	10	7	6	2
3.9	240	290	9	8	4	3	3.24	360	120	5	10	8	1
3.10	310	410	7	2	5	3	3.25	420	210	8	7	6	1
3.11	520	110	3	6	7	2	3.26	370	130	10	6	5	2
3.12	280	310	9	8	4	2	3.27	410	200	5	10	8	3
3.13	400	320	4	5	8	1	3.28	280	510	10	6	5	3
3.14	350	240	9	8	7	1	3.29	710	120	2	10	4	3
3.15	190	520	5	2	4	3	3.30	460	240	5	9	7	1

4. n сынақ өткізілді (a варианты үшін n=10; b варианты үшін n=100). Әр сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы p-ға тең. n сынақта осы оқиға:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы);

б) k_1-ден артық емес (B оқиғасы);

в) k_2-ден кем емес (C оқиғасы);

г) ең болмағанда бір рет (D оқиғасы) (a варианты үшін);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (E оқиғасы) (b варианты үшін) болу ықтималдығын табу керек.

№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p
4.1	a	2	5	0.9	4.11	a	4	6	0.5	4.21	a	2	6	0.3
	b	80	90			b	75	95			b	40	60	
4.2	a	3	7	0.8	4.12	a	5	8	0.6	4.22	a	3	7	0.2
	b	85	95			b	20	60			b	35	70	
4.3	a	4	8	0.7	4.13	a	3	8	0.7	4.23	a	4	7	0.3
	b	70	95			b	30	85			b	50	80	
4.4	a	3	5	0.6	4.14	a	2	4	0.8	4.24	a	5	7	0.4
	b	60	95			b	40	75			b	40	65	
4.5	a	2	7	0.5	4.15	a	4	9	0.9	4.25	a	3	5	0.5
	b	50	90			b	80	95			b	45	75	
4.6	a	4	6	0.4	4.16	a	3	9	0.8	4.26	a	2	4	0.6
	b	65	75			b	50	95			b	30	80	
4.7	a	5	9	0.3	4.17	a	1	3	0.7	4.27	a	2	8	0.7
	b	55	80			b	65	85			b	40	90	
4.8	a	4	7	0.2	4.18	a	2	6	0.6	4.28	a	1	4	0.8
	b	40	80			b	50	70			b	25	70	
4.9	a	2	8	0.3	4.19	a	2	4	0.5	4.29	a	4	7	0.9
	b	65	80			b	55	75			b	35	90	
4.10	a	3	6	0.4	4.20	a	3	5	0.4	4.30	a	4	6	0.9
	b	20	85			b	45	80			b	10	60	

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

Табу керек:

а) үлестірім функциясын $F(x)$, оның сызбасын салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
5.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		

5.3	*X*	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
5.4	*X*	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
5.5	*X*	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		
6.6	*X*	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
5.7	*X*	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
5.8	*X*	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
5.9	*X*	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
5.10	*X*	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
5.11	*X*	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
5.12	*X*	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
5.13	*X*	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
5.14	*X*	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
5.15	*X*	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		
5.16	*X*	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
5.17	*X*	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
5.18	*X*	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
5.19	*X*	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
5.20	*X*	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
5.21	*X*	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
5.22	*X*	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
5.23	*X*	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
5.24	*X*	0	1	3	5	7	8	2	6

	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
5.25	*X*	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
5.26	*X*	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.27	*X*	1	3	4	5	7	8	2	6
	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
5.28	*X*	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
5.29	*X*	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
5.30	*X*	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығы мен $f(x)$ берілген. Табу керек:

а) $F(x)$ үлестірім функциясын;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек. $F(x)$ және $f(x)$ сызбаларын салу керек.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
6.1	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \dfrac{x}{8}, 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	6.16	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > 3 \\ \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right),\ 0 < x \le 3 \end{cases}$	-1	2
6.2	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > -2 \\ \dfrac{6}{x^2}, -3 < x \le -2 \end{cases}$	-2,5	0	6.17	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\dfrac{\pi}{12}$
6.3	$\begin{cases} 0, x \le -\dfrac{\pi}{2}, x > \dfrac{\pi}{2} \\ 0,5\cos x, -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	6.18	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ \dfrac{2}{x^2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
6.4	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	6.19	$\begin{cases} 0,\ x \le 2, x > 3 \\ \dfrac{2x}{5},\ 2 < x \le 3 \end{cases}$	1	2,5
6.5	$\begin{cases} 0,\ x \le 0, x > \pi/2 \\ \cos x,\ 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	6.20	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1

6.6	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ 0{,}5\sin x, 0 < x \le \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$	6.21	$\begin{cases} 0,\ x \le -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2,\ -1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
6.7	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	1	2	6.22	$\begin{cases} 0, x \le 0, x \ge \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1
6.8	$\begin{cases} 0,\ x \le 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9},\ 4 < x \le 5 \end{cases}$	3	4,5	6.23	$\begin{cases} 0, x \le 3, x > 5 \\ \frac{7{,}5}{x^2}, 3 < x \le 5 \end{cases}$	2	4
6.9	$\begin{cases} 0, x \le \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \frac{\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	6.24	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
6.10	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	1,5	2	6.25	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 2 \\ 2x-2, 1 < x \le 2 \end{cases}$	0	1,5
6.11	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	6.26	$\begin{cases} 0, x \le -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \le 2 \end{cases}$	0	1
6.12	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \le 4 \end{cases}$	1	3	6.27	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \le 5 \end{cases}$	1	4
6.13	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$	-1	1	6.28	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$
6.14	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \le 1 \end{cases}$	0,2	1,2	6.29	$\begin{cases} 0, x \le -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \le 3 \end{cases}$	0	2
6.15	$\begin{cases} 0, x \le 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	6.30	$\begin{cases} 0, x \le 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \le 4 \end{cases}$	2	3

7. Таңдап алынған N шардың m% ақ түсті. Таңдап алынған шарлардың арасында ақ түсті шарлар санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

№	N	m	№	N	m	№	N	m
7.1	3	10	7.11	4	15	7.21	3	11

7.2	2	12	7.12	5	13	7.22	2	16
7.3	4	20	7.13	3	14	7.23	4	29
7.4	5	25	7.14	2	20	7.24	5	10
7.5	3	30	7.15	4	27	7.25	3	17
7.6	2	10	7.16	5	20	7.26	2	21
7.7	4	15	7.17	3	19	7.27	4	22
7.8	5	17	7.18	2	23	7.28	5	24
7.9	3	12	7.19	4	11	7.29	3	18
7.10	2	15	7.20	5	28	7.30	2	22

8. Өнім N элементтен тұрады. Бір элементтің бір жыл бойына істен шығу ықтималдығы p-ға тең және қалған элементтердің жағдайынан тәуелсіз.

Табу керек:

а) істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек;

б) жылына m-нен кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы қандай?

№	N	m	p	№	N	m	p	№	N	m	p
8.1	2000	4	0,001	8.11	1500	6	0,005	8.21	1000	6	0,005
8.2	1000	5	0,007	8.12	4000	2	0,006	8.22	4500	2	0,003
8.3	3000	7	0,004	8.13	8000	2	0,001	8.23	2000	4	0,001
8.4	2000	5	0,002	8.14	6500	6	0,002	8.24	1000	5	0,007
8.5	1000	6	0,005	8.15	3000	2	0,005	8.25	3000	7	0,004
8.6	5000	2	0,001	8.16	1500	3	0,002	8.26	2000	5	0,002
8.7	2000	4	0,001	8.17	2000	4	0,001	8.27	1000	6	0,005
8.8	1500	5	0,008	8.18	1000	5	0,007	8.28	6500	8	0,007
8.9	3500	7	0,004	8.19	3500	1	0,002	8.29	7000	6	0,002
8.10	2000	2	0,003	8.20	2000	5	0,001	8.30	5500	9	0,004

9. а) 1-15 нұсқалары.

Өлшегіш құрал бағасы a-ға тең бөлікке бөлінген. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептегенде m-нен кем (артық) қате кету ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ сызбаларын салу керек.

б) 16 – 30 нұсқалары.

Қандай да бір маршруттың автобусы тек кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы a минут. X кездейсоқ шамасы – автобусты күту уақыты.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын *f*(*x*);

б) үлестірім функциясын *F*(*x*);

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) аялдамаға келген жолаушы автобусты ы *m* минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

F(*x*) және *f*(*x*) сызбаларын салу керек.

№	*a*	*m*	№	*a*	*m*	№	*a*	*m*
9.1	0,2	0,04	9.11	0,3	0,08	9.21	19	8
9.2	0,3	0,02	9.12	0,6	0,01	9.22	20	5
9.3	0,1	0,06	9.13	0,9	0,06	9.23	25	5
9.4	0,5	0,01	9.14	0,5	0,05	9.24	9	3
9.5	0,6	0,05	9.15	0,8	0,07	9.25	14	7
9.6	0,9	0,02	9.16	5	3	9.26	18	9
9.7	0,1	0,08	9.17	10	4	9.27	24	8
9.8	0,7	0,01	9.18	15	5	9.28	6	3
9.9	0,4	0,06	9.19	6	2	9.29	12	6
9.10	0,5	0,07	9.20	20	10	9.30	16	8

10. Элементтің мүлтіксіз жұмыс істеу уақыты (*T* кездейсоқ шамасы) λ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын *f*(*t*);

б) үлестірім функциясын *F*(*t*), оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын *R*(*t*), оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) элементтің *t* уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің *t* уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын.

F(*t*), *R*(*t*) және *f*(*t*) сызбаларын салу керек.

№	λ	*t*	№	λ	*t*	№	λ	*t*
10.1	1	5	10.11	2	5	10.21	3	8
10.2	2	10	10.12	3	10	10.22	4	4
10.3	3	6	10.13	4	6	10.23	6	3
10.4	4	8	10.14	6	8	10.24	7	2
10.5	6	4	10.15	7	4	10.25	8	1
10.6	7	3	10.16	8	3	10.26	9	10
10.7	8	2	10.17	9	2	10.27	10	6
10.8	9	1	10.18	10	1	10.28	1	7

10.9	10	7	10.19	1	10	10.29	2	8
10.10	1	9	10.20	2	6	10.30	3	2

11. Қандай да бір өнімді өлшеу жүргізілді. Өнімнің өлшемінің номиналдан кездейсоқ ауытқуы (X кездейсоқ шамасы) a және σ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(\alpha;\beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ-дан аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ сызбаларын салу керек.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
11.1	10	1	8	14	2	11.16	10	2	9	14	2
11.2	12	2	7	14	3	11.17	12	4	5	14	3
11.3	14	3	10	15	5	11.18	14	1	9	15	5
11.4	11	5	9	12	3	11.19	11	6	8	12	3
11.5	13	2	6	13	2	11.20	13	4	6	17	2
11.6	12	3	7	15	4	11.21	12	9	8	15	4
11.7	10	2	8	17	2	11.22	10	3	6	17	2
11.8	12	4	6	14	6	11.23	12	5	6	13	6
11.9	14	6	11	19	5	11.24	14	2	12	19	5
11.10	15	5	8	12	3	11.25	15	3	4	12	3
11.11	17	4	6	14	2	11.26	17	1	5	14	2
11.12	12	5	7	18	4	11.27	12	4	9	18	4
11.13	18	5	6	12	3	11.28	11	3	4	12	3
11.14	10	4	6	15	2	11.29	17	2	5	19	5
11.15	12	3	5	18	4	11.30	13	5	6	18	3

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. Жәшікте үш сұрыпты өнімдер бар: 40 - бірінші, 50 – екінші, 30 – үшінші сұрыпты өнімдер (барлығы 120 өнім).

Табу керек:

а) бірінші сұрыпты өнімнің қатысты жиілігін;

б) 20 алынған өнімнің барлығы бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын;

в) 20 алынған өнімнің 9 бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын;

г) алынған 20 шарлар арасында 9- бірінші, 6 - екінші, 5 - үшінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын табу керек;

д) алынған 20 шарлардың ішінде ең болмағанда біреуі бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын.

Шешуі:

а) A оқиғасының қатысты жиілігі деп (белгіленуі $P^*(A)$) A оқиғасы пайда болған сынақ санының m барлық сынақтың жалпы санына n қатынасы айтылады: $P^*(A) = m/n$.

A оқиғасы– бірінші сұрыпты өнім таңдау болсын, онда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$;

Қалған пункттерінде ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/n$, мұндағы m –A оқиғасының пайда болуына қолайлы сынақтар саны, n – сынақтардың жалпы саны;

б) A – 20 алынған өнімнің барлығы бірінші сұрыпты өнім болсын. Элементар оқиғалардың жалпы саны 120 өнім арасында 20 өнім таңдап алудың мүмкін әртүрлі тәсілдер санына тең, яғни $n = C_{120}^{20}$; қолайлы оқиғалар саны 40 өнім арасында 20 бірінші сұрыпты өнім алу жолдар санына тең, яғни $m = C_{40}^{20}$. Сонымен, $P(A) = m/n = C_{40}^{20}/C_{120}^{20} = 4{,}679 \times 10^{-12}$;

в) A –20 таңдап алынған өнім арасынан 9-ы бірінші сұрыпты өнім болсын. Жоғарыда айтылғандай, $n = C_{120}^{20}$. m - A оқиғасына қолайлы оқиғалар саны комбинаторика ережелерінің біреуімен табылады: n элементті жиында s ішкі жиын бар болсын. Ішкі жиындар сәйкес $n_1, n_2, ..., n_s$ элементтен тұрсын $(\sum_{1}^{s} n_i = n)$. Онда бұл жиыннан таңдау мына сұлба бойынша жүрсе: m_1 элементті n_1 элементтен, m_2 -ні n_2 элементтен,…, m_s-ті n_s элементтен таңдаса, онда $m_1, m_2, ..., m_s$ элементтен (әрқайсысында ретін ескермегенде) s тобының пайда болуының жалпы саны N мына формуламен есептелінеді: $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_s}^{m_s}$.Сонымен, біздің жағдайда $m = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11}$, мұнда C_{40}^{9}- 40 бірінші сұрыпты өнім арасынан 9 бірінші сұрыпты өнім таңдап алудың әртүрлі мүмкін жағдайлар саны, ал C_{80}^{11} - 80 бірінші сұрыпты емес өнімнің арасынан 11 бірінші сұрыпты емес өнім таңдап алудың әртүрлі мүмкін жағдайлар саны. Олай болса, $P(A) = m/n = C_{40}^{9} \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0{,}097$;

г) A - алынған 20 өнімдер арасында 9- бірінші, 6 - екінші, 5 – үшінші сұрыпты өнім болу оқиғасы болсын. Бұл есепті шешу үшін A оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/n$, мұндағы n - 120 өнім арасында 20 бірінші бірінші сұрыпты өнім таңдап алудың мүмкін әртүрлі тәсілдер санына тең, яғни $n = C_{120}^{20}$. A оқиғасына қолайлы оқиғалар саны m жоғарыда келтірілген комбинаторика ережесі бойынша табылады, яғни $m = C_{40}^{9} \cdot C_{50}^{6} \cdot C_{30}^{5}$. $m = C_{40}^{9} \cdot C_{50}^{4} \cdot C_{30}^{5}$. Сондықтан $P(A) = m/n = 0{,}021$;

д) A - алынған 20 өнім ішінде ең болмағанда біреуі бірінші бірінші сұрыпты өнім болу оқиғасы болсын, онда қарама-қарсы оқиға $\overline{A}$ - алынған 20 өнімнің ішінде ешқайсысы бірінші сұрыпты өнім болмайды. б) жағдайындағы сияқты бұл оқиғаның ықтималдығын келесі формула бойынша есептейміз $P(\overline{A}) = m/ n = C_{80}^{20}/ C_{120}^{20} = 1{,}2\times 10^{-4}$. Онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A)=1-P(\overline{A})=1-1{,}2\times 10^{-4}\approx 1$, т.е. бұл оқиғаны ақиқат оқиға деуге болады.

Теру санын есептегенде Mathcad-та combin функциясы қолданылды. Төменде combin(Q,R) қолданушының C(Q,R) функциясы ретінде енгізілген файлдың көшірмесі келтірілген, ол Q мен R-дің кез келген мәндерінде орынды.

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$, $\quad C(80,11) = 1.048\times 10^{13}$,

$C(120,20) = 2.946\times 10^{22}$, $\quad C(40,20) = 1.378\times 10^{11}$,

$\dfrac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2\times 10^{-4}$, $\quad \dfrac{C(40,9)\cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097$,

$$\frac{C(40,9)\cdot C(50,6)\cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021$$

2. Қондырғы бір бірінен тәуелсіз жұмыс істейтін түйіннен тұрады. Мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығы бірінші, екінші, үшінші түйін үшін сәйкес 0,75, 0,8, 0,9. Келесі оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

а) үш түйін мүлтіксіз жұмыс істейді (A оқиғасы);

б) тек бір түйін мүлтіксіз жұмыс істейді (B оқиғасы);

в) екі түйін мүлтіксіз жұмыс істейді, біреуі істен шығады (C оқиғасы);

г) ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істейді (D оқиғасы).

Шешуі: A_1 – бірінші, A_2 – екінші, A_3 – үшінші түйіннің мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын. Шарт бойынша $P(A_1)$=0,75, $P(A_2)$=9,8, $P(A_3)$=0,9.

а) A - үш түйіннің мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болғандықтан, онда $A = A_1A_2A_3$.

A_1, A_2, A_3 тәуелсіз оқиғалар болғандықтан, онда

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = = 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}54$;

б) B - тек бір түйін мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын, сондықтан $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, мұндағы $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$- A_1, A_2, A_3 оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалар, яғни сәйкес бірінші, екінші, үшінші түйіннің жұмыс істемеуі. $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ болғандықтан және оқиғалар тәуелсіз болғандықтан, онда $P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}75\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 =$ 0,08;

в) C - екі түйіннің мүлтіксіз жұмыс істеу, ал біреуі істен шығу оқиғасы болсын, яғни $C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3$. Оның ықтималдығы: $P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}3456$;

г) D - ең болмағанда біреуі мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын. Қарама-қарсы оқиғаны қарастырамыз: $\overline{D}$ - үшеуі де жұмыс істемейді. $\overline{D} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$ болғандықтан, $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}995$.

3. Дүкенге үш зауыттан бұйымдар әкелінді: 100 бірінші зауыттан, 300 екіншіден, $n_3 = 1000 - n_1 - n_2 = 600$ үшіншіден. Бірінші зауыттан 5% сапасыз бұйым бар, екіншісінде - 4%, үшіншісінде - 6%.

Табу керек:

а) кез келген ретпен алынған бұйымның сапасыз болу ықтималдығын табу керек;

б) кез келген ретпен алынған бұйымның сапасыз болып шықты. Осы бұйымның екінші зауыттан болу (i =1,2,3) ықтималдығын.

Шешуі: A – дүкеннен кез келген ретпен алынған бұйымның сапасыз болу оқиғасы болсын, ал B_1, B_2, B_3 – бұйым сәйкес бірінші, екінші, үшінші париядан алынған оқиғалары болсын (бұл оқиғалар гипотезалар деп аталады).

а) A оқиғасының ықтималдығы толық ықтималдықтар формуласымен есептелінеді: $P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$, мұндағы $P(A/B_i)$ – сатып алынған лампа i– ші партиядан алынған оқиғасының шартты ықтималдығы (i=1,2,3). Есептің шарты бойынша:
$P(B_1)$ = 100/1000 = 0,1; $P(B_2)$ = 300/1000 = 0,3; $P(B_3)$ = 600/1000 = 0,6; $P(A/B_1)$=0,05; $P(A/B_2)$=0,04; $P(A/B_3)$=0,06. Сондықтан $P(A)$ = $0.1 \cdot 0.05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}06 = 0{,}053$;

б) бұл пунктте $P(B_2/A)$ шартты ықтималдығын табу керек. Ол үшін Байес формуласын қолданамыз:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}, \; i = 1,2,\ldots,n,$$

біздің есеп үшін ол былай жазылынады

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2 / A)P(A/B_2)}{\sum\limits_{k=1}^{3} P(B_k)P(A/B_k)}$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}04}{0{,}053} = 0{,}226.$$

4. n сынақ өткізілді (a варианты үшін n=10; b варианты үшін n=100). Әр сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,8-ге тең. n сынақта осы оқиға:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы);

б) k_1-ден артық емес (B оқиғасы);

в) k_2 -ден кем емес (C оқиғасы);

г) ең болмағанда бір рет (D оқиғасы) (a варианты үшін);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (E оқиғасы) (b варианты үшін) болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: бұл есепте қандай да бір оқиғаның n тәуелсіз оқиғалар арасынын k рет пайда болу ықтималдығын бар формулалары қолданылады, ол $P_n(k)$ деп белгіленеді. Есептің шартына байланысты оны анықтау әртүрлі жолмен жүргізіледі:

1) n =10, k_1=9, k_2=2 болсын (тақ нұсқалар үшін). Бұл жерде n үлкен емес, сондықтан A оқиғасының ықтималдығын анықтау үшін Бернулли формуласын қолданамыз: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $q=1-p$, $(k=0,1,2,..n)$.

B және C оқиғаларының ықтималдығы ықтималдықтардың қосындысы ретінде анықталады: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$ – бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен кем емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе k рет, немесе $k+1$ рет,…, немесе n рет; $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$– бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен артық емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе 0 рет, немесе 1 рет, немесе 2 рет,…, немесе k рет. Бұл оқиғалар кумулятивті (жинақталған) деп аталады. Сонымен,

а) $P(A)=P_{10}(2)=C_{10}^2 0{,}8^2 0{,}2^8=0{,}000074$;

б) $P(B)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)=0{,}000078$;

в) $P(C)=P_{10}(9)+P_{10}(10)=0{,}376$;

г) D оқиғасына қарама қарсы $\overline{D}$ оқиғасын енгіземіз – бұл 10 тәуелсіз сынықтарда D оқиғасының мүлдем пайда болмауы. Онда

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P_{10}(0)\approx 0{,}566.$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$,

$C(10,2)\cdot 0.8^2\cdot 0.2^8 = 7.373\times 10^{-5}$

$C(10,9)\cdot 0.8^9\cdot 0.2^1 + C(10,10)\cdot 0.8^{10}\cdot 0.2^0 = 0.376$

$C(10,0)\cdot 0.8^0\cdot 0.2^{10} + C(10,1)\cdot 0.8^1\cdot 0.2^9 + C(10,2)\cdot 0.8^2\cdot 0.2^8 = 7.793\times 10^{-5}$

$1 - C(10,0)\cdot 0.8^0\cdot 0.2^{10} = 1$

д) n =100, k_1=70, k_2=80 болсын (жұп нұсқалар үшін). тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәжірибеде k рет пайда болу ықтималдығы $P_n(k)$ Муавр-Лаплас аймақтық теоремасымен есептелінеді және жуық шамамен $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ тең, мұндағы $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ (осы функцияның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі dnorm функциясы арқылы табады).

B, C және E оқиғаларының ықтималдығын анықтау үшін Муавр-Лаплас интегралдық теоремасын қолданады: қандай да бір оқиғаның пайда болу k саны k_1-ден k_2-ге дейінгі аралығында болу ықтималдығы $P_n(k_1,k_2)$ жуық шамамен $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ тең, мұндағы $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ - Лаплас функциясы, оның мәні арнайы кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі pnorm функциясы арқылы.

а) $P(A)$= $P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\varphi(2{,}5) = 0{,}018/4 = 0{,}0045$; $x = \frac{70 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}$=-2,5;

б) $P(B)$= $P_{100}(k \le 70) = P_{100}(0{,}70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0{,}006$; $x_1 = -2{,}5$, $x_4 = -20$;

в) $P(C)$= $P_{100}(k \ge 80) = P_{100}(80{,}100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}5$; $x_3 = 5$;

д) $P(E)$= $P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}494$, $x_2 = 0$.

Mathcad жүйесіндегі есептелінген есептеулер көрсетілген.

$n := 100$, $k1 := 70$, $k2 := 80$,

$p := 0.8$, $q := 1 - p$,

$x1 := \frac{k1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x2 := \frac{k2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x3 := \frac{n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x4 := \frac{0 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$,

$x1 = -2.5$, $x2 = 0$, x3=5, x4 = -20

$\mathrm{pnorm}(x2,0,1) - \mathrm{pnorm}(x1,0,1) = 0.494$, $\mathrm{dnorm}(x1,0,1) = 0.018$

$\mathrm{pnorm}(x3,0,1) - \mathrm{pnorm}(x2,0,1) = 0.5$,

$\mathrm{pnorm}(x1,0,1) - \mathrm{pnorm}(x4,0,1) = 6.21 \times 10^{-3}$,

или другой вариант

$\Phi(x) := \mathrm{pnorm}(x,0,1) - 0.5$,

$P(k1,k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$.

$\Phi(x1) = -0.494$, $\Phi(x2) = 0$,

$P(k1,k2) = 0.494$,

$\Phi(x3) = 0.5$, $\Phi(x4) = -0.5$,

$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5$, $\Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$.

Ескерту: $P_n(k)$ ықтималдығын есептейтін тағы бір формула белгілі, ол n үлкен шама, p кіші шама, ал олардың көбейтіндісі $\lambda = n \cdot p$ үлкен емес сан болғанда қолданылады. Ол Пуассон формуласы $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

n=1000, k=6, p=0,003, $\lambda = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$ болсын. Сондықтан $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6!$=0,05.

Есептеулер кезінде $p(k,\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ функциясының кестелік мәнін немесе Mathcad-тан dpois функциясын қолдануға болады. Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda)$ $p(6,3) = 0.05$

$p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda)$.

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Табу керек:

а) үлестірім функциясын $F(x)$, оның сызбасын салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X–тің (15;45) интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

а) X кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясы (интегралдық үлестірім функциясы) X<x оқиғасының ықтималдығын анықтайды. Дискретті кездейсоқ шамасы $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i = \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$ формуласымен есептелінеді, мұндағы $x_i < x$ үшін қосу барлық i бойынша жүргізіледі.

Сонымен:

- егер $x \le 0$, онда $F(x) = P(X < 0) = 0$;

- егер $0 < x \le 10$, онда $F(x) = P(X = 0) = 0{,}05$;

- егер $10 < x \le 20$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$;

- егер $20 < x \le 30$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) =$ $= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;

- егер $30 < x \le 40$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) =$ $= 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$;

- егер $40 < x \le 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) +$ $+ P(X = 40) = 0{,}75 + 0{,}2 = 0{,}95$;

- егер $x > 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30)$ +
$+ P(X = 40) + P(X = 50) = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$.

Сонымен, $F(x) = \begin{cases} 0, \ \text{егер} \ x \le 0 \\ 0{,}05, \ \text{егер} \ 0 < x \le 10 \\ 0{,}2, \ \text{егер} \ 10 < x \le 20 \\ 0{,}5, \ \text{егер} \ 20 < x \le 30 \\ 0{,}75, \ \text{егер} \ 30 < x \le 40 \\ 0{,}95, \ \text{егер} \ 40 < x \le 50 \\ 1, \ \text{егер} \ x > 50 \end{cases}$;

Сызба Mathcad жүйесінде сызылған (төменде);

б) сандық сипаттамаларын табайық. Дискретті кездейсоқ шама үшін математикалық үміт кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерін оның ықтималдықтарына көбейтіп қосқанға тең: $M(X) = \sum_i x_i p_i$. Сондықтан
$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 10 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}25 + 40 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}05 = 25{,}5.$

X кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X) = M[X - M(X)]^2$ формуласымен немесе $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуласымен есептелінеді. Дискретті кездейсоқ шама үшін бұл формулалар мына түрде қолданылады: $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ немесе $D(X) = \sum_i x_i^{\,2} p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$. Орта квадраттық ауытқу $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ санына тең; дискретті кездейсоқ шаманың модасы (белгіленуі M_0) – осы кездейсоқ шаманың ең үлкен ықтималдықты қабылдайтын мәні; X –тің (a;b) интервалына түсу ықтималдығы $P(a;b) = F(b) - F(a)$ формуласымен есептелінеді. Біздің есеп үшін бұл шамалар:

D(x)=154,75; $\sigma(x) = \sqrt{154{,}75} = 12{,}44$; M_0=20;

$P(15;45) = F(45) - F(15)$=0,75.

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген, дисперсия екі формуламен де есептелінген.

ORIGIN = 1

$M := s^T \cdot p^T$ $s := (0 \ \ 10 \ \ 20 \ \ 30 \ \ 40 \ \ 50)$

$p := (0.05 \ \ 0.15 \ \ 0.3 \ \ 0.25 \ \ 0.2 \ \ 0.05)$

$M = 25.5$

$s0 := s^T - M$

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)}\right]^T \cdot p^T$

$D = 154.75$

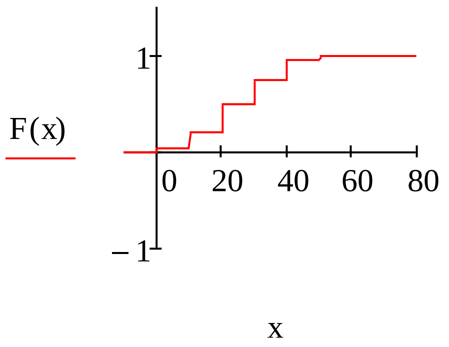
$s2 := \begin{pmatrix} 0^2 & 10^2 & 20^2 & 30^2 & 40^2 & 50^2 \end{pmatrix}$

$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2$

$D1 = 154.75$

$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$

$$F(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ 0.05 \ \text{ if } \ 0 < x \le 10 \\ 0.2 \ \text{ if } \ 10 < x \le 20 \\ 0.5 \ \text{ if } \ 20 < x \le 30 \\ 0.75 \ \text{ if } \ 30 < x \le 40 \\ 0.95 \ \text{ if } \ 40 < x \le 50 \\ 1 \ \text{ if } \ x > 50 \end{vmatrix}$$



$F(45) - F(15) = 0.75$

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығымен $f(x)$ берілген.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{егер} \ x \le 0 \\ \frac{2}{9}(3x - x^2), \ \textit{егер} \ 0 < x \le 3 \\ 0, \ \textit{егер} \ x > 3 \end{cases}.$$

Табу керек:

а) үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің (1; 4) интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ сызбаларын салу керек.

Шешуі:

а) үлестірім функциясын келесі формула бойынша табамыз $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Сонымен:

- егер $x \le 0$, то $f(x)=0$, Сондықтан $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$;

- егер $0 < x \le 3$, онда $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{2}{9}(3x-x^2)dx = -\ \frac{x^2(2x-9)}{27}$;

- егер $x > 3$, онда $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}(3x-x^2)dx + \int_{3}^{x} 0\,dx = 1$.

Сонымен, ізделінді үлестірім функциясы

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \textit{егер}\ x \le 0 \\ -\dfrac{x^2(2x-9)}{27}, \ \textit{егер}\ 0 < x \le 3; \\ 1, \ \textit{егер}\ x > 3 \end{cases}$$

б) үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары мына формулалармен табылады: математикалық үміт $M(x)=\int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия $D(x)=\int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x-M(x))^2 f(x)dx$ немесе $D(x)=\int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$ (интегралдау шектері кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері Ох осінің барлық немесе (a;b) интервалының мәндерін қабылдауына байланысты); орта квадраттық ауытқуы $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$; X кездейсоқ шаманың модасы деп үлестірім тығыздығы максималды болатын M_o мәні айтылады; X кездейсоқ шаманың медианасы деп кездейсоқ шама M_e-ден кем немесе артық болғанда ықтималдығы бірдей болатын M_e мәні айтылады, яғни $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0{,}5$.

Сонымен, біздің есепте $M(x)=\int_{0}^{3} 2/9x(3x-x^2)dx = 1{,}5$; $D(x)=\int_{0}^{3} x^2 \cdot 2/9(3x-x^2)dx - 1{,}5^2 = 0{,}45$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}45} = 0{,}671$.

Моданы табу үшін функцияның [0; 3] кесіндісіндегі максимумын табу керек $f(x)=2/9(3x-x^2)$. Ол үшін туынды тауып, нөлге теңестіреміз: $f'(x)=2/3-4x/9$, x=3/2 нүктесінде $f'(x)=0$, бұл кризистік нүкте. Функцияны экстремумға зерттейміз: $f'(1)>0$, $f'(2)<0$, Сонымен, x=3/2 нүктесінен ауысқанда функцияның туындысы таңбасын плюстен минуске өзгертеді, олай болса x=3/2 максимум нүктесі, сондықтан M_o=3/2. Егер *f(x)* сызықты функция болса, оның графигі түзу сызық болатыны белгілі. Онда функцияның максимумы *f(x)* графигі бойынша кесінді шекарасында және M_o нүктесінде ізделінеді.

Медиананы келесі шарттан табамыз $P(X < M_e) = 0,5$, мұндағы $P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e)$.

$P(0 < X < M_e) = \int_0^{M_e} 2/9(3x - x^2)dx = -M_e^{\ 2}(2M_e - 9)/27$ болғандықтан, $M_e^{\ 2}(2M_e - 9)/27 = 0,5$ теңдеуін шешіп, үш түбір аламыз, олардың біреуі берілген кесіндіге тиісті: $M_e = 1,5$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$f(x) := \frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right) \qquad \sqrt{\frac{9}{20}} = 0.671$$

$$\int_0^3 x\cdot f(x)\,dx \to \frac{3}{2} = 1.5 \qquad \int_0^3 x^2\cdot f(x)\,dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \to \frac{9}{20} = 0.45$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{2}{3} - \frac{4\cdot x}{9} \qquad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$\int_0^y f(x)\,dx \to -\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27} \qquad f1(x)\ \text{solve} \to \frac{3}{2}$$

$$f1(1) = 0.222 \qquad f1(2) = -0.222$$

$$-\frac{y^2\cdot(2\cdot y - 9)}{27} - 0.5\ \text{solve} \to \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

в) X–тің (1;4) интервалына түсу ықтималдығы $P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < 4) = \int_1^3 2/9(3x - x^2)dx + \int_3^4 0dx = 0,741$

немесе $P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \left(-\frac{1\cdot(2-9)}{27}\right) = \frac{20}{27} = 0,74.$

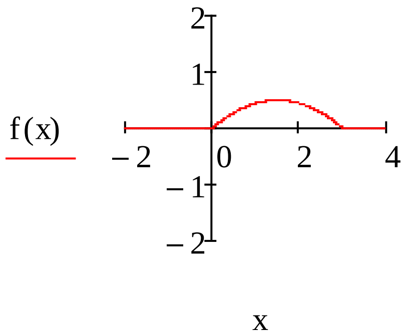
Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

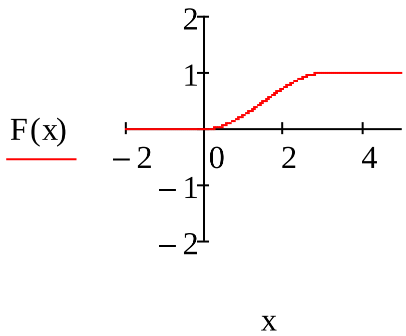
$$\int_1^3 f(x)\,dx \to \frac{20}{27} = 0.741 \qquad f2(x) := -\frac{x^2\cdot(2\cdot x - 9)}{27}$$

$$f2(1) = 0.259 \qquad 1 - 0.259 = 0.741$$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының сызбаларын Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \left[\frac{2}{9}\cdot\left(3\cdot x - x^2\right)\right] & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases} \qquad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \frac{x^2\cdot(9-2\cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$





7. Алты өнімді сенімділікке тексеру сынығы жүргізілуде. Әрбір өнімнің сынақты өтпеуінің ықтималдығы 25%-ды құрайды. Сынақты өтпеген өнім санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

Шешуі: дискретті кездейсоқ шама X – сынақты өтпеген өнім саны. Оның мүмкін мәндері: $x_1 = 0$ (өнімдер сынақты өтті), $x_2 = 1$ (бір өнім сынақты өтпеді) және с.с. $x_7 = 6$ (алты өнім сынақты өтпеді). Мүмкін мәндер тәуелсіз және олардың әрқайсысының пайда болуы бірдей p=0,25, сондықтан X кездейсоқ шамасы бином заңы бойынша үлестірілген: $P(X=k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $k = 0,1,2,\ldots,6$, $q = 1-p$, $n = 6$.

Олай болса, $P(X=0) = P_6(0) = C_6^0 0{,}25^0 0{,}75^6 = 0{,}178$;

$P(X=1) = P_6(1) = C_6^1 0{,}25^1 0{,}75^5 = 0{,}356$; $P(X=2) = P_6(2) = C_6^2 0{,}25^2 0{,}75^4 = 0{,}297$;

$P(X=3) = P_6(3) = C_6^3 0{,}25^3 0{,}75^3 = 0{,}132$; $P(X=4) = P_6(4) = C_6^4 0{,}25^4 0{,}75^2 = 0{,}033$;

$P(X=5) = P_6(5) = C_6^5 0{,}25^5 0{,}75^1 = 0{,}004$; $P(X=6) = P_6(6) = C_6^6 0{,}25^6 0{,}75^0 = 0{,}0002$.

Ізделінді үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Бином үлестірімінің сандық сипаттамаларын дискретті кездейсоқ шаманың белгілі формулалары бойынша алуға болады:

$M(X)=\sum_i x_i p_i$, $D(X)=\sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ или $D(X)=\sum_i x_i{}^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Алайда, математикалық үміт пен дисперсияның қасиеттерін қолданған қолайлы, егер X – оқиғасының n сынақта пайда болуы: $M(X)=np$, $D(X)=npq$. Біздің жағдайда $M(X)=6\cdot 0{,}25=1{,}5$, $D(X)=6\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75=1{,}125$. $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}06$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$C(Q,R) := \mathrm{combin}(Q,R)$

$C(6,0)\cdot 0.25^{0}\cdot 0.75^{6} = 0.178$

$C(6,1)\cdot 0.25^{1}\cdot 0.75^{5} = 0.356$

$C(6,2)\cdot 0.25^{2}\cdot 0.75^{4} = 0.297$

$C(6,3)\cdot 0.25^{3}\cdot 0.75^{3} = 0.132$

$C(6,4)\cdot 0.25^{4}\cdot 0.75^{2} = 0.033$

$C(6,5)\cdot 0.25^{5}\cdot 0.75^{1} = 4.395\times 10^{-3}$

$C(6,6)\cdot 0.25^{6}\cdot 0.75^{0} = 2.441\times 10^{-4}$

Бином үлестірімінің талдауын Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі binom (dbinom, pbinom, qbinom, rbinom). Мысалы, dbinom(*k*,*n*,*p*) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

8. Өнім 1000 элементтен тұрады. Бір элементтің бір жыл бойына істен шығу ықтималдығы 0,001-ға тең және қалған элементтердің жағдайынан тәуелсіз.

Табу керек:

а) істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек;

б) жылына екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі:

а) дискретті кездейсоқ шама X – істен шыққан элементтер саны Пуассон заңымен үлестірілген (әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы p аз, ал n сынақ саны үлкен): $P(X=k)=P_n(k)\approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, мұндағы $\lambda = np = 1000\cdot 0{,}001 = 1$, $k=0,1,2,\ldots,1000$, $n=1000$.

Сонымен, $P(X=0)=P_{1000}(0)\approx \frac{1^0}{0!}e^{-1}=0{,}368$; $P(X=1)=P_{1000}(1)\approx \frac{1^0}{1!}e^{-1}=$ $0{,}368$; $P(X=2)=P_{1000}(2)\approx \frac{1^2}{2!}e^{-1}=0{,}184$;

$P(X=3)=P_{1000}(3)\approx\frac{1^3}{3!}e^{-1}0{,}061$, және т.с.с.

$P(X=10)=P_{1000}(10)\approx\frac{1^{10}}{10!}e^{-1}$=0,0000001 және т.с.с. Ізделінді үлестірім заңы:

X	0	1	2	3	…	10	…
p	0,368	0,368	0,184	0,061	…	0,0000001	…

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$p(k,\lambda) := \mathrm{dpois}(k,\lambda)$

$p(0,1) = 0.368$ $\quad p(4,1) = 0.015$

$p(1,1) = 0.368$ $\quad p(5,1) = 3.066\times 10^{-3}$

$p(2,1) = 0.184$ $\quad p(10,1) = 1.014\times 10^{-7}$

$p(3,1) = 0.061$ $\quad p(1000,1) = 0$

б) екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы келесі формуламен есептелінеді:

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)$ немесе

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$ = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.

Пуассон үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі pois (dpois, ppois, qpois, rpois). Мысалы, dpois(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

9. а) 1-15 нұсқалары.

Өлшегіш құрал бағасы 0,2-ге тең бөлікке бөлінген. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептегенде 0,04-тен кем (артық) қате кету ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X кездейсоқ шамасы – жуықтап есептеуде жіберілген қате екі бүтін бөліктеу арасында бірқалыпты жүргізілген; $b-a=0{,}2$ – X –тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы. Бірқалыпты үлестірімнің тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},\ \textit{егер}\ x\in(a,b)\\ 0,\ \textit{егер}\ x\notin(a,b)\end{cases}$$ формуласымен есептелінеді.

Үлестірім функциясы– $F(x)=\begin{cases} 0, \; егер\, x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \; егер\, a < x \le b; \\ 1, \; егер\, x > b \end{cases}$

Математикалық үміті және дисперсиясы – $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

(α,β) аралығына түсу ықтималдығы – $P(\alpha < X < \beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Біздің есеп үшін:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0,2}=5, \; егер\; x\in(0;0,2) \\ 0, \; егер\; x\notin(0;0,2) \end{cases}$;

б) $F(x)=\begin{cases} 0, \; егер\, x \le 0 \\ \dfrac{x}{0,2}=5x, \; егер\, 0 < x \le 0,2 \\ 1, \; егер\, x > 0,2 \end{cases}$;

в) $M(X)=\dfrac{0,2+0}{2}=0,1$; $D(X)=\dfrac{(0,2-0)^2}{12}=0,003$;

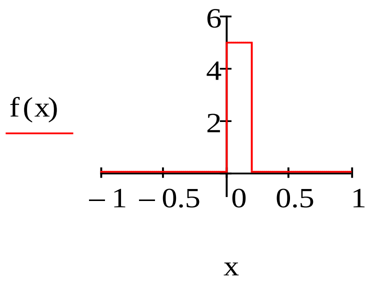
г) егер ол (0; 0,04) немесе (0,16; 0,2) аралығына түссе (A оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен кем қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

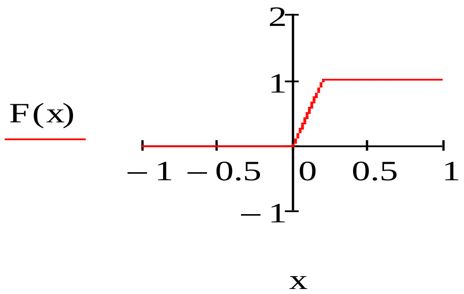
$$P(A)=P(0<X<0,04)+P(0,16<X<0,2)=\frac{0,04-0}{0,2}+\frac{0,2-0,16}{0,2}=0,4;$$

егер ол (0,04; 0,16) аралығына түссе (B оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен артық қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы $P(B)=P(0,04<X<0,16)=\dfrac{0,16-0,04}{0,2}=0,6$ немесе $P(B)=1-P(A)$.

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін саламыз.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \;\; \text{if} \;\; x \le 0 \\ 5 \;\; \text{if} \;\; 0 < x \le 0.2 \\ 0 \;\; \text{if} \;\; x > 0.2 \end{array} \right. \qquad F(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \;\; \text{if} \;\; x \le 0 \\ (5\cdot x) \;\; \text{if} \;\; 0 < x \le 0.2 \\ 1 \;\; \text{if} \;\; x > 0.2 \end{array} \right.$$





б) 16 – 30 нұсқалары.

Қандай да бір маршруттың автобусы тек кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы 5 минут. Х кездейсоқ шамасы – автобусты күту уақыты.

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) аялдамаға келген жолаушы автобусты ы 3 минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X кездейсоқ шамасы – автобусты күту уақыты тізбектей келген екі автобустың апрасында бірқалыпты үлестірілген.

(a,b) – X мүмкін мәндерін қабылдайтын интервал, $b-a=5$ –интервал ұзындығы. Бірқалыпты үлестірімнің барлық формулаларын алдыңғы 9а есептен қарасаңыз болады.

Біздің есеп үшін:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5}=0{,}2, \ егер\ x\in(0;5) \\ 0, \ \ егер\ x\notin(0;5) \end{cases};$

б) $F(x)=\begin{cases} 0, \ \ егер\ \ x\le 0 \\ \dfrac{x}{5}=0{,}2x, \ егер\ \ 0<x\le 5 \\ 1, \ егер\ \ x>5 \end{cases};$

в) $M(X)=\dfrac{5+0}{2}=2{,}5;\quad D(X)=\dfrac{(5-0)^2}{12}=2{,}08;$

г) жолушы автобусты 3 минуттен кем күту үшін ол аялдамаға (0; 3) уақыт интервалында немесе (2; 5) уақыт интервалында келсе де (A оқиғасы) бірдей, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы:

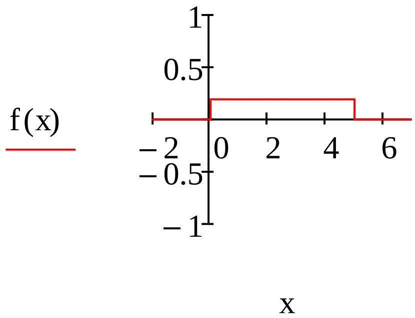
$$P(A)=P(0<X<3)=\frac{3-0}{5}=0{,}6;$$

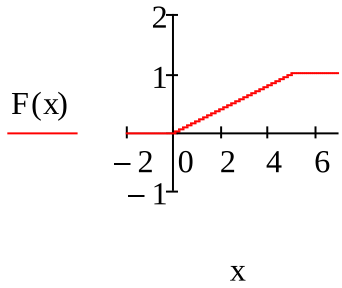
жолушы автобусты 3 минуттен артық күту үшін ол аялдамаға (0; 2) уақыт интервалында немесе (3; 5) уақыт интервалында келсе де (B оқиғасы) бірдей, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

$P(B) = P(3 < X < 5) = \dfrac{5-3}{5} = 0{,}4$ немесе $P(B) = 1 - P(A)$.

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ сызбаларын саламыз.

$$f(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ 0.2 \ \text{ if } \ 0 < x \le 5 \\ 0 \ \text{ if } \ x > 5 \end{vmatrix} \qquad F(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ x \le 0 \\ (0.2 \cdot x) \ \text{ if } \ 0 < x \le 5 \\ 1 \ \text{ if } \ x > 5 \end{vmatrix}$$





Бірқалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері unif: dunif(x,a,b)– үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері punif(x,a,b) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; runif(n,a,b) – (a,b) аралығында бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

10. Элементтің мүлтіксіз жұмыс уақыты (T кездейсоқ шамасы) $\lambda = 0{,}5$ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(t)$;

б) үлестірім функциясын $F(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;

г) математикалық үмітін, дисперсиясын;

д) элементтің t=5 сағат уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің t уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{егер} \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \textit{егер} \ x \ge 0 \end{cases}$ тығыздығымен берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңына бағынады. Көрсеткіштік үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{егер}\ x<0\\ 1-e^{-\lambda x},\ \ \text{егер}\ x\geq 0\end{cases}$$ - үлестірім функциясы; егер кездейсоқ шама $X=T$ – уақыты болса, онда $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ элементтің t уақытындағы істен шығуының ықтималдығы; $R(t)=P(T>t)=e^{-\lambda t}$ – сенімділік функциясы, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы;

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Біздің есепте $t\geq 0$ болатындығын ескерсек:

а) $f(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}$;

б) $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}5t}$, элементтің t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайды;

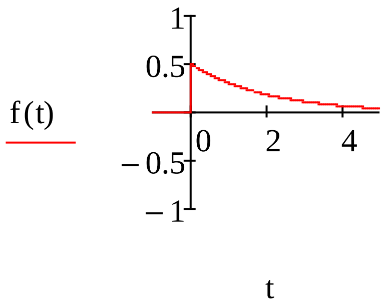
в) $R(t)=e^{-0{,}5t}$, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығын анықтайды;

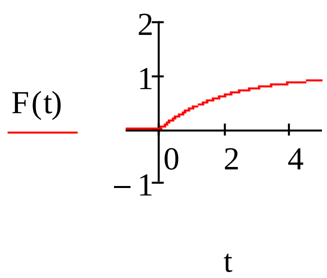
г) $M(X)=\dfrac{1}{0{,}5}=2$; $D(X)=\dfrac{1}{0{,}5^2}=4$;

д) үлестірім функциясы t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайтын болғандықтан, оған t=5 мәнін қойып, t=5 сағат уақыты ішіндегі істен шығуының ықтималдығын аламыз: $F(5)=1-e^{-0{,}5\cdot 5}=1-e^{-2{,}5}$=0,918; «элемент істен шығады» және «элемент істен шықпайды» оқиғалары – қарама-қарсы, сондықтан t=5 уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы 1-0,918=0,082. Бұл нәтижені сенімділік функциясын қолданып алуға болады: $R(5)=e^{-0{,}5\cdot 5}=e^{-2{,}5}$=0,082.

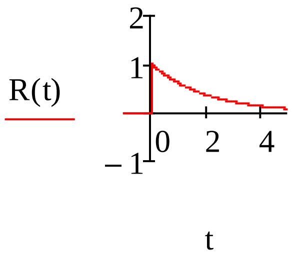
Mathcad жүйесінде $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салып, кейбір есептеулер жүргіземіз:

$$f(t):=\begin{vmatrix}0\ \ \text{if}\ \ t<0\\ 0.5\cdot e^{-0.5\cdot t}\ \ \text{if}\ \ t\geq 0\end{vmatrix}\qquad F(t):=\begin{vmatrix}0\ \ \text{if}\ \ t<0\\ 1-e^{-0.5\cdot t}\ \ \text{if}\ \ t\geq 0\end{vmatrix}$$





$$R(t):=\begin{vmatrix}0\ \ \text{if}\ \ t<0\\ e^{-0.5\cdot t}\ \ \text{if}\ \ t\geq 0\end{vmatrix}$$



$$e^{-2.5}=0.082$$

$$1-e^{-2.5}=0.918$$

Көрсеткіштік үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері exp: dexp(x,λ) – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pexp(x,λ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; rexp(n, λ) – λ параметрлі көрсеткішті үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

11. Қандай да бір өнімді өлшеу жүргізілді. Өнімнің өлшемінің номиналдан кездейсоқ ауытқуы (X кездейсоқ шамасы) a=10 және σ=2 параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(\alpha;\beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ=3-тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ тығыздығымен берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңына бағынады, мұндағы a =$M(x)$ – математикалық үміт, $\sigma=\sigma(X)$– орта квадраттық ауытқу. Қалыпты үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\dfrac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ немесе $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5$,

мұндағы $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – Лаплас функциясы, оның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесінде табуға болады;

$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$- $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығы ;

- $P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ - кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен δ-дан артық емес ауытқуының ықтималдығы.

Біздің есеп үшін:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-10}{2}\right)+0{,}5$;

в) $M(X)=a=10$, $\sigma(X)=\sigma=2$, $D(X)=\sigma^2=4$;

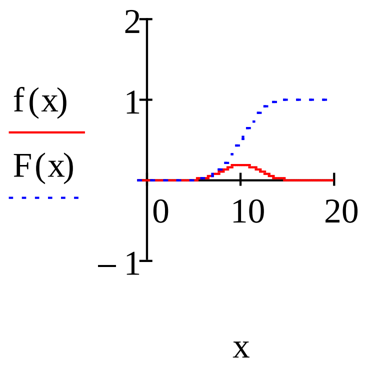
г) $P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1)$=0,4772-0,3413=0,1359;

д) $P(|X - 10| \le 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 2\Phi(1{,}5)$ =0,4332.

Лаплас функциясының мәні бұл жерде кестеден алынған, оны Mathcad жүйесінде де табуға болады.

Қалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері norm және *d, p, q, r*. әріптерінен басталатын сөздер. Мысалы, dnorm $(x,a,\ \sigma)$ – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері pnorm (x,a,σ) – үлестірім функциясының мәндерін шығарады. Осы функцияларды сәйкес графиктерді салу үшін қолданамыз. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген.

$f(x) := \mathrm{dnorm}(x, 10, 2)$ $\qquad$ $F(x) := \mathrm{pnorm}(x, 10, 2)$



Әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. –Алматы, 2006. – 184 бет.

2 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы, 2011.

3 Мұстахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). -Алматы, 2009. -358 бет.

4 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. – Алматы, 2005.

5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В070300 – Ақпараттар жүйесі мамандықтарының студенттері үшін дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБУ, 2013.- 49 б.

Мазмұны

2018 ж. қосымша жоспары, реті 9

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

5В070400- Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар
1 бөлім

Редактор Ж.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға_________ қол қойылды Пішімі 60x84 1/16
Таралымы 30 дана Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 1,9 баспа табақ Тапсырыс Бағасы 970 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126