Некоммерческое акционерное общество

Алматинский университет энергетики и связи

Кафедра электропривода и автоматизации промышленных установок

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Алматы 2014

Составители: П. И. Сагитов, Т.Д. Иманбекова. Теория автоматического управления. Конспект лекций для студентов специальности 5В071800 – Электроэнергетика. – Алматы: АУЭС, 2014. - 73 с.

Конспект лекций по дисциплине «Теория автоматического управления» разработан в соответствии с учебной программой и рассчитан для студентов специальности 5В071800 – Электроэнергетика.

Ил. 53, библиогр. - 15 - назв.

Рецензент: Курпенов Б.И.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014 г.

©НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014г.

Содержание

Введение 4
1 Лекция №1. Основные понятия, определения в теории автоматического управления. Функциональные схемы систем управления 5
2 Лекция №2. Статическое и астатическое регулирование 8
3 Лекция №3. Общие аналитические зависимости в САУ 12
4 Лекция №4. Применение преобразования Лапласа к ТАУ. Передаточные функция 16
5 Лекция №5. Частотные и логарифмические частотные характеристики 20
6 Лекция №6. Временные функции и временные характеристики. Основные типовые звенья систем автоматического управления 24
7 Лекция №7. Уравнения типовых звеньев и их характеристики 29
8 Лекция №8. Логарифмические характеристики типовых звеньев 33
9 Лекция №9. Структурные схемы и эквивалентные преобразования структурных схем 38
10 Лекция №10. Уравнения замкнутой и разомкнутой систем автоматического управления 42
11 Лекция №11. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Гурвица 45
12 Лекция №12. Частотные критерии устойчивости систем. Критерий устойчивости Михайлова и Найквиста 52
13 Лекция №13. Качество процессов регулирования в типовых режимах. Оценка качества регулирования в установившемся режиме 57
14 Лекция №14. Основы теории нелинейных САУ 61
15 Лекция №15. Основы синтеза линейных систем автоматического управления 68
Список литературы 73

Введение

Развитие современных средств измерительной и вычислительной техники привело к широкому применению систем автоматического управления в различных отраслях промышленности и сельского хозяйства.

Теория автоматического управления (ТАУ) является отраслью науки, которая рассматривает принципы построения систем автоматического управления и методы исследования процессов в этих системах.

Развитие ТАУ началось в период промышленной революции. Сначала это направление в науке разрабатывалось механиками для решения задач регулирования, т.е. поддержания заданного значения частоты вращения, температуры, давления в паровых машинах. Отсюда происходит название теория автоматического регулирования. Система автоматического регулирования называют совокупность устройств, взаимодействующих в процессе работы элементов, предназначенных для поддержания значения регулируемой величины в заданных пределах. Позднее выяснилось, что принципы управления можно применять не только в технике, но и в биологии, экономике.

Процессы управления и обработка информации в системах любой природы изучает кибернетика. Один из ее разделов, связанных с техническими системами, называется ТАУ. Теория управления является более общим термином, чем термин регулирование.

Объектом изучения ТАУ является автоматическая система управления. Предметом изучения ТАУ являются процессы происходящие в автоматической системе управления.

Целью дисциплины «Теория автоматического управления» является изучение принципов построения систем автоматического управления, изучение модели объектов во временной и частотной областях, методов анализа устойчивости линейных систем, оценки качеств процессов управления.

1 Лекция №1. Основные понятия, определения в теории автоматического управления. Функциональные схемы систем управления

Содержание лекции:

- основные понятия и определения автоматического управления;
- понятие о системах автоматического управления;
- понятие о системах регулирования;
- функциональные схемы систем управления;

Цель лекции:

- изучить основные понятия и определения;
- освоить основные принципы построения систем управления.

1.1 Основные понятия и определения

Управление – это процесс целенаправленного воздействия на объект управления для достижения поставленной цели, при условии наличия возмущений, препятсвующих ему. Управление связано со следующими понятиями:

- объект управления,
- цель управления,
- управляющее устройство,
- управляющее воздействие.

Объект, в котором протекает подлежащий управлению процесс, называется объектом управления. Для осуществления функции управления этим процессом применяются управляющие устройства.

Обеспечение всего комплекса возможных операций по управлению объектом без участия человека называется автоматическим управляющим устройством.

Объект управления и автоматически управляющее устройство во взаимодействии друг с другом образуют систему автоматического управления (САУ). Каждая система автоматического управления состоит из целого ряда звеньев, соединенных между собой. Звеном называют математическую модель элемента, соединения элементов или любую часть системы.

Частным случаем управления является регулирование. Параметры объекта, которые подлежат изменению или стабилизации называютя регулируемые параметры, а объекты в котором регулируются эти параметры – объектом регулирования.

Устройства, предназначенные для автоматического поддержания постоянного значения регулируемых параметров в различных объектах, или изменяющие регулируемые параметры по какому-либо требуемому закону называются автоматическими регуляторами. Сочетание объекта регулирование с автоматическим регулятором называется системой

автоматического регулирования САР. Регулируемый объект и автоматический регулятор являются элементами системы АР.

Системы автоматического управления подразделяются на системы стабилизации, системы программного управления, системы слежения.
Системы автоматического управления, поддерживающие постоянное значение управляемой величины, называются системами стабилизации. Их применяют для стабилизации различных физических величин.

Системы автоматического управления, в которых значение управляемой величины изменяется по заранее заданной программе, называются системами программного управления.

Системы автоматического управления, в которых закон изменения управляемой величины неизвестен, называются системами слежения. В таких системах управляемая величина должна с заданной точностью воспроизводить измеряемую величину или некоторую функцию измеряемой величины.

В зависимости от числа контуров, которые входят в САУ различают одноконтурные, многоконтурные системы. Простейшая система имеет один контур, одну цепь. Такая система называется одноконтурная. В более сложных системах сигнал проходит по несколько контурам. Такая система называется многоконтурной.

По виду сигналов системы делятся на непрерывные и дискретные.
Системой непрерывного действия называется такая система, в каждом звене которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины во времени.

Системой дискретного действия называется система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины, выходная величина изменяется дискретно.

Системы делятся на стационарные и нестационарные. Системы, в которых все параметры остаются постоянными, т.е. не изменяются во времени, называются стационарными. Системы, в которых параметры изменяются во времени, называются нестационарными.

САУ делятся на линейные и нелинейные. Линейной САУ называется такая система, все звенья которой описываются линейными уравнениями. Линейные системы подчиняются принципу суперпозиции. Нелинейной САУ называется такая система, в которой хотя бы в одном звене нарушаетя линейность характеристики или линейность уравнения.

1.2 Функциональные схемы систем управления

Всякая САУ состоит из двух основных элементов: объекта управления и управляющего устройства.

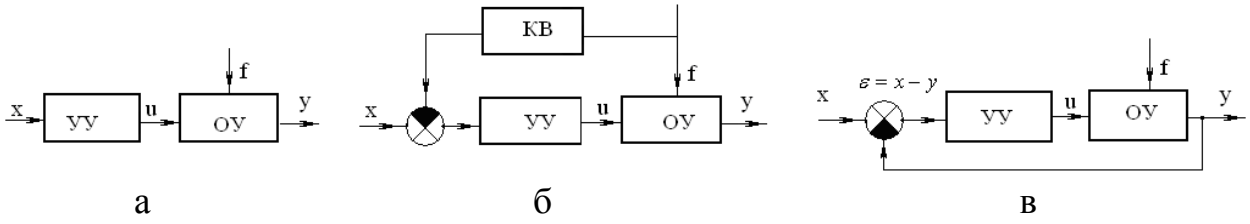
Для изображения системы автоматического управления применяются функциональные и структурные схемы. Функциональные схемы системы отражают взаимодействие устройств, узлов и элементов в процессе их работы.

Схематическое изображение отдельных элементов изображаются в виде прямоугольников.

Структурной схемой называют графическое изображение математической модели системы управления. Элементами структурной схемы являются звенья. Взаимосвязь между звеньями изображается линиями связи со стрелками, указывающими направление передачи сигнала. Над линией ставится условное обозначение сигнала. Точка на линии связи, в которой происходит разветвление линии, называется узлом.

В основе построения САУ лежат фундаментальные принципы управления: разомкнутого управления, компенсации, обратной связи.

Принцип разомкнутого управления. Простейшая функциональная схема системы автоматического управления с разомкнутой цепью управления показана на рисунке 1,а.



а б в

Рисунок 1- Структурные схемы разомкнутой (а,б) и замкнутой систем управления

На систему управления воздействуют как управляющие (задающие) воздействия x(t), так и различного рода помехи f(t), называемые возмущающими воздействиями, которые разрушают равновесие системы и изменяют значение управляющих параметров.

Управляющее устройство (УУ), получая информацию о цели управления в виде меняющегося во времени сигнала x(t), формирует управляющее воздействие u(t) на объект управления (ОУ) таким образом, чтобы управляемая величина y(t) менялась в соответствии с x(t) так, чтобы достигалась цель управления.

Воздействие передаются от входа к выходу, как показано стрелками. Это управление называется по разомкнутому типу. Здесь близость y(t) и x(t) обеспечивается только конструкцией. Несмотря на эти недостатки, этот принцип построения используется широко.

Принцип компенсации (управление по возмущению). Разновидностью разомкнутой САУ является разомкнутая система управления по возмущению. Если возмущающие воздействия велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования, то для поддержания постоянства выходной величины можно измерив возмущения, ввести коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования. Такой способ управления называется управлением по

возмущению. Функциональная схема управления по возмущению показана на рисунке 1,б.

Принцип обратной связи. Системы, работающие с замкнутой цепью воздействия, иначе называются системами с обратной связью. Связь, совпадающая с направлением распространения основного сигнала, от входа к выходу называется прямой, противоположная ей связь от выхода к входу называется обратной связью. В системе с обратной связью имеется замкнутый контур циркуляции сигналов, поэтому такие системы получили название замкнутых систем управления. Систему управления без обратной связи называют разомкнутой.

Функциональная схема системы с обратной связью управления показана на рисунке 1,в. в которой коррективы в алгоритм управления вносятся не непосредственно по значениям координат, а по их отклонениям $\varepsilon = x - y$. В замкнутых САУ выходная величина непрерывно измеряется и автоматически сравнивается с заданным значением для определения отклонения $\varepsilon(t)$. Это отклонение является входным воздействием для устройства управления. Схема представляет собой общий вид замкнутых систем.

Если сигнал обратной связи вычитается из входного сигнала $\varepsilon = x - y$, то обратную связь ее называют отрицательной обратной связью. Если сигнал обратной связи складывается с входным сигналом $\varepsilon = x + y$, то ее называют положительной обратной связью, где ε - отклонение или ошибка управления.

Сравнивающие или суммирующие устройства изображаются в виде круга, разделенного на секторы. В сравнивающем элементе сектор, на который подается вычитаемое, затемняется, или ставится знак минус. Сравнивающие и суммирующие устройства показаны на рисунке 2.

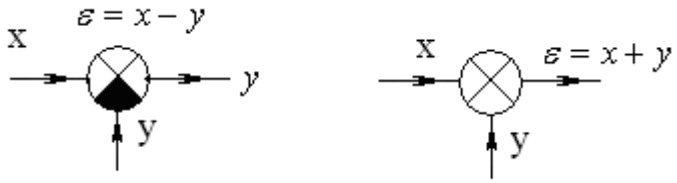


Рисунок 2 – Сравнивающие и суммирующие элементы

Во многих случаях бывает эффективным применение комбинированного управления, сочетающего в себе принципы управления по возмущению и отклонению.

2 Лекция № 2. Статическое и астатическое регулирование

Содержание лекции:

- функциональная схема автоматического регулятора;
- регуляторы прямого и непрямого действия;

- статическое и астатическое регулирование;
- статизм.

Цель лекции:

- изучить функциональную схему регулятора;
- изучить основные элементы автоматического регулятора.

2.1 Функциональная схема регулятора

Регулируемый объект и автоматический регулятор образуют систему автоматического регулирования. Автоматический регулятор, предназначенный для регулирования одного параметра содержит следующие основные элементы:

а) измерительный элемент;

б) задающее устройство (задатчик);

в) усилительные и преобразующие элементы;

г) регулирующий элемент;

д) устройство обратной связи.

Функциональная схема автоматического регулятора представлена на рисунке 3. Источником воздействия является задающее устройство, преобразующее входное воздействие x(t) в сигнал $x_3(t)$, который подается на ЭС. Сигнал $y_{OC}(t)$ пропорциональный регулируемой величине $y(t)$ подается на ЭС через главную отрицательную связь. ЭС – устройство, которое производит вычитание $\Delta x = x_3(t) - y_{OC}(t)$. Этот сигнал подается на измерительный элемент.

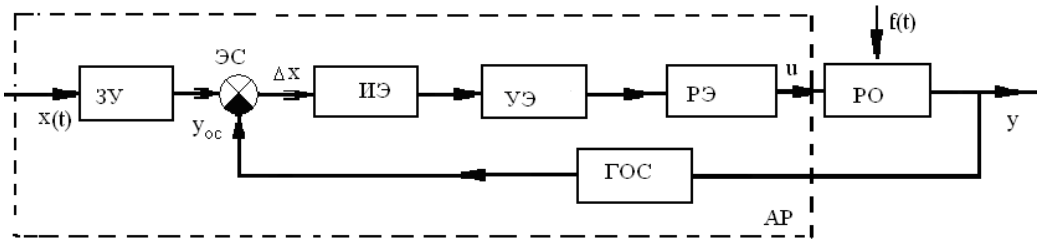


Рисунок 3 – Функциональная схема автоматического регулятора

Далее сигнал подается на преобразовательно-усилительный элемент. Усиленный сигнал подается на регулирующий элемент. Регулирующий элемент формирует управляющий сигнал $u(t)$, который подается на РО.

ИЭ реагирует на отклонение Δx регулируемой величины от заданного значения. Задающий элемент или задатчик – устройство для настройки, который должен устанавливать определенное значение регулируемой величины. Задатчик выполняется самостоятельно или входит в структуру измерительного элемента.

Первым промышленным образцом автоматического управляющего устройства был автоматический регулятор уровня воды в паровом котле,

снабжавшим паром паровую машину, примененный русским механиком Ползуновым И.И. [1]. Такого рода регуляторы называются регуляторами прямого действия.

Регуляторами непрямого действия называются такие регуляторы, у которых при изменении значения регулируемого параметра в объекте регулирования возникающий при этом выходной сигнал чувствительного элемента управляет обычно лишь усилительным или преобразующим элементом, к которому поступает от постороннего источника (электрической сети, насоса, компрессора) вспомогательная энергия. Поэтому на выходе усилительного элемента выходной сигнал оказывается в той или иной степени усиленным по отношению к входному. Выход усилительного элемента обычно воздействует на силовой элемент (который называют также усилителем мощности).

Регуляторы могут быть непрерывными и дискретными. Регуляторы непрерывного действия называются такие регуляторы, у которых при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется также непрерывно, т.е. все величины непрерывно изменяются во времени.

Регуляторы дискретного типа осуществляют не постоянную, а прерывистую связь между элементами системы. Дискретными регуляторами называются регуляторы, у которых при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется дискретно, т.е. величины вырабатывается в виде импульсов.

2.2 Статическое и астатическое регулирование

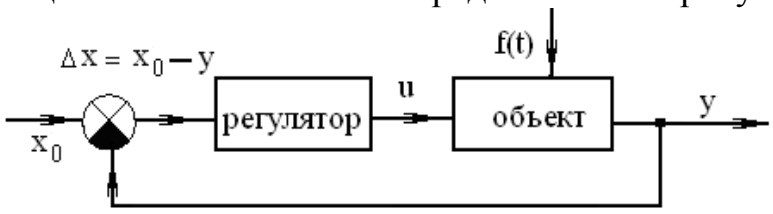
По способности САР поддерживать с определенной степенью точности значение регулируемой величины различаются статические и астатические системы регулирования.

Статической САР, являются системы, у которых при постоянном внешнем воздействии в установившемся режиме (статическом) присутствует отличное от нуля значение ошибки регулирования, зависящая от нагрузки. Ошибка тем больше, чем больше возмущение. Это заложено в принципе действия регулятора и не является его погрешностью, поэтому данное оклонение называется статической ошибкой или статизмом. Статический регулятор поддерживает постоянное значение регулируемой величины с ошибкой.

Регулирование, в котором ошибка при постоянном заданном значении зависит от нагрузки, называется статическим. В некоторых системах статическая ошибка нежелательна, тогда переходят к регулированию, в котором она равна нулю, т.е. к астатическому регулированию.

Астатической автоматической системой регулирования называется система, в которой при любом постоянном воздействии в установившемся режиме ошибка регулирования равна нулю. В астатической системе статизм равен нулю.

Упрощенная функциональная схема САР представлена на рисунке 4:



x_0 – задающее воздействие;
y – выходная управляемая величина;
u – управляющее воздействие;
f – возмущающее воздействие (нагрузка);
$\Delta x = x_0 - y$ - ошибка регулирования.

Рисунок 4 – Функциональная схема САР

Рассмотрим статический стационарный, т.е. установившийся режим, когда параметры системы и входная и выходная величины не меняются во времени.

Введем обозначения:

$k_0 = \frac{y}{u}$ - коэффициент передачи объекта управления по управляющему воздействию;

$k_f = \frac{y}{f}$ - коэффициент передачи объекта управления по возмущающему воздействию;

$k_P = \frac{u}{\Delta x} = \frac{u}{x_0 - y}$ - коэффициент передачи регулятора;

x_0, f, y - соответственно: задающее, возмущающее воздействие и регулируемая величина;

Δx - ошибка регулирования.

Установившееся состояние рассматриваемой системы описывается следующими уравнениями:

$$y = u \cdot k_0 - k_f \cdot f, \qquad u = k_P \cdot \Delta x = k_P \cdot (x_0 - y); \tag{2.1}$$

$$y = k_0 \cdot k_P \cdot (x_0 - y) - k_f \cdot f. \tag{2.2}$$

Из (2.2) находим регулируемую величину y:

$$y = \frac{k_P \cdot k_0 \cdot x_0}{1 + k_0 \cdot k_P} - \frac{k_f}{1 + k_0 \cdot k_P} \cdot f. \tag{2.3}$$

Следовательно, значение выходной (регулируемой величины зависит от нагрузки; уменьшается с увеличением нагрузки f.

Из уравнения найдем ошибку регулирования Δx.

$$\Delta x = x_0 - y = \frac{x_0}{1 + k_P \cdot k_0} + \frac{k_f}{1 + k_P \cdot k_0} \cdot f. \quad (2.4)$$

Таким образом, показано, что в статических системах автоматического регулирования в установившемся режиме всегда присутствует ошибка регулирования, зависящая от величины нагрузки f. Регулирование, в котором установившаяся статическая ошибка при постоянном заданном значении x_0 зависит от нагрузки f называется статическим регулированием.

Статическая ошибка регулирования:

$$\Delta x_{CT} = \frac{x_0}{1 + k_P \cdot k_0} + \frac{k_f}{1 + k_P \cdot k_0} \cdot f. \quad (2.5)$$

Статические регуляторы работают при обязательном отклонении регулируемой величины от требуемого значения. Это отклонение тем больше, чем больше возмущение f. Это заложено в принципе действия статических регуляторов и не является погрешностью, поэтому данное отклонение называется статической ошибкой регулятора. Чтобы уменьшить статическую ошибку надо увеличить коэффициент передачи регулятора, того же результата можно добиться, увеличивая коэффициент передачи объекта управления, но полностью устранить ошибку Δx за счет увеличения коэффициентов передачи нельзя.

Чаще всего для оценки зависимости ошибки регулирования от нагрузки используется понятие статизм:

$$\delta_{CИС} = \frac{Y_{XX} - Y_{HOM}}{Y_{XX}} \cdot 100\%. \quad (2.6)$$

Статизм системы, характеризует относительный наклон нагрузочной характеристики системы.

Статический регулятор поддерживает постоянное значение регулируемой величины с ошибкой. Статизм – это величина относительной статической ошибки при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной. В некоторых системах статическая ошибка нежелательна. Тогда переходят к регулированию, в котором она в силу структуры системы равна нулю, т.е. к астатическому регулированию.

3 Лекция №3. Общие аналитические зависимости в системах автоматического управления

Содержание лекции:

- статические и динамические характеристики системы;
- математические методы описания системы.

Цель лекции:

- изучить статические и динамические характеристики системы;
- изучить математические методы описания системы.

3.1 Статические и динамические характеристики системы и их формы

В САУ целесообразно все элементы разделяются по виду их статических и динамических характеристик. В соответствии с этим различают статический и динамический режимы в САУ.

Статической характеристикой звена (системы) называют зависимость выходной величины от входной в установившемся режиме при постоянных воздействиях, т.е. в состоянии равновесия $y(t) = f(x) = y(x)$.

Статический режим или состояние равновесия может иметь место, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описываются алгебраическими уравнениями. Любая САУ в целом в данном режиме описывается уравнением статики вида $y = F(x, f)$, в котором отсутствует время.

Статический или установившийся – режим работы АСУ, в котором управляемая величина и все промежуточные величины не изменяется во времени, т.е. $y(t) = const$.

Динамические характеристики звена или системы связывают аналитически выходные и входные величины (параметры) в переходном режиме при произвольных воздействиях т.е. при нарушении равновесия.

Динамический режим – режим работы АСУ, при котором управляемая (выходная) величина и все промежуточные величины изменяются во времени, т.е. $y(t) = \text{var}$.

Динамический режим имеет место, когда в элементе после приложения входного воздействия происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы описываются в общем случае дифференциальными уравнениями.

Передаточные свойства элементов АСУ в динамическом режиме описываются с помощью динамических характеристик. Различаются следующие виды динамических характеристик:

а) обыкновенные дифференциальные уравнения;

б) временные характеристики;

в) передаточные функции;

г) частотные характеристики.

В большинстве случаев звенья и системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка. Рассмотрим звено, которое описывается дифференциальным уравнением второго порядка [1]:

$$F(y.\dot{y}, \ddot{y}, x.\dot{x}) + f = 0, \qquad (3.1)$$

где

y - выходная величина; $\dot{y}$ - первая производная по времени;

$\ddot{y}$ - вторая производная по времени;

x, f - входные величины;

$\dot{x}$ - производная по времени.

Уравнение, описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называют уравнением динамики.

Пусть при постоянных входных воздействиях $x = x^0$, $f = f^0$ процесс в звене с течением времени установится: выходная величина примет постоянное значение $y = y^0$. Тогда уравнение примет вид

$$F(y^0,0,0,x^0,0) + f^0 = 0. \qquad (3.2)$$

Это уравнение называется уравнением статики. Статический режим можно описывать с помощью статических характеристик.

Наибольший интерес представляет собой динамическая система. Основной задачей изучения динамического поведения линейной системы является получение возможности рассчитать выходной сигнал $y(t)$ для любого известного входного сигнала $x(t)$.

Линеаризация дифференциального уравнения. При составлении дифференциальных уравнений динамики любой автоматической системы последнюю разбивают на отдельные звенья и записывают уравнения каждого звена в отдельности. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую можно преобразовать к одному уравнению путем исключения промежуточных переменных.

Рассмотрим звено, динамическое уравнение которого имеет произвольный нелинейный вид:

$$F(y.\dot{y}, \ddot{y}, x.\dot{x}) + f = 0,$$

где

y - выходная величина;

$\dot{y}$ - первая производная по времени;

$\ddot{y}$ - вторая производная по времени;

$x.f$ - входные величины;

$\dot{x}$ - производная по времени.

Уравнение, описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называют уравнением динамики.

Пусть при постоянных входных воздействиях $x = x^0$, $f = f^0$ процесс в звене с течением времени установится: выходная величина примет постоянное значение $y = y^0$. Тогда уравнение примет вид $F(y^0,0,0,x^0,0) + f^0 = 0$.

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что все переменные изменяются так, что их отклонения от установившихся значений остаются все время достаточно малыми.

Обозначим отклонения через $\Delta x, \Delta y$. Тогда в динамическом процессе

$$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,\ \dot{y} = \Delta \dot{y},\ \ddot{y} = \Delta \ddot{y}.$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы АР обычно выполняется. Внешнее воздействие не зависит от работы АС, изменение его может быть произвольным, поэтому правая часть линеаризации не подлежит.

Разложим функцию F, в ряд Тейлора:

$$F_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Delta \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\Delta \ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x} + f_0 + \Delta f = 0. \qquad (3.3)$$

Все частные производные в уравнении представляют собой постоянные коэффициенты. Вычтя из данного уравнения уравнение статики получим искомое линеаризованное уравнение динамики данного звена в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\Delta \ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Delta \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \Delta f = 0 \qquad (3.4)$$

Это дифференциальное уравнение описывает тот же динамический процесс в том же звене автоматической системы. Это уравнение является приближенным, в процессе разложения были отброшены малые высшего порядка, неизвестными функциями времени являются не прежние величины , а их отклонения $\Delta x, \Delta y$ от некоторых установившихся значений, полученные уравнения являются линейными относительно отклонений с постоянными коэффициентами. Данное уравнение называется дифференциальным уравнением звена в отклонениях.

В САР принято записывать дифференциальные уравнения звеньев в двух стандартных формах.

Дифференциальные уравнения записываются так, чтобы выходная величина и ее производные были в левой части, а входная величина и все остальные члены в правой части, принято, чтобы сама выходная величина входила в уравнение с коэффициентом единица. Чтобы привести линеаризованное уравнение к стандартному виду, введем обозначения:

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} = a_0,\ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = a_1,\ \frac{\partial F}{\partial y} = a_2,\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -b_0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = -b_1,\ c_0 = -1.$ С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y - b_0 \Delta \dot{x} - b_1 \Delta x - c_0 \Delta f = 0, \\ a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y = b_0 \Delta \dot{x} + b_1 \Delta x + c_0 \Delta f. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Обозначим:

$\frac{a_0}{a_2} = T_2^2,\ \frac{a_1}{a_2} = T_1,\ \frac{b_1}{b_0} = k_1,\ \frac{b_0}{b_1} = k_2,\ \frac{c_0}{a_2} = k_0,$ где T_1, T_2, T_0 - постоянные времени данного звена, k_1, k_2, k_0 – коэффициенты передачи.

С учетом этого:

$T_2^2 \Delta \ddot{y} + T_1 \Delta \dot{y} + \Delta y = k_2 \Delta \dot{x} + k_1 \Delta x + k_2 \Delta f$.

Будем считать, что $x_0 = y_0 = f_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = x, \Delta y = y - y_0 = y,$

$\Delta f = f - f_0 = f, \Delta \dot{y} = \dot{y}, \quad \Delta \ddot{y} = \ddot{y}, \quad \Delta \dot{x} = \dot{x}$.

Тогда уравнение в стандартной форме примет вид:

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k_1 (T_0 \dot{x} + 1)x + k_2 f . \qquad (3.6)$$

Напишем уравнение в символьной форме. Для этого введем оператор $\frac{d y^2}{d t^2} = p^2$, $\frac{d y}{d t} = p$, получится стандартная форма в символьной форме:

$$y(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) = k_1 (T p + 1)x + k_2 f . \qquad (3.7)$$

Вторая форма записи уравнения:

$$\begin{aligned} &a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \dot{x} + b_1 x + c_0 f, \\ &a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p x + b_1 x + c_0 f, \\ &y(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = (b_0 p + b_1)x + c_0 f. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Введем обозначения:

$Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ - собственный дифференциальный оператор,

$R_1(p) = b_0 p + b_1, \quad R_2(p) = c_0$ - операторы воздействия.

Тогда имеем: $Q(p) y = R_1(p) x + R_2(p) f$ уравнения в более компактной форме.

Передаточные функции. Отношения оператора воздействия к собственному оператору называют передаточной функцией или передаточной функцией в операторной форме.

Звено, описываемое уравнениями можно характеризовать двумя передаточными функциями: передаточной функцией $W_1(p)$ по входной величине x, т.е.

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \qquad (3.9)$$

и передаточной функцией $W_2(p)$ по входной величине f.

Используя передаточные функции имеем: $y = W_1(p) x + W_2(p) f$.

4 Лекция №4. Применение преобразования Лапласа к теории автоматического управления. Передаточные функции

Содержание лекции:

- прямое и обратное преобразование Лапласа;
- свойства преобразования Лапласа;
- применение преобразования Лапласа к теории управления;
- передаточная функция.

Цель лекции:

- изучить и освоить преобразование Лапласа;
- уметь применить преобразование Лапласа к теории автоматического управления.

4.1 Преобразования Лапласа

Линейные дифференциальные уравнения динамических систем решаются операторным методом, основанным на преобразовании Лапласа.

Преобразование Лапласа позволяет функцию вещественной переменной $f(t)$, преобразовать в функцию комплексной переменной $F(p)$:

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{4.1}$$

где

$f(t)$ - называется оригиналом;

$F(p)$ - называется изображением;

$p=\sigma+j\cdot\omega$ - комплексная переменная, оператор;

$j=\sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Обратное преобразование Лапласа позволяет найти оригинал по известному изображению:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p)\,e^{pt}\,dp\,, \tag{4.2}$$

где σ - вещественная часть оператора p.

Таким образом, в результате преобразований получается пара однозначных соответствий: $F(p)=L\,f(t),\ f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

Для многих функций такие соответствия найдены и сведены в таблицы.

Изображение некоторых функций:

1) Единичная функция:

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Изображение единичной функции:

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}1e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\ \Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p}.\qquad 1\div\frac{1}{p},\quad A\div\frac{A}{p}.$$

2) Изображение показательной функции $f(t)=e^{-\alpha t}$.

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}e^{-(\alpha+p)t}dt=-\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{\alpha+p}\ \Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{1}{p+\alpha}.$$

$$e^{-\alpha t}\div\frac{1}{p+\alpha}.$$

3) Изображение показательной функции $f(t)=e^{\alpha t}.\ e^{\alpha t}\div\frac{1}{p-\alpha}$.

4) Изображение синусоидальной функции : $\sin\omega_0 t \div \frac{\omega_0^2}{p^2+\omega_0^2}$.

5) Изображение косинусной функции: $\cos\omega_0 t \div \frac{p}{p^2+\omega_0^2}$.

4.2 Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойства линейности.

Для любых постоянных α и β (α,β-постоянные) справедливо:

$$L[f_1(t)+f_2(t)]=L[f_1(t)+f_2(t)]=F_1(p)+F_2(p). \tag{4.3}$$

Изображение от суммы равно сумме изображений. Постоянную величину можно вынести за знак изображений

$$L[af(t)]=aL[f(t)]=aF(p), \tag{4.4}$$

где а – постоянная.

2. Дифференцирование оригинала

$$L\left[\frac{d\,f(t)}{d\,t}\right]=p\,F(p)-f(0), \tag{4.5}$$

где $F(p)=L[x(t)]$, $f(0)=\lim\limits_{x(t)\to 0}x(t)$ - начальное значение функции.

$$L[\ddot{x}(t)]=p^2X(p)-p\,x(0)-\dot{x}(0). \tag{4.6}$$

Если n-я производная $L[x^n(t)=p^nX(p)-[p^{n-1}x(0)-p^{n-2}x(0)-....]$.

При нулевых начальных условиях: $L[x^{(n)}]=p^nX(p)$. При нулевых начальных условиях дифференцирование оригинала $x(t)$ соответствует умножению переменной p на изображение по Лапласу $X(p)$, причем переменная p в той степени, каков порядок дифференциала.

3. Интегрирование оригинала.

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(p)}{p}, \tag{4.7}$$

где $f(0)$ - начальное значение функции, при $t=0$.

Интегрирование оригинала сигнала $x(t)$ соответствует делению изображения на p.

4. Теорема о свертке. Если $x_1(t), x_2(t)$ - оригиналы, $X_1(p), X_2(p)$ - их изображения, то

$$X_1(s)\cdot X_2(s)=\int_0^t x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t x_2(\tau)\cdot x_1(t-\tau)d\tau\,. \qquad (4.8)$$

Интеграл правой части равенства называют сверткой функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и обозначают $x_1(t)*x_2(t)$:

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_0^t x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t x_2(t)\cdot x_1(t)\,d\tau\,. \qquad (4.9)$$

5. Теорема разложения. Если $X(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ дробно рациональная функция, причем степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то ее оригинал

$$x(t)=\sum_{K=1}^{n}\frac{A(p_K)}{B'(p_K)}e^{p_K t}\,, \qquad (4.10)$$

где p_K - простые корни уравнения $B(p)=0$.

Эта формула называется теоремой разложения.

В частном случае, когда в составе знаменателя есть множитель p, т.е. знаменатель имеет один нулевой корень $F(p)=\dfrac{A(p)}{pB(p)}$, а в составе $B(p)$ уже нет нулевого корня и уравнение $B(p)=0$ имеет n различных и не равных нулю корней p_k $(k=1,2,...,n)$, то формула разложения примет следующий вид:

$$F(p)\div f(t)=\frac{A(0)}{B(0)}+\sum_{k=2}^{k=2}\frac{A(p_k)}{p\,B'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (4.11)$$

Выделенный постоянный член представляет собой установившийся ток или напряжение в цепи. Если $B(p)$ имеет комплексно-сопряженные корни, p_1, p_2, то

$$F(p)\div f(t)=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_1)e^{p_1 t}}{F_2'(p_1)}\right]. \qquad (4.12)$$

4.3 Передаточная функция

Передаточная функция по Лапласу. Передаточная функция – это отношение изображения по Лапласу выходной функции к изображению входной по Лапласу входной функции при нулевых начальных условиях [1,2]:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+...+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n}=\frac{F_2(p)}{F_1(p)}\,. \qquad (4.13)$$

Это отношение двух полиномов в теории автоматического управления носит название передаточной функции в операторной форме. Знаменатель передаточной функции $F_1(p)$ называется характеристическим полиномом, который характеризует свойства динамической системы. Корни уравнения

$F_1(p)=0$ принято называть полюсами системы. Для того чтобы получить изображение выходной величины системы, достаточно изображение входной величины умножить на передаточную функцию $Y(p)=W(p)\cdot X(p)$.

Передаточная функция системы в виде изображений по Лапласу имеет следующие свойства: коэффициенты $W(p)$ всегда вещественные, и степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя.

Процедура решения дифференциального уравнения с использованием преобразования Лапласа состоит в следующем:

а) по заданному входному воздействию $f_1(t)$ с помощью преобразований Лапласа находится изображение $F_1(p)$;

б) по дифференциальному уравнению составляют передаточную функцию $W(p)$;

в) изображение выходной функции определяется как $F_2(p)=W(p)\cdot F_1(p)$;

г) по известному изображению выходной величины $F_2(p)$ находят оригинал выходной функции $f_2(t)$.

Для нахождения оригинала выходной функции $f_2(t)$ используют таблицу оригиналов или применяют теорему разложения.

5 Лекция № 5. Частотные и логарифмические частотные характеристики

Содержание лекции:

- частотные характеристики динамических звеньев;
- логарифмические частотные характеристики;
- построение частотных и логарифмических характеристик.

Цель лекции:

- изучить и освоить частотные характеристики динамических звеньев;
- изучить и освоить логарифмические частотные характеристики динамических звеньев.

5.1 Частотные характеристики динамических звеньев

Важнейшей характеристикой динамического звена являются его частотная передаточная функции. Они получаются при рассмотрении установившихся режимов системы при подаче на вход гармонического воздействия, когда возмущения равны нулю.

Рассмотрим динамическое звено, когда на входе гармоническое воздействие

$x(t)=X_m\sin(\omega t+\varphi_1)$. В комплексной форме: $\dot{X}_m=X_m e^{j\varphi_1}$,

где X_m-амплитуда;

φ_1 - начальная фаза;

ω- угловая частота этого воздействия.

На выходе линейного звена в установившемся режиме будет также гармоническая функция той же частоты, но в общем случае сдвинутая по фазе относительно входной фазы на угол ψ.

Выходная величина: $y(t) = X_{2m}\sin(\omega t + \varphi_2)$. В комплексной форме: $\dot{Y} = Y_m e^{j\varphi_2}$.

Линейное звено описывается дифференциальным уравнением в стандартной форме:

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_n = b_0\frac{d^m x}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + ... + b_m; \quad (5.1)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m)x; \quad (5.2)$$

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a^n} = \frac{y(p)}{x(p)}. \quad (5.3)$$

Комплексная частотная характеристика получается заменой $p = j\cdot\omega$.

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + ... + b^m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a^n} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (5.4)$$

Отношение комплексного значения выходной функции к комплексному значению входной функции называется комплексная частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y_m}{X_m}e^{j\psi(\omega)}. \quad (5.5)$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ представляет собой комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуды выходной функции к амплитуде входной функции, а аргумент – сдвигу фаз выходной величины по отношению к входной:

$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, где $|W(j\omega)|$ - модуль $W(j\omega)$;

$\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)]$ - аргумент $W(j\omega)$.

Таким образом, при подаче на вход системы гармонического сигнала, установившаяся гармоническая величина на выходе определяется произведением входной функции на комплексную частотную функцию:

$$\dot{Y} = W(j\omega)\cdot\dot{X}. \quad (5.6)$$

Частотная передаточная функция комплексной функцией от переменной ω. Ее можно представить в виде:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} + \pi k\right). \quad (5.7)$$

На комплексной плоскости частотная передаточная функция $W(j\omega)$ представляет вектор, длина которого равна $A(\omega)$, а аргумент (угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью) -

$\varphi(\omega)$. Кривую которую описывает конец этого вектора (см. рисунок 5) при изменении частоты от 0 до ∞ называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$.

При изменении частоты от нуля до бесконечности. По оси абсцисс откладывается вещественная часть, а по оси ординат мнимая часть. Для каждой частоты наносится точка. Полученные точки соединяются между собой.

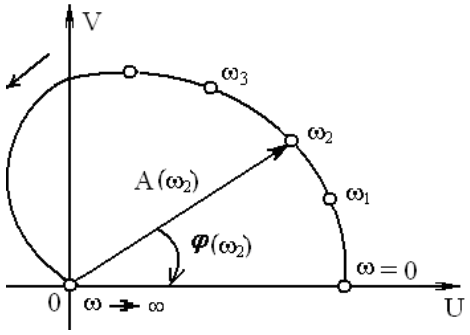


Рисунок 5 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена

Частотную передаточную функцию также называют амплитудно-фазовой частотной функцией. Ее действительную часть $U(\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega]$ называют вещественной частотной функцией, а ее мнимую часть $V(\omega) = \mathrm{Im}[W(j\omega)]$ называют мнимой частотной характеристикой. Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называют амплитудно-частотной функцией, ее график амплитудной частотной характеристикой. Аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ называют фазовой частотной функцией, ее график фазовой частотной характеристикой.

5.2 Логарифмические частотные характеристики

Для практических целей удобнее пользоваться логарифмическими частотными характеристиками: логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) и логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ.

Передаточная частотная функция: $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Прологарифмируем выражение частотной передаточной функции:

$$\ln W(j\omega) = \ln\left[A(\omega)\cdot e^{j\omega}\right] = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \qquad (5.8)$$

Из этого выражения следует, логарифм частотной передаточной функции является комплексной величиной, вещественной частью которой является логарифм модуля, а мнимой частью является фаза.

На практике удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Логарифмической амплитудно-частотной функцией называется функция:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|. \qquad (5.9)$$

Единицей измерения $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей измерения логарифма частоты – декада.

График зависимости логарифмической амплитудно-частотной функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $\lg(\omega)$ называют логарифмической амплитудно-частотной характеристикой.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой называют график зависимости фазовой частотной функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg(\omega)$. Для логарифмической фазо-частотной характеристики используется выражение $\varphi(\omega)$, полученное для обычной фазо-частотной характеристики.

Некоторые особенности построения ЛАЧХ:

1) При построении логарифмических частотных характеристистик (ЛЧХ) по оси абсцисс откладывается угловая частота ω в логарифмическом масштабе, т.е. на отметке, соответствующей значению $\lg(\omega)$, пишется значение ω, а не значение $\lg(\omega)$.

2) Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка, так как при $\omega = 0,\ \lg 0 \to -\infty$, с учетом этого, ось ординат проводится в любом месте (плавает) так, чтобы вся характеристика ЛАХ находилась правее от нее. Отрицательные частоты не рассматриваются.

Интервал, который соответствует изменению частоты в 10 раз, называется декадой. Длина декады также постоянна независимо от ее расположения на оси.

3) На оси ординат в равномерном масштабе откладываются значения $L(\omega)$ в дБ. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 дБ, что соответствует значению модуля $A(\omega) = 1$, так как $\lg 1 = 0$.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика строится совместно с ЛАЧХ, причем горизонтальная ось у обеих характеристик совпадает. По оси ординат в линейном масштабе откладывается фаза в градусах. Направление положительного отсчета значений ЛФЧХ вниз. С точкой 0 дБ для ЛАЧХ (пересечение с горизонтальной осью) совмещается точка -180^0 (см. рисунок 6). Так как логарифмическая фазо-частотная характеристика повторяет фазо-частотную характеристику, то ее не строят и не используют на практике для характеристики звена.

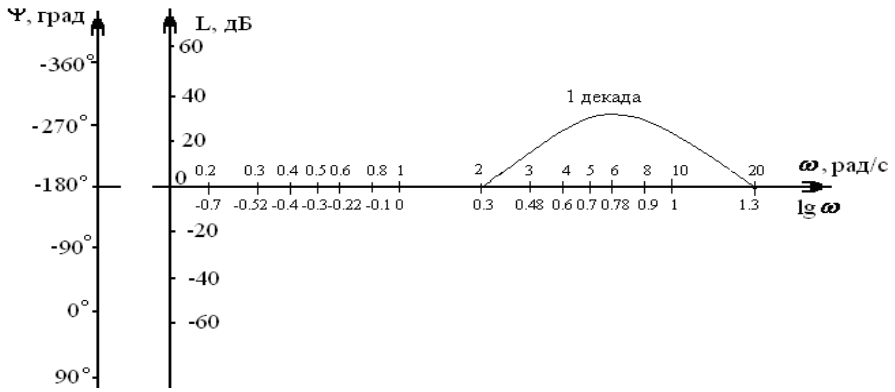


Рисунок 6 – Стандартная сетка для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ

Главным достоинством логарифмических амплитудных частотных характеристик является возможность построения практически без выполнения вычислений, небольшим графиком может быть охвачен широкий диапазрн частот.

Кроме того, значительные участки ЛАЧХ с большой точностью могут быть заменены прямыми линиями – асимптотами. Они имеют отрицательный и положительный наклон, кратный 20 дб/дек, т.е. 0 дБ/дек, – 20 дБ/дек, – 40 дБ/дек, а также + 20 дБ/дек, + 40 дБ/дек.

В ряде случаев, возможно пренебречь кривизной ЛАЧХ, на отдельных участках частот. Тогда ЛАЧХ изображается отрезками прямых (асимптотами) и называется асимптотической ЛАЧХ. Для ее построения нужны лишь весьма простые вычисления.

6 Лекция №6. Временные функции и временные характеристики. Основные типовые звенья систем автоматического управления

Содержание лекции:

- временные функции и характеристики динамических звеньев;
- построение временных характеристик;
- типовые звенья систем управления.

Цель лекции:

- изучить и освоить временные характеристики динамических звеньев;
- изучить и освоить основные характеристики типовых звеньев.

6.1 Единичная ступенчатая и импульсная функции

В теории автоматического управления широко применяются две функции: единичная ступенчатая функция и единичная импульсная функция.

Единичная ступенчатая функция обозначается $1(t)$ и задается уравнением (см. рисунок 7, а):

$$1(t)=\begin{cases}1, при\ t\ge 0\\ 0, при\ t<0.\end{cases} \tag{6.1}$$

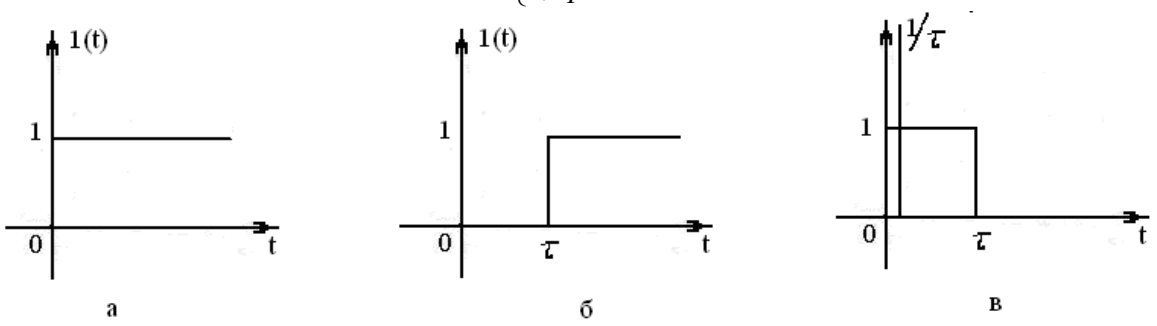


Рисунок 7 - Единичная ступенчатая функция (а,б), единичная импульсная функция (в)

Функция сдвинутая на время τ обозначается $1(t-\tau)$ (см. рисунок.11, б):

$$1(t-\tau)=\begin{cases}1, & при\ t\ge\tau\\ 0, & при\ t<\tau\end{cases}. \tag{6.2}$$

Умножение какой-либо функции времени $x(t)$ на единичную ступенчатую функцию означает, что функция времени будет существовать только при $t\ge 0$, при $t<0$ она обращается в нуль.

Единичную импульсную функцию или дельта-функцию $\delta(t)$ определяют как функцию, равную нулю для всех t, кроме $t=0$. В момент $t=0$ $\delta(0)=\infty$.

Дельта-функция задается следующим образом:

$$\delta(t)=\begin{cases}0\ при\ \ t<0\\ \infty\ при\ \ t=0\\ 0\ при\ \ t>0\end{cases}. \tag{6.3}$$

Дельта-функция является производной от единичной ступенчатой функции: $\delta(t)=\dfrac{d1(t)}{dt}=1'(t)$ и представляет собой предельный случай импульса очень большой величины и очень малой продолжительности, когда его длительность стремится к нулю, но площадь сохраняется равной единице. Физически нереализуемой математической абстракцией. Формально она может быть получена, например, предельным переходом $\tau\to 0$ единичного импульса площадь которого равна 1 (см. рисунок 7, в). Основное свойство дельта-функции заключается в том, что она имеет единичную площадь $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$. Изображение по Лапласу $L[\delta(t)\}=1,\quad L[\dot{\delta}(t)]=s,\quad L[\overset{(m)}{\delta}(t)]=s^m$.

Очень важной характеристикой автоматических систем (звеньев) являются переходные и импульсные переходные функции или функции веса. Их графики называют временными характеристиками.

Переходная функция или переходная характеристика описывает изменение выходной функции системы или звена, когда входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции при нулевых начальных условиях, т.е. переходная функция $h(t)$ есть функция, описывающая реакцию системы или звена на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

Функция веса $w(t)$ называют реакцию звена на единичную импульсную функцию $\delta(t)$. График весовой функции называют импульсной переходной характеристикой.

Рассмотрим связь между переходной функцией $h(t)$ и функции веса $w(t)$. Функция веса

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \tag{6.4}$$

т.е. функция веса может быть получена дифференцированием по времени переходной функции.

Функция веса связана с его передаточной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \int_0^\infty w(t) e^{-pt} dt; \tag{6.5}$$

$$W(p) = L[w(t)], \quad w(t) = L^{-1}[W(p)].$$

Передаточная функция есть изображение функции веса. Весовая функция – обратное преобразование по Лапласу передаточной функции. Изображение $h(t)$:

$$L[h(t)] = \frac{1}{p} W(p), \tag{6.6}$$

тогда

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} W(p)\right]. \tag{6.7}$$

Весовая и переходная функции являются исчерпывающими характеристиками системы (звена) при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии с помощью интеграла свертки по переходной функции:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau; \tag{6.8}$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\; w(t-\tau)\, d\tau.$$

6.2 Основные типовые звенья в теории автоматического управления

Звено - математическая модель элемента, соединения элементов или любой части системы. Звенья, как и системы, могут описываться

дифференциальными уравнениями высокого порядка и их передаточные функции могут быть в виде:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a^n}. \qquad (6.9)$$

Динамическую систему можно представить как соединения типовых или элементарных звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых элементарных множителей или элементарных дробей называются типовыми или элементарными. Можно выделить типовые звенья, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков:

а) простейшие: безынерционные, интегрирующие, дифференцирующие звенья;

б) звенья первого порядка: инерционные, инерционно-дифференцирующие, форсирующие, инерционно-форсирующие;

в) колебательные звенья второго порядка.

Безынерционное или пропорциональное звено – звено, у которого выходная величина в каждый момент времени пропорционально входной величине.

Уравнение такого звена имеет вид: $y(t) = K \cdot x(t)$,

где K - коэффициент пропорциональности или передачи звена;

$x(t)$ - входной сигнал или воздействие;

$y(t)$ - выходной сигнал.

Примерами такого звена являются делители напряжения, усилители постоянного тока, рычажная передача, редукторная передача.

Предполагается, что передача сигнала от входа к выходу производится мгновенно без какой-либо инерции, поэтому звенья называются безынерционными. Из выражения следует, что безынерционное звено обладает свойством пропускать через себя входной сигнал, изменяя лишь его масштаб и не изменяя формы. Масштаб изменения входного сигнала определяется значением - k.

Если на безынерционного звена подать синусоидальный сигнал $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$, то на выходе $y = Y_m \sin(\omega t + \varphi_Y)$, где $Y_m = k \cdot X_m$.

В комплексной форме: $\dot{Y} = k \cdot \dot{X}$ или $Y(j\omega) = k \cdot X(j\omega)$.

Комплексный частотный коэффициент передачи: $W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k$.

Передаточная функция такого звена имеет вид: $W(p) = k$, тогда

комплексная частотная характеристика: $W(j\omega) = K = K + j0 = U(\omega) + jV(\omega)$.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ): $W(\omega) = |W(j\omega)| = K$.

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) : $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 0$.

Вещественная частотная характеристика: $U(\omega) = K$.

Мнимая частотная характеристика: $V(\omega) = 0$.

Переходная (временная) характеристика:

$$h(t) = L^{-1}(\frac{W(p)}{p}) = L^{-1}\left(\frac{k}{p}\right) = kL^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = k \cdot 1(t). \qquad (6.10)$$

Весовая функция: $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t)$.

На рисунке 8 показаны частотные и временные характеристики безынерционного звена:

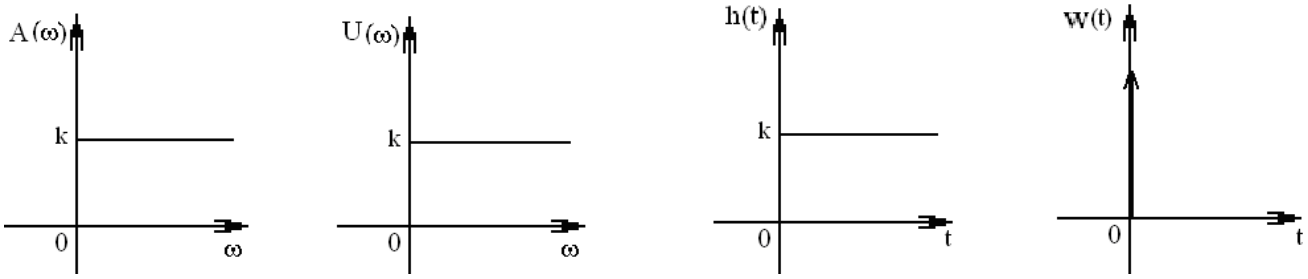


Рисунок 8 – Частотные и временные характеристики безынерционного звена

Идеальное интегрирующее звено. Идеальным интегрирующим звеном называется звено, выходная величина которого пропорционально интегралу во времени от входной величины и описывается уравнением:

$$y(t) = K\int_0^{\infty} x(t)dt\,; \quad y'(t) = K \cdot x(t)\,; \quad \frac{dy(t)}{dt} = K \cdot x(t)\,, \qquad (6.11)$$

т.е. скорость изменения выходной величины пропорционально входной величине.

Если на вход интегрирующего звена подано синусоидальный сигнал $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$, то на выходе сигнал определяется как интеграл от входного: $y = -\left(\frac{K}{\omega}\right) X_m \cos(\omega t + \varphi_X)$.

В символической форме записи $\dot{Y} = \frac{K}{p}\dot{X}$, или $Y(p) = \frac{K \cdot X(p)}{p}$.

Передаточная функция: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{p}$.

Комплексный коэффициент передачи: $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-j90^0} = A(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}$.

Амплитудно-частотная функция: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$.

Фазо-частотная функция: $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = -90^0$.

Комплексная частотная функция в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = -j\frac{K}{\omega} = 0 - jV(\omega).$$

Вещественная частотная характеристика: $U(\omega) = 0.$

Мнимая частотная характеристика: $V(\omega) = -\frac{K}{\omega}.$

Переходная функция: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{p}\cdot\frac{1}{p}\right] = KL^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = K\cdot t\cdot 1(t).$

Импульсная или весовая функция: $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K\cdot 1(t).$

Частотные и временные характеристики изображены на рисунке 9.

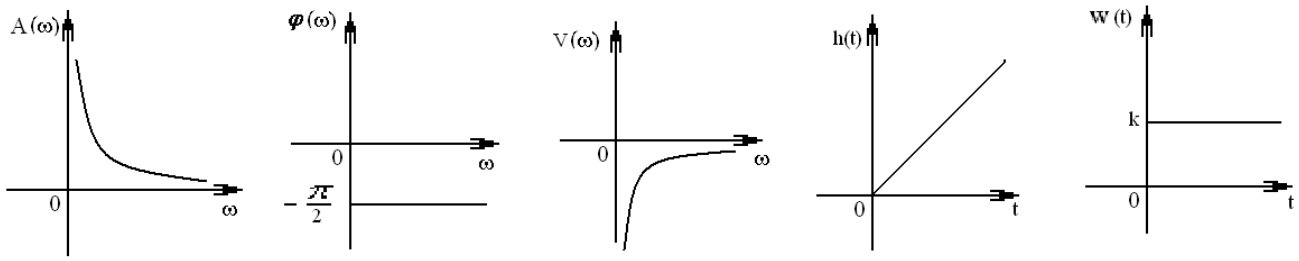


Рисунок 9 – Частотные и временные характеристики идеального интегрирующего звена

7 Лекция №7. Уравнения типовых звеньев и их характеристики

Содержание лекции:

- уравнения связи типовых звеньев;
- частотные и временные характеристики типовых звеньев;

Цель лекции:

- изучить уравнения связи основных типовых звеньев;
- изучить и освоить основные характеристики типовых звеньев;

7.1 Дифференцирующее звено

Дифференцирующим звеном называется звено, которое описывается уравнением:

$$y(t) = K\cdot\frac{dx(t)}{dt}. \qquad (7.1)$$

Выходная величина пропорциональна скорости изменения входной величины.

Если на вход интегрирующего звена подано синусоидальный сигнал $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$, то на выходе сигнал определяется производной от входного: $y = K\,\omega\,X_m \cos(\omega t + \varphi_X)$.

Передаточная функция дифференцирующего звена:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K\ p\ X(p)}{X(p)} = K\ p. \qquad (7.2)$$

Комплексный частотный коэффициент передачи дифференцирующего звена:

$$W(j\omega) = j\omega K = 0 + j\omega K = \omega K\, e^{j90^0}. \qquad (7.3)$$

Амплитудно-частотная характеристика: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \omega K$.

Фазо-частотная характеристика: $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 90^0 = \frac{\pi}{2}$.

Вещественная частотная характеристика: $U(\omega) = 0$.

Мнимая частотная характеристика: $V(\omega) = \omega \cdot K$.

Переходная функция: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right] = L^{-1}[K] = \delta(t)$.

Весовая функция: $w(t) = \dot{\delta}(t)$.

Частотные и временные характеристики показаны на рисунке 10.

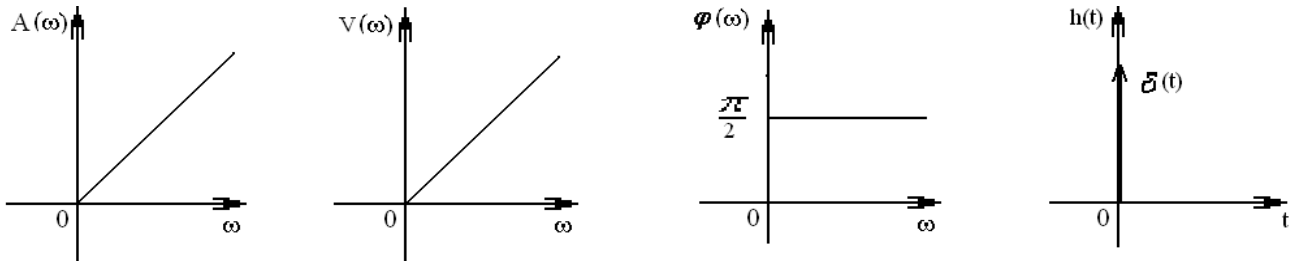


Рисунок 10 - Частотные и временные характеристики дифференцирующего звена

7.2 Инерционное звено первого порядка (апериодическое)

Звено называется инерционным, если связь между входом и выходом звена определяется дифференциальным уравнением вида:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t), \qquad (7.4)$$

где $y(t)$ - выходная функция;

$x(t)$ - входная функция;

T - постоянная времени звена;

K - коэффициент усиления звена.

Инерционное звено характеризуется двумя параметрами: постоянной времени T и передаточным коэффициентом K.

Передаточная функция: $W(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}$

$$T\cdot p\cdot Y(p)+Y(p)=K\cdot X(p);$$
$$Y(p)\left[1+T\cdot p\right]=K\cdot X(p);$$
$$Y(p)=\frac{K\cdot X(p)}{\left[1+T\cdot p\right]};\qquad (7.5)$$
$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K}{1+T\cdot p}.$$

$W(p)=\dfrac{K}{1+T\cdot p}$ - передаточная функция инерционного звена.

Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega\cdot T}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}\,e^{-j\,arctg(\omega\cdot T)}=W(\omega)e^{-j\,\varphi(\omega)}. \qquad (7.6)$$

Амплитудно-частотная функция: $A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\dfrac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}$.

Фазо-частотная функция: $\varphi(\omega)=-arctg(\omega\cdot T)$.

Алгебраическая форма записи:

$$W(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}=\frac{K}{1+(\omega T)^2}-j\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2}=U(\omega)-jV(\omega). \qquad (7.7)$$

Вещественная частотная функция: $U(\omega)=\dfrac{K}{1+(\omega T)^2}$.

Мнимая частотная функция: $V(\omega)=-\dfrac{K\omega T}{1+(\omega T)^2}$.

Переходная функция: $h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{K}{1+pT}\cdot\dfrac{1}{p}\right]=K(1-e^{-\frac{t}{T}})\cdot 1(t)$.

Весовая функция: $w(t)=\dfrac{dh(t)}{dt}=\dfrac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\cdot 1(t).$

Частотные и временные характеристики инерционного звена показаны на рисунке 11.

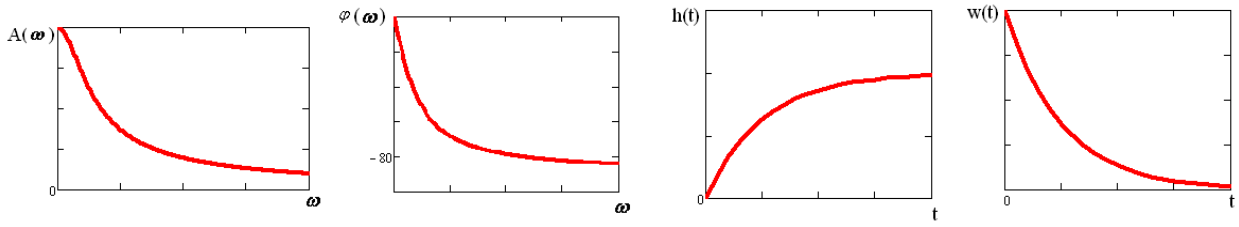


Рисунок 11 - Частотные и временные характеристики инерционного звена

7.3 Колебательное звено

Колебательное звено описывается уравнением второго порядка:

$$T_2^2 y''(t) + T_1 y'(t) + y(t) = K\,x(t);$$
$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = K\,x(t) \qquad (7.8)$$

или в другой форме:

$T = T_2$, $\xi = \frac{T_1}{2 \cdot T}$ с учетом этих преобразований получаем:

$$T^2\, y''(t) + 2\xi T\, y'(t) + y(t) = K\,x(t). \qquad (7.9)$$

Символической форме:

$$T^2\, p^2 Y(p) + 2\xi T\, pY(p) + Y(p) = K\,X(p);$$
$$Y(p)\left[T^2\, p^2 + 2\xi T\, p + 1\right] = K\,X(p). \qquad (7.10)$$

Передаточная функция колебательного звена $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{T^2\, p^2 + 2\xi T\, p + 1}$,

где T - постоянная времени колебательного звена.

Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T (j\omega) + 1}. \qquad (7.11)$$

Амплитудно-частотная функция:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}. \qquad (7.12)$$

Представим частотную комплексную функцию в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + 2 \cdot \xi T(j\omega)} = \frac{K(1 - (T\omega)^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} - j\frac{KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

Вещественная частотная функция:

$$U(\omega) = \frac{K(1 - (T\omega)^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \qquad (7.13)$$

Мнимая частотная функция:

$$V(\omega) = -\frac{KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \qquad (7.14)$$

Фазо-частотная функция: $\varphi(\omega) = -arctg\,\frac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}$.

Характеристическое уравнение: $Z(p) = T^2\, p^2 + 2\xi T\, p + 1 = 0$, $0 < \xi < 1$.

Корни комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = \frac{-\xi}{T} \pm \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T}} = -\alpha \pm j\beta$,

где $\alpha = \frac{\xi}{T}$ - коэффициент затухания, $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ - собственная частота колебаний звена.

Аналитическое решение: $y(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi)$, где $\varphi = arctg\dfrac{\beta}{\alpha}$, С – константа.

Переходная функция:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{K}{1+2\xi pT+(pT)^2}\cdot\frac{1}{p}\right] = K\cdot 1(t)\left[1-e^{-\alpha\cdot t}(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)\right]. \quad (7.15)$$

Весовая функция: $w(t) = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{K\omega_0^2}{\beta}\cdot 1(t)e^{-\alpha t}\sin\beta t$, где $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{1}{T}$.

Характеристики звена: темп затухания $e^{-\alpha t}$, период колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$.

На рисунке 12 приведены частотные и временные характеристики колебательного звена.

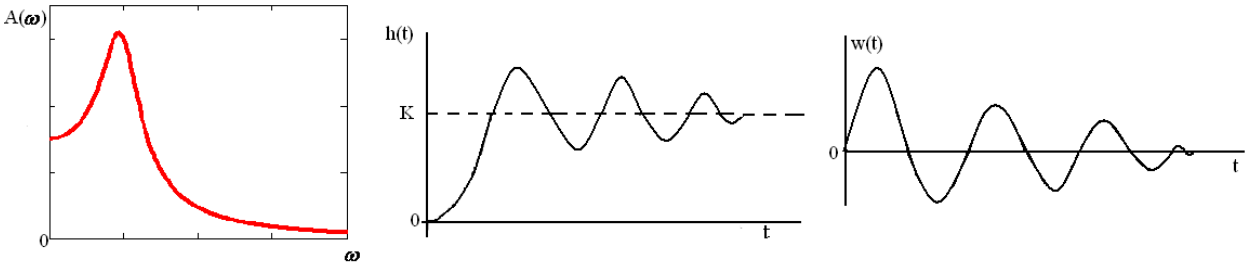


Рисунок 12 - Частотные и временные характеристики колебательного звена

8 Лекция № 8. Логарифмические характеристики основных типовых звеньев

Содержание лекции:

- логарифмические частотные характеристики основных типовых звеньев;
- особенности построения логарифмических характеристик типовых звеньев.

Цель лекции:

- изучить и освоить логарифмические характеристики типовых звеньев;
- изучить и освоить способы построения логарифмических частотных характеристик типовых звеньев.

Рассмотрим логарифмические частотные характеристики основных типовых звеньев.

Безынерционное звено. Передаточная функция такого звена имеет следующий вид: $W(p) = K$. Комплексная частотная характеристика: $W(j\omega) = K$. Комплексная частотная характеристика содержит только вещественную часть $U(\omega) = K$, мнимая часть $V(\omega) = 0$. Аргумент комплексной частотной характеристики $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = 0$.

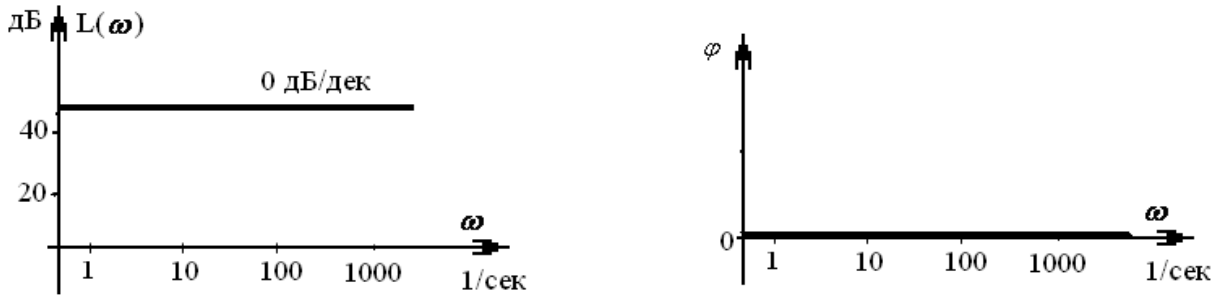
Модуль частотной передаточной функции безынерцинного звена равен постоянному числу $A(\omega) = K$.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика безынерционного звена имеет следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg A(\omega) = 20\lg K. \quad (8.1)$$

ЛАЧХ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (см. рисунок 13, а).

Логарифмическая фазо-частотная характеристика для всех частот совпадает с осью частот, т.к. $\varphi = 0$.



а б

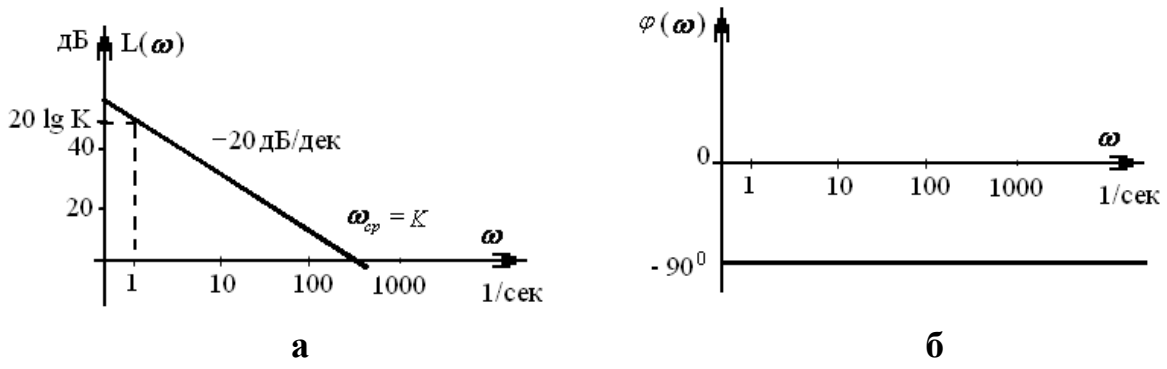
Рисунок 13 – Логарифмические амплитудно-частотная (а) и логарифмическая фазо-частотная (б) характеристики безынерционного звена

Интегрирующее звено. Передаточная функция идеального интегрирующего звена: $W(p) = \frac{K}{p}$. Комплексная частотная характеристика звена: $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-j90^0}$. АЧХ интегрирующего звена: $A(\omega) = \frac{K}{\omega}$, ФЧХ звена: $\varphi(\omega) = -90^0$. Логарифмическая амплитудно-частотная функция интегрирующего звена:

$$L(\omega) = 20\lg A(j\omega) = 20\lg\frac{K}{\omega} = 20\lg K - 20\lg\omega. \quad (8.2)$$

ЛАЧХ представляет собой прямую линию, проходящую через точку с координатами $\omega = 1\,сек^{-1}$ и $L(\omega) = 20\lg K$, имеющую отрицательный наклон $20\,^{дб}\!/_{дек}$, так как увеличение частоты в десять раз вызовет увеличение $\lg\omega$ на одну единицу, то есть уменьшение $L(\omega)$ на 20 *дб* (см. рисунок 14,а).

ЛФЧХ звена строится по уравнению $\varphi(\omega) = -90^0$, из которой видно, что характеристика не зависит от частоты и представляет собой прямую проходящую параллельно оси абсцисс на расстоянии -90^0 (см. рисунок 14, б).



а **б**

Рисунок 14 – Логарифмические амплитудно-частотные (а) и фазо-частотные (б) характеристики идеального интегрующего звена

Размерность коэффициента K должна быть $[сек^{-1}]$. Аналогичным образом можно показать, что в случае $A(\omega)=\frac{k_1}{\omega^2}$ ЛАЧХ представляет собой прямую линию с отрицательным наклоном $40\,{}^{дб}\!/_{дек}$. Эта прямая может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке $\omega=1\,сек^{-1}$ и $L(\omega)=20\lg k_1$ или по частоте среза $\omega=\sqrt{k_1}$.

Очевидно, что размерность коэффициента k_1 в этом случае должна быть $[сек^{-2}]$.

Дифференцирующее звено. Передаточная функция идеального дифференцирующего звена имеет следующий вид: $W(p)=K\cdot p$.

Комплексная частотная функция передачи: $W(j\omega)=j\omega K=\omega K\cdot e^{j90^\circ}$.

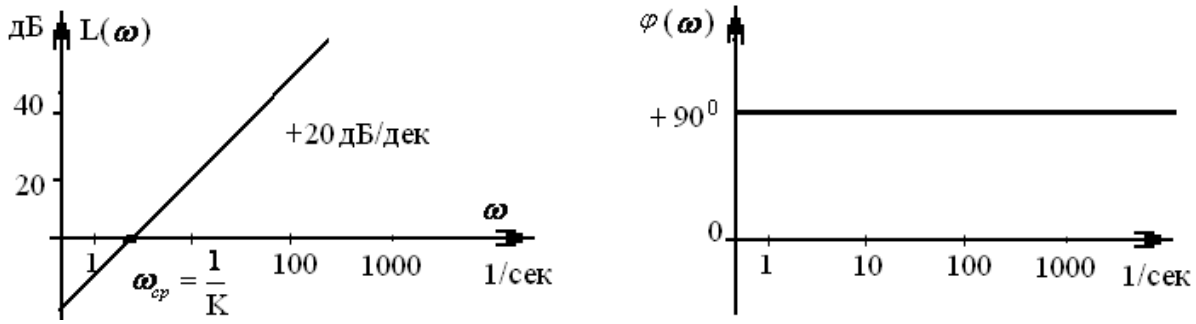
АЧХ звена: $A(\omega)=\omega K$, ФЧХ звена: $\varphi(\omega)=90^\circ$.

Логарифмическая амплитудно-частотная функция идеального дифференцирующего звена:

$$L(\omega)=20\lg|W(j\omega)|=20\lg A(\omega)=20\lg K+20\lg\omega. \qquad (8.3)$$

ЛАЧХ звена представляет собой прямую линию с наклоном $+20\,дБ/дек$, проходящая через нуль при $\omega=\frac{1}{K}$.

ЛФЧХ представляет собой прямую линию, параллельную оси абсцисс и находящуюся от нее на расстоянии $+90^\circ$ (см. рисунок 15, б.)



а б

Рисунок 15 – Логарифмические амплитудно-частотные (а) и фазо-частотные (б) характеристики идеального дифференцирующего звена

Инерционное звено первого порядка (апериодическое).

Передаточная функция инерционного звена:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}. \tag{8.4}$$

Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega \cdot T} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}\, e^{-j\, arctg(\omega \cdot T)} = W(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}. \tag{8.5}$$

Амплитудно-частотная функция: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$.

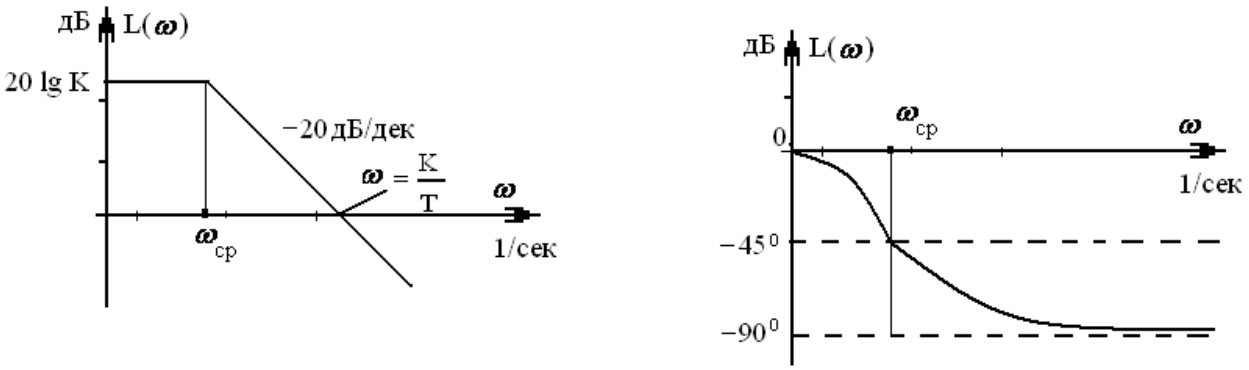
Фазо-частотная функция: $\varphi(\omega) = -arctg(\omega \cdot T)$.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика инерционного звена:

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}\right) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20\lg K - 10\lg(1 + \omega^2 T^2).$$

При малых $\omega^2 T^2 << 1$ имеем $L(\omega) = 20\lg K$. Эта низкочастотная асимптота параллельная оси абсцисс. При больших частотах $\omega^2 T^2 >> 1$ имеем $L(\omega) \approx 20\lg K - 20\lg \omega T$. Это высокочастотная асимптота, которая уменьшается на 20 дБ/дек.

Асимптотическая ЛАЧХ образуется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_{CP} = \frac{1}{T}$, так как при этой частоте удовлетворяются уравнения обеих асимптот. ЛАЧХ инерционного звена показаны на рисунке 16.



а б

Рисунок 16 – Логарифмические амплитудно-частотная (а) и фазо-частотная(б) характеристики инерционного звена

Колебательное звено. Передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Частотная функция колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1}.$$

Амплитудно-частотная функция:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\omega\xi T)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + 2\omega^2 T^2 (2\xi^2 - 1) + \omega^4 T^4}}.$$

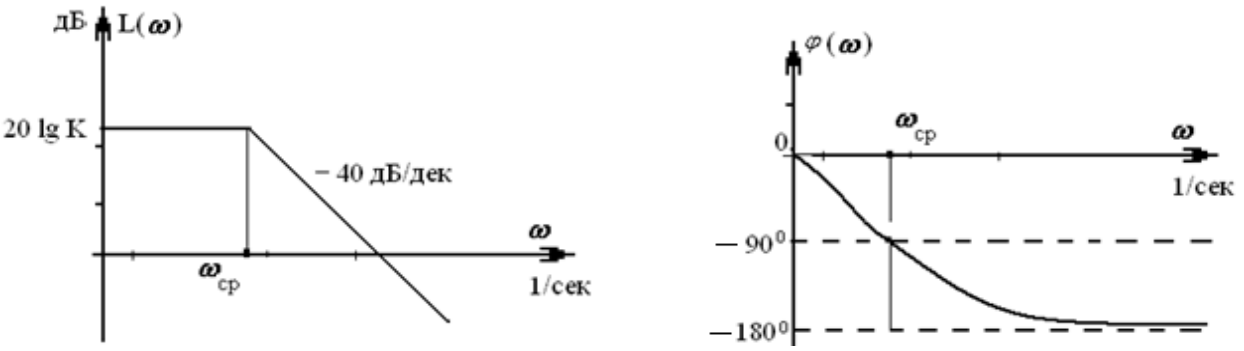
Логарифмическая амплитудная частотная характеристика колебательного звена строится по выражению

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1 + 2\omega^2 T^2 (2\xi^2 - 1) + \omega^4 T^4} =$$
$$= 20\lg K - 10\lg\left[1 + 2\omega^2 T^2 (2\xi^2 -) + \omega^4 T^4\right].$$

Рассматривается два участка, при малых частотах и высоких частотах:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg K, & при \quad \omega T << 1, \\ 20\lg K - 40\lg \omega T, & при \quad \omega T >> 1. \end{cases}$$

Асимптотическая ЛАЧХ составляется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_{CP} = \frac{1}{T}$. Низкочастотная асимптота параллельна оси абсцисс, а высокочастотная имеет отрицательный наклон и уменьшается на 40 дБ/дек. Асимптотические ЛАЧХ колебательного звена показаны на рисунке 17.



а б

Рисунок 17 – Логарифмические амплитудно-частотная (а) и фазо-частотная (б) характеристики колебательного звена

9 Лекция № 9. Структурные схемы и эквивалентные преобразования структурных схем

Содержание лекции:
- структурные схемы систем автоматического управления;
- элементы структурных схем и их соединения;
- эквивалентные преобразования структурных схем;
- нахождение эквивалентной передаточной функции.

Цель лекции:
- изучить соединения элементов структурной схемы;
- изучить и освоить методы нахождения эквивалентной передаточной функции при различных соединениях элементов структурной схемы.

9.1 Структурные схемы и соединения элементов

Структурной схемой в ТАУ называют графическое изображение математической модели системы управления. Элементами структурных схем являются звенья, узлы, суммирующие и сравнивающие элементы. Звено изображается в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин, внутри которых записывается передаточная функция звена. Точка на линии связи, в которой происходит разветвление называется узлом. Элементы структурных схем изображены на рисунке 18.

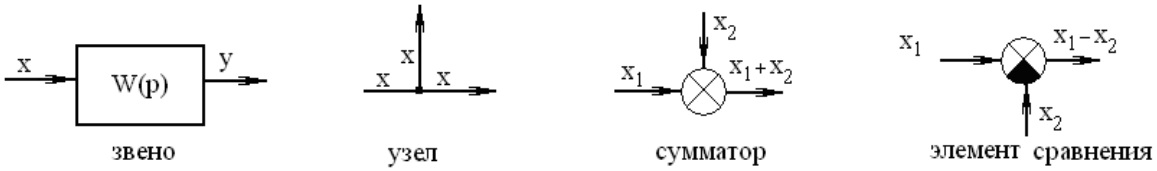


Рисунок 18 - Элементы структурной схемы

Какой бы сложной ни была схема, в ней всегда различают три типа соединений:

- последовательное;
- параллельное;
- последовательное с обратной связью.

Последовательное соединение звеньев. При преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(s)$ (см. рисунок 19), равной произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s), \tag{9.1}$$

при этом модули комплексных коэффициентов перемножаются, а аргументы складываются.

При последовательном соединении выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего звена:

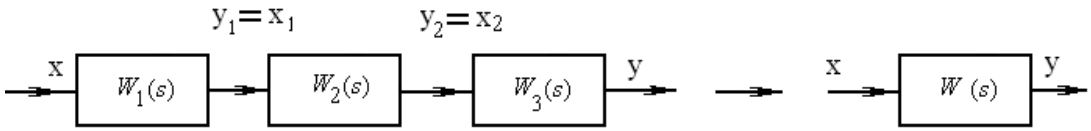


Рисунок 19- Последовательное соединенье звеньев

$$W_1(s) = \frac{y_1}{x}; \quad W_2(s) = \frac{y_2}{x_1}; \quad W_3(s) = \frac{y}{x_2}. \tag{9.2}$$

Из этих выражений

$$y_1 = W_1(s) \cdot x; \quad y_2 = W_2(s) \cdot x_1; \quad y = W_3(s) \cdot x_2. \tag{9.3}$$

Учитывая, что $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y = W_3(s) \cdot W_2(s) \cdot W_1(s) \cdot x.$

Передаточная функция соединения в целом

$$W(s) = \frac{y}{x} = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s). \tag{9.4}$$

Цепь из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним эквивалентным звеном, с передаточной функцией равной произведению передаточных функций этих звеньев.

Параллельное соединение звеньев. При параллельном соединении на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные величины складываются. Цепь с параллельным соединением звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(s)$ равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев (см. рисунок 20):

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s).$$

Цепь из параллельно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев. Соответственно, переходная функция $h(t)=\sum_{k=1}^{n}h_k(t)$, весовая функция $w(t)=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)$

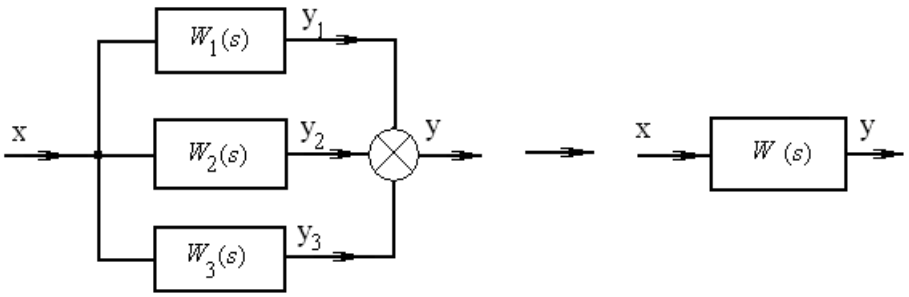


Рисунок 20- Параллельное соединение звеньев

Для каждого звена в операторной форме можно записать:

$$y_1(s)=x(s)\cdot W_1(s);\quad y_2(s)=x(s)\cdot W_2(s);$$
$$y_3(s)=x(s)\cdot W_3(s);\ldots\ y_n(s)=x(s)\cdot W_n(s) \qquad (9.5)$$

тогда выход всей системы

$$y(s)=y_1(s)+y_2(s)+\ldots.=x(s)[W_1(s)+W_2(s)+\ldots W_n(s)]=x(s)\sum_{i=1}^{n}W_i(s). \qquad (9.6)$$

Таким образом, передаточная функция системы параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

9.2 Эквивалентные преобразования структурных схем

Системы с различными структурными схемами могут обладать одинаковыми передаточными функциями, т.е. могут быть динамически эквивалентными. Поэтому необходимо знать общие правила преобразования структурных схем с сохранением динамических характеристик системы.
Критерий правильности преобразования структурной схемы заключается в том, чтобы входные и выходные сигналы преобразуемого участка до и после преобразования были одинаковы.

1. Перенос узла (см. рисунок 21).

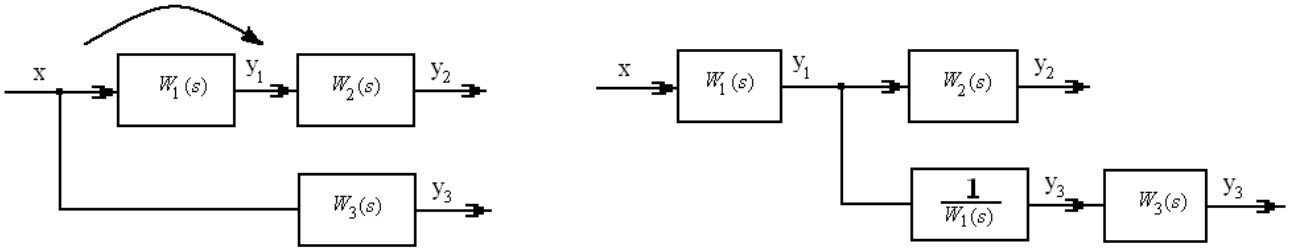


Рисунок 21- Перенос узла по направлению распространения сигнала

Перенос узла через звено с передаточной функцией $W_1(s)$ по направлению распространения сигнала сопровождается появлением в боковой цепи звена, имеющего передаточную функцию $\frac{1}{W_1(s)}$.

При переносе узла через звено против направления распространения сигнала (см. рисунок 22), то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

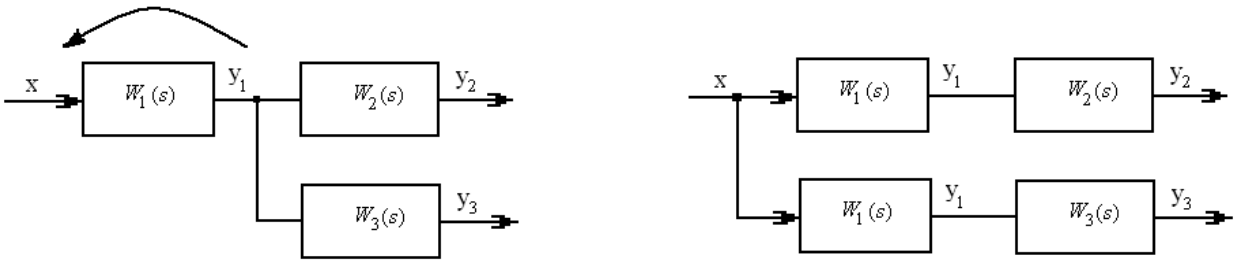


Рисунок 22 - Перенос узла против распространения сигнала

2. Перенос узла через узел осуществляется без дополнительных преобразований.

3. Перенос сумматора. При переносе сумматора через звено с передаточной функцией $W_1(s)$ против направления передачи сигнала, необходимо в линию связи между внешним воздействием f и сумматором включить дополнительное звено с передаточной функцией обратной передаточной функции звена $\frac{1}{W_1(s)}$, через которое переносится сумматор (см. рисунок 23).

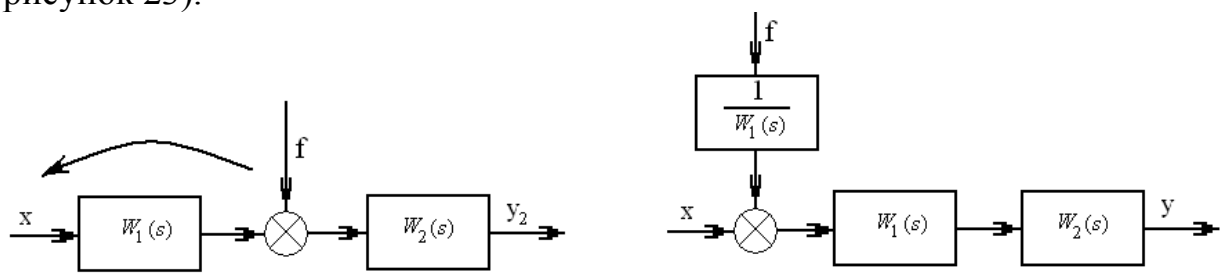


Рисунок 23 - Перенос сумматора против направления сигнала

Внешнее воздействие f, приложенное к входу звена с передаточной функцией $W_1(s)$, можно перенести на его выход, поместив между воздействием и выходом звена дополнительное звено с той же передаточной функцией $W_1(s)$

При переносе сумматора через звено с передаточной функцией $W_1(s)$ по направлению распространения сигнала (см. рисунок 24), необходимо в линию связи между внешним воздействием и сумматором включить дополнительное звено с передаточной функцией звена, через которое переносится сумматор.

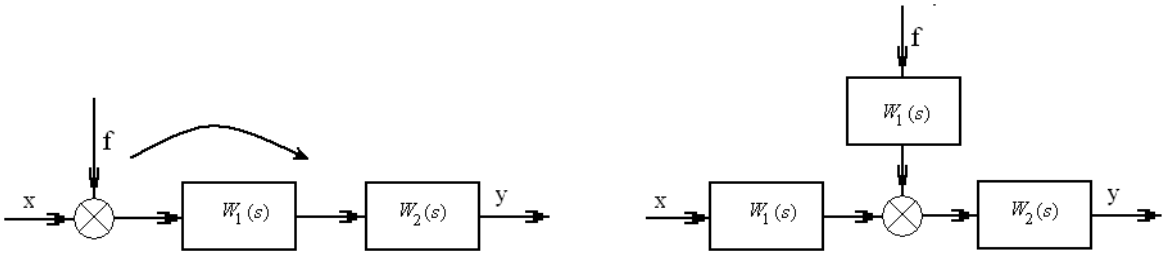


Рисунок 24- Перенос сумматора по направлению сигнала

5. Перенос сумматора через сумматор производится без дополнительных преобразований (от перемены мест слагаемых сумма не изменяется).

При перестановке узла и сумматора по направлению сигнала в боковой ветви преобразованного участка появляется дополнительное звено – суммирующее или сравнивающее.

10 Лекция № 10. Уравнения замкнутой и разомкнутой систем автоматического управления

Содержание лекции:

- встречно-параллельное соединение;
- передаточные функции замкнутых систем управления;
- эквивалентные преобразования замкнутых систем;
- нахождение эквивалентной передаточной функции замкнутых систем.

Цель лекции:

- изучить встречно-параллельное соединение элементов;
- изучить и освоить методы нахождения эквивалентной передаточной функции замкнутых систем автоматического управления.

10. 1 Встречно-параллельное соединение

Обратной связью называют передачу сигнала с выхода на его вход, где сигнал обратной связи алгебраически суммируется с внешним сигналом.

Принято считать, что звено охвачено обратной связью, если его выходной сигнал через какое-либо другое звено подается на вход. При этом если сигнал y_1 обратной связи вычитается из входного воздействия x, т.е. $e_1 = x - y_1$, то обратную связь называют отрицательной. Если сигнал y_1 обратной связи складывается с входным воздействием x, т.е. $e_1 = x + y_1$, то обратную связь называют положительной.

Передаточная функция соединения с положительной обратной связью имеет вид:

$$W_c = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_{ПР}\ (s)}{1 - W_{ПР}(s) \cdot W_{ОС}(s)}. \qquad (10.1)$$

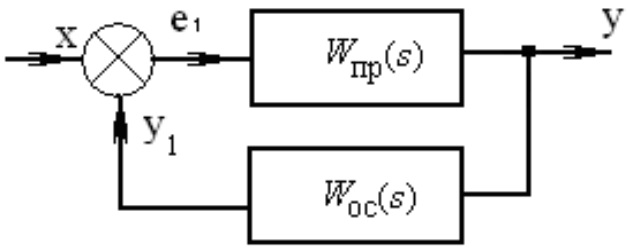


Рисунок 25- Встречно-параллельное соединение двух звеньев

Для соединения с отрицательной обратной связью передаточная функция имеет вид:

$$W_c = \frac{y(s)}{y_0(s)} = \frac{W_{ПР}\ (s)}{1 + W_{ПР}(s) \cdot W_{ОС}(s)}. \qquad (10.2)$$

Передаточная функция замкнутой цепи с отрицательной обратной связью – звена, охваченной отрицательной обратной связью, равна передаточной функции прямой цепи деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутой цепи.

На практике наиболее распространенными являются системы с отрицательной обратной связью, к ним относятся, например, все одноконтурные системы автоматического регулирования, причем в прямой цепи расположен объект, а в обратной – регулятор.

Если выходной сигнал системы подать в качестве сигнала обратной связи прямо на вход системы, не пропуская ни через какое звено (см. рисунок 26), то в этом случае передаточная функция: $W(s) = \frac{W_{ПР}(s)}{1 + W_{ПР}(s)}$, $W_{ОС}(s) = 1$, т.к. $y_{ОС} = y$.

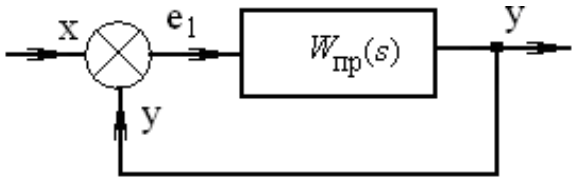


Рисунок 26 - Система с жесткой обратной связью

10.2 Передаточная функция замкнутой системы

Замкнутую систему называют одноконтурной (см. рисунок 27), если при ее размыкании в какой-либо точке получается цепочка из последовательно соединенных звеньев или цепь, не содержащая параллельных и обратных связей.

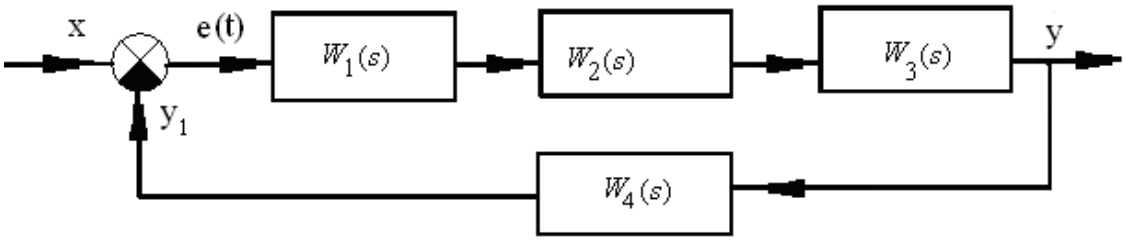


Рисунок 27 – Замкнутая автоматическая система

Используя правила эквивалентных преобразований структурных схем, получаем следующее правило: передаточная функция замкнутой одноконтурной системы относительно задающего воздействия $x(t)$ и выходной величины $y(t)$ равна передаточной функции прямой цепи $W_{ПР}(s)$, деленной на $[1+W(s)]$ при отрицательной обратной связи и на $[1-W(s)]$ при положительной обратной связи:

$$W(s)=\frac{W_{ПР}(s)}{1\pm W(s)}=\frac{W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)}{1\pm W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)\cdot W_4(s)}, \qquad (10.3)$$

где

$W(s)=W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)\cdot W_4(s)$ - передаточная функция разомкнутой цепи.

Знак «+» соответствует отрицательной обратной связи, а знак «–» соответствует положительной обратной связи.

Разомкнутая цепь:

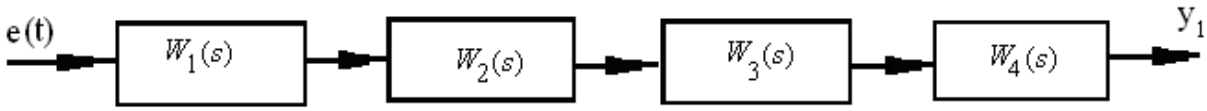


Рисунок 28 – Разомкнутая система

Передаточная функция замкнутой системы, определяющая зависимость выходной величины $y(t)$ от задающего воздействия $x(t)$, является основной передаточной функцией системы и называется передаточной функцией по каналу задающего воздействия.

Передаточная функция контура достаточна для определения характеристического полинома системы, который может быть определен как $1+W(p)$. Поэтому это достаточно для определения полюсов системы.

Характеристический полином замкнутой системы определяется суммой числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы.

11 Лекция № 11. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Гурвица

Содержание лекции:
- общие понятия устойчивости;
- алгебраические критерии устойчивости, критерий Гурвица;

Цель лекции:
- изучить алгебраические критерии устойчивости;
- изучить и влияние корней характеристического уравнения на устойчивость системы.

11.1 Общие понятия устойчивости

Одним из важных свойств любой системы автоматического регулирования является её устойчивость. Для того чтобы система автоматического регулирования сохраняла свойства работоспособности, необходимо, чтобы она была устойчивой. Поэтому анализ устойчивости является одной из основных задач теории управления.

Система автоматического регулирования является устойчивой, если она возвращается в состояние равновесия, после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Система неустойчива, если она не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели.

Любая система автоматического регулирования должна быть устойчивой. Это основное требование, которое предъявляется ко всем системам регулирования.

Различают три типа систем:

а) устойчивые – системы, которые после снятия возмущений возвращаются в исходное состояние равновесия;

б) нейтральные – системы, которые после снятия возмущения возвращаются в состояние равновесия отличное от исходного;

в) неустойчивые – системы, в которых не устанавливается равновесие после снятия возмущений.

Чтобы наглядно представить устойчивость равновесия, можно представить шар, лежащий в некотором углублении. При всяком отклонении шара от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему точно (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области равновесия (при наличие сил трения). Такое положение шара будет устойчивым (см. рисунок 29). Введем понятия о невозмущенном состоянии равновесия, соответствующем точке - A_0 и возмущенном состоянии равновесия - A_2. После прекращения действия внешних сил шар возвратился в точку A_0 или A_1. Условие устойчивости можно сформулировать так: система называется устойчивой, если из возмущенного состояния равновесия она

перейдет в некоторую область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

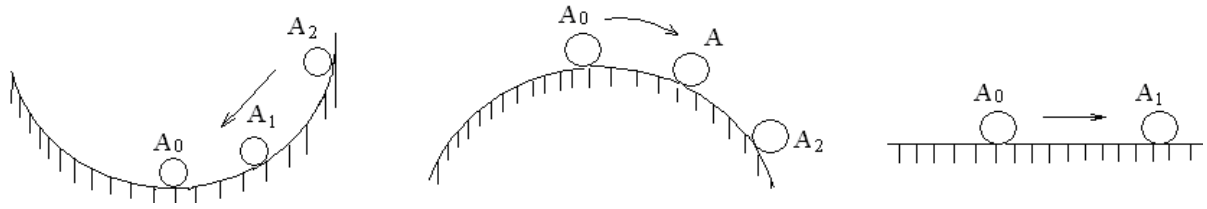


Рисунок 29 - Определение устойчивости системы

В общем случае, рассматривая нелинейные системы, вводят понятие устойчивости «в малом», «в большом», «в целом».

Система устойчива «в малом»,если констатируются лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо ее границы.

Систему называют устойчивой «в большом», когда определены границы области устойчивости, т.е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области.

Если система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют устойчивой «в целом».

11.2 Алгебраические критерии устойчивости

Для получения условий устойчивости удобнее использовать дифференциальные уравнения.

Линейная система автоматического управления в общем случае описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y(t) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m\right) x(t), \qquad (11.1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – постоянные коэффициенты.

Решение уравнения можно представить в виде суммы свободной и вынужденной составляющей:

$$y(t) = y_в(t) + y_{св}(t), \qquad (11.2)$$

где $y_в(t)$ – вынужденная составляющая переходного процесса, определяемая частным решением неоднородного дифференциального уравнения и зависящая от вида внешнего воздействия и на устойчивость не влияет, $y_{св}(t)$- свободная составляющая, является общим решением однородного дифференциального уравнения без правой части $\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y_{св}(t) = 0$.

С точки зрения устойчивости интерес представляет только свободная составляющая.

Математическое определение устойчивости формулируется следующим образом, система является устойчивой, если свободная составляющая переходного процесса с течением времени стремится к нулю т.е. $y_{CB}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, при этом выходная функция будет стремится к вынужденной составляющей, определяемой внешним воздействием.

Если свободная составляющая не ограничено возрастает, т.е. $y_{CB}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то система неустойчива.

Характер изменения свободной составляющей зависит от вида корней характеристического уравнения: $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0$.

1. Характеристическое уравнение имеет вещественные отрицательные корни p_i, тогда свободную составляющую можно записать:

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + ... + C_n e^{s_n t}, \qquad (11.3)$$

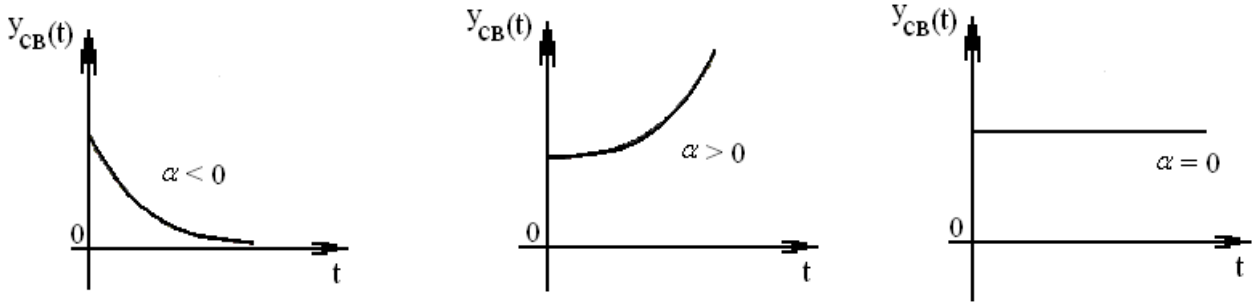
где C_i - постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий;

p_i –корни характеристического уравнения.

1) если все корни отрицательные, то каждая составляющая $C_i e^{p_i t} \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. $y_{св}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В этом случае система устойчива (см. рисунок 30, а);

2) если хотя бы один корень p_i - положительный, то система неустойчива (рисунок 30, б);

3) характеристическое уравнение имеет один нулевой корень, а остальные корни вещественные и отрицательные. Система находится на границе устойчивости (см. рисунок 30, в).



а б в

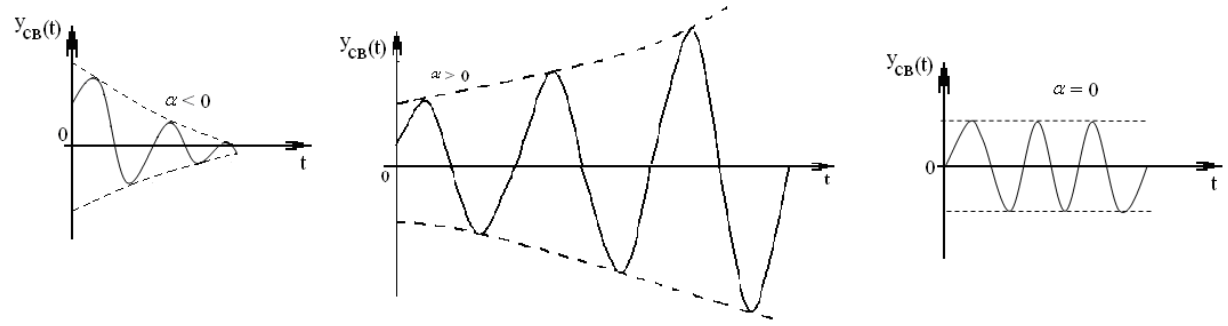
Рисунок 30 - Вид свободных составляющих при вещественных корнях характеристического уравнения

2. Характеристическое уравнение имеет пару сопряженных комплексных корней: $p_к = \alpha + j\beta;\ p_{к+1} = \alpha - j\beta$, тогда свободная составляющая имеет следующий вид: $y_{св}(t) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$.

Если вещественная часть α комплексно – сопряженных корней будет отрицательна, то свободная составляющая имеет вид затухающих колебаний с амплитудой $Ae^{-\alpha t} \to 0$ при $t \to \infty$ (см. рисунок 31,а), то есть система является устойчивой.

Если $\alpha_k > 0$, то имеют место расходящиеся колебания (см. рисунок 31,б) (система неустойчива).

Если $\alpha_k = 0$, то – незатухающие колебания (см. рисунок 31,в) (система находится на границе устойчивости).



а б в

Рисунок 31 – Вид свободных составляющих при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения

Затухание или незатухание свободной составляющей зависти от знаков вещественных корней и знаков вещественных частей комплексных корней характеристического уравнения.

Для того чтобы система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть, т.е. лежали в левой полуплоскости (см. рисунок 32).

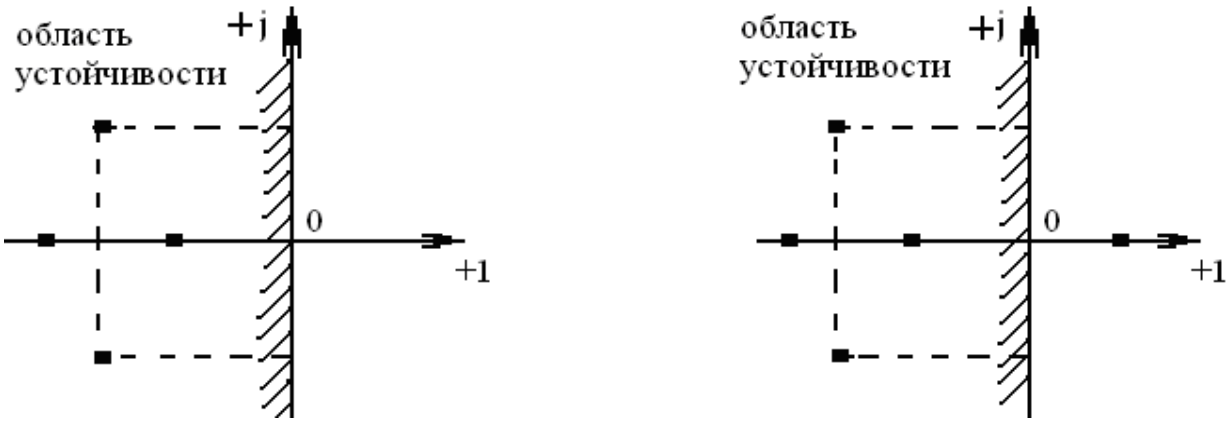


Рисунок 32 – Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

Обычно корни с отрицательной вещественной частью называются левыми, поскольку они в комплексной плоскости расположены слева от мнимой оси, а с корни с положительными вещественными частями – правыми корнями.

Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то система неустойчива.

Этот вывод справедлив только для линейных систем. В действительности же большинство систем нелинейно, поэтому необходимо знать, насколько заключение об устойчивости системы, сделанное по линеаризованным уравнениям будет справедливо для реальных систем.

На этот вопрос дают ответы теоремы А.М. Ляпунова (1892).

Теорема 1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система будет устойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и выше порядков малости не могут изменить устойчивости системы.

Теорема 2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система будет неустойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и выше порядков малости не могут придать системе устойчивость.

Вычисления корней просто лишь для характеристических уравнений первой и второй степени. Общие выражения для корней третьей и выше степеней очень громоздки и практически малопригодны. Поэтому важное значение приобретают правила, которые позволяют определять устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют критериями устойчивости. Они разделяются на алгебраические и частотные.

К алгебраическим критериям относятся критерии Рауса, Гурвица, Льенар-Шипара. К частотным критериям относятся критерии Михайлова, Найквиста.

11.3 Критерий устойчивости Гурвица

Для исследования устойчивости линейной системы достаточно найти корни его характеристического полинома. Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от оси) такой полином называется устойчивым, соответствующая линейная система устойчива. Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называется неустойчивым.

На ранней стадии развития ТАУ актуальной была задача определения устойчивости полинома без вычисления его корней. Поэтому важное значение приобретают правила, которые позволяют определить устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют критериями устойчивости. С помощью критериев устойчивости можно установить, устойчива система или

нет, выяснить как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе. Критерии устойчивости могут быть разделены на алгебраические и частотные.

Из алгебраических критериев устойчивости наиболее широкое распространение получили критерии устойчивости Рауса и Гурвица.

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_0 = 0 .$$

Прежде всего для устойчивости все коэффициенты a_i должны быть положительными. Это необходимое условие устойчивости полинома: $a_0 > 0, a_1 > 0, ...a_n > 0$.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни является левыми, т.е. они расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Однако при $n > 2$ это условие недостаточно, если полином имеет комплексно-сопряженные корни. Для систем третьего и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но не достаточным. В это случае все вещественные корни характеристического уравнения левые, а комплексные же корни могут быть и правыми, т.е. расположенными в правой полуплоскости комплексной плоскости.

Критерий устойчивости Гурвица позволяет по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней сделать вывод об устойчивости системы.

Критерий устойчивости Гурвица использует матрицу размером $n \times n$ составленную из коэффициентов полинома.

Матрица Гурвица строится следующим образом: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n – степень характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \underline{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & ... & 0 \\ \underline{a_0} & \underline{a_2} & a_4 & a_6 & ... & 0 \\ \underline{0} & \underline{a_1} & \underline{a_3} & a_5 & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix}. \qquad (11.4)$$

Отчеркивая в главном определителе Гурвица, как показано пунктиром, диагональные миноры, получаем определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \ldots; \qquad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Номер определителя определяется номером коэффициента по диагонали матрицы Гурвица.

Критерий Гурвица позволяет получать условия устойчивости для систем любого порядка и формулируется следующим образом: для того чтобы корни характеристического уравнения линейной системы имели отрицательные вещественные части, а система была устойчивой, необходимо и достаточно при положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, чтобы все диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны.

Рассмотрим алгебраические критерии устойчивости. Критерий устойчивости Гурвица (1895 г.) позволяет судить об устойчивости линейной системы по коэффициентам характеристического уравнения.

Покажем, что необходимым и достаточным условием устойчивости систем I и II порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

Например. 1. Характеристическое уравнение первого порядка

$$a_0 p + a_1 = 0.$$

Условие устойчивости: оба коэффициента $a_0 > 0,\ a_1 > 0,$ единственный корень p отрицательный $p = -\dfrac{a_1}{a_2}$, и система устойчива.

2. Характеристическое уравнение второго порядка: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0,$

Корень уравнения: $p_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = -\alpha \pm j\beta$.

Условие устойчивости $a_0 > 0,\ a_1 > 0, a_2 > 0.$

3. Характеристическое уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости: $a_0 > 0,\ a_1 > 0,$ $a_2 > 0,\ a_3 > 0.$

Матрица Гурвица:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

4. Характеристическое уравнение четвертого порядка:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости: $a_0 > 0,\ \ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0.$

Матрица Гурвица:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_1^{\,2} a_4 > 0.$$

При $a_n > 0$, $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то для проверки устойчивости системы достаточно найти только определители Гурвица Δ_1 до Δ_{n-1}.

При $n \geq 5$ процесс раскрытия определителей становиться довольно трудоемким и громоздким. Поэтому критерий устойчивости Гурвица обычно применяют при $n \leq 4$. При $n \geq 5$ целесообразно применять формулируемый ниже критерий устойчивости Льенара-Шипара, либо при использовании критерия устойчивости Гурвица переходить к численным методам с использованием ЭВМ. Критерий устойчивости Льенара-Шипара (1914г) является модификацией критерия Гурвица.

Доказано, что в том случае, когда все коэффициенты характеристического уравнения положительны $a_0 > 0,\ a_1 > 0, \ldots\ a_n > 0,$ из того факта, что положительны все определители $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5 \ldots$ с нечетными индексами, следует и положительность определителей $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 \ldots$ с четными индексами, и наоборот.

Таким образом, для того чтобы линейная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, .. \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, .. \end{array}\right\}. \qquad (11.5)$$

Последняя формулировка называется критерием устойчивости Льенара-Шипара, который требует раскрытия меньшего числа определителей, чем обычный критерий Гурвица.

12 Лекция № 12. Частотные критерии устойчивости систем. Критерий устойчивости Михайлова и Найквиста

Содержание лекции:

- частотные критерий устойчивости Михайлова;

- построение годографа Михайлова;
- критерий Найквиста.

Цель лекции:

- изучить частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста;
- изучить и освоить методы определения устойчивости по критерию Михайлова и Найквиста.

12.1 Критерий Михайлова

Критерий устойчивости А.В. Михайлова (1938г) является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента, рассмотренного выше.

Пусть дано характеристическое уравнение линейной системы

$$N(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (12.1)$$

Если подставить в полином $N(p)$ чисто мнимое значение $p = j\omega$, то получим комплексный полином

$$N(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + ... + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = \left|N(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - ... \\ Y(\omega) &= \omega\left(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - ...\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (12.2)$$

где

$X(\omega)$ называются вещественной функцией Михайлова;

$Y(\omega)$ мнимой функцией Михайлова.

При изменении частоты ω вектор $N(j\omega)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую кривой (годографом) Михайлова.

Угол поворота $N(j\omega)$ вокруг начала координат при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ равен

$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta Arg\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m). \qquad (12.3)$$

Так как для устойчивых линейных систем количество правых корней m=0, то

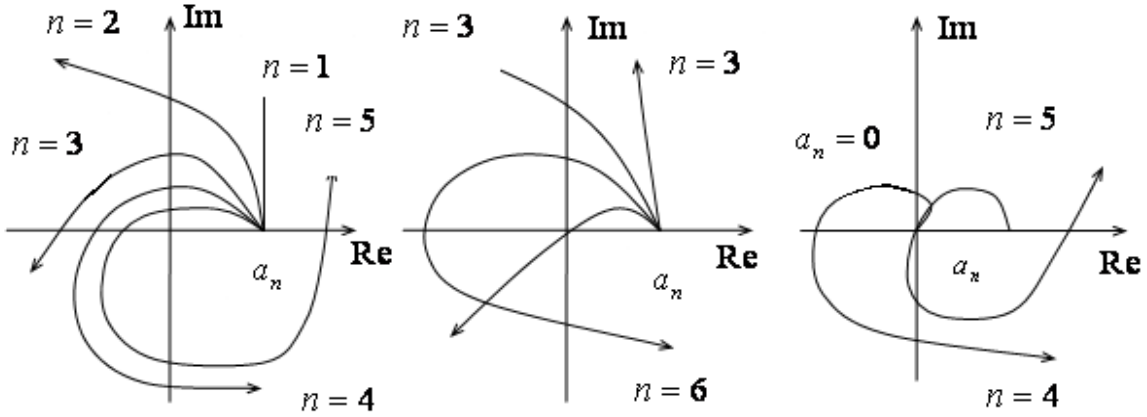
$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} n. \qquad (12.4)$$

Условие является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми, т.е. среди них не было нулевых.

Последнее условие можно записать так: $N(j\omega) \neq 0$, при любом ω.

Для того, чтобы линейная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор $N(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $n\frac{\pi}{2}$, где n - степень характеристического уравнения.

На рисунке 33, а показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого $(n=1)$и кончая пятым $(n=5)$ порядком. Для удобства сравнения коэффициенты a_n во всех случаях приняты одинаковыми. На рисунке 33, б показаны типичные кривые Михайлова для неустойчивых систем. На рисунке 33, в показаны типичные кривые Михайлова для систем находящихся на границе устойчивости.



а б в

Рисунок 33 – Примеры различных видов годографов Михайлова

Достоинства критерия Михайлова:

а) пригодность для анализа устойчивости систем любого порядка;

б) наглядность, т.к. по виду годографа можно судить не только об устойчивости системы, но и наметить пути для обеспечения устойчивости.

12.2 Критерий устойчивости Найквиста

Этот частотный критерий устойчивости, разработанный в 1932 г. американским ученым Г.Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФХ разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{c_0p^n+cp^{n-1}+\ldots+c_n},\ m\le n \qquad (12.5)$$

Подставляя вместо $p=j\omega$, получаем частотную передаточную функция разомкнутой системы

$$W(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{c_0(j\omega)^n+c_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+c_n}= \qquad (12.6)$$

$$=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $W(j\omega)$ меняясь по величине и направлению будет описывать на комплексной плоскости некоторую кривую, называемую АФХ разомкнутой системы (см. рисунок 34).

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p)=\frac{W_{np}(p)}{1+W(p)}. \qquad (12.7)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$W_1(p)=1+W(p)=\frac{R(p)+Q(p)}{Q(p)}=\frac{D(p)}{Q(p)}, \qquad (12.8)$$

где $D(p)=Q(p)+R(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n$ - характеристический полином замкнутой системы; $Q(p)=c_0p^n+c_1p^{n-1}+...+c_n$ - характеристический полином разомкнутой системы.

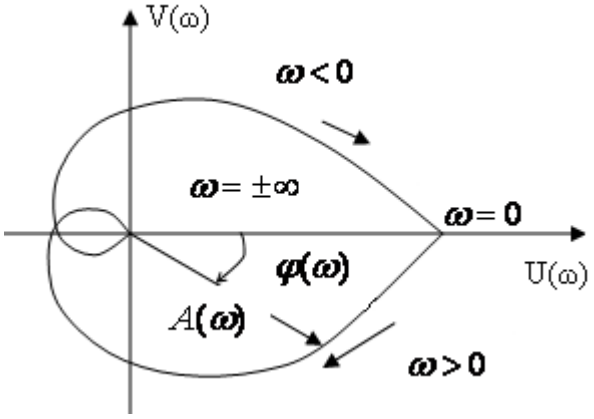


Рисунок 34 – Годограф разомкнутой системы

Подставляя в $p=j\omega$, получим

$$W_1(j\omega)=1+W(j\omega)=\frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \qquad (12.9)$$

При изменении частоты ω от 0 до ∞ изменение угла поворота вектора $W_1(j\omega)$ на основе принципа аргумента будет

$$\Delta ArgW_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}=\Delta ArgD(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}-\Delta ArgQ(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}= \qquad (12.10)$$

$$\frac{\pi}{2}(n-2m)-\frac{\pi}{2}(n-2l)=\pi(l-m).$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т.е. $m=0$. Отсюда

суммарный поворот вектора $W_1(j\omega)$ устойчивой системы вокруг начала координат должен равняться

$$\Delta Arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l = 2\frac{\pi}{2} l \ , \qquad (12.11)$$

где l - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Таким образом, если разомкнутая система является неустойчивой и имеет l правых корней, то замкнутая система будет устойчива, если АФХ вспомогательной функции $W_1(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ охватывает начало координат в положительном направлении $\frac{l}{2}$ раз.

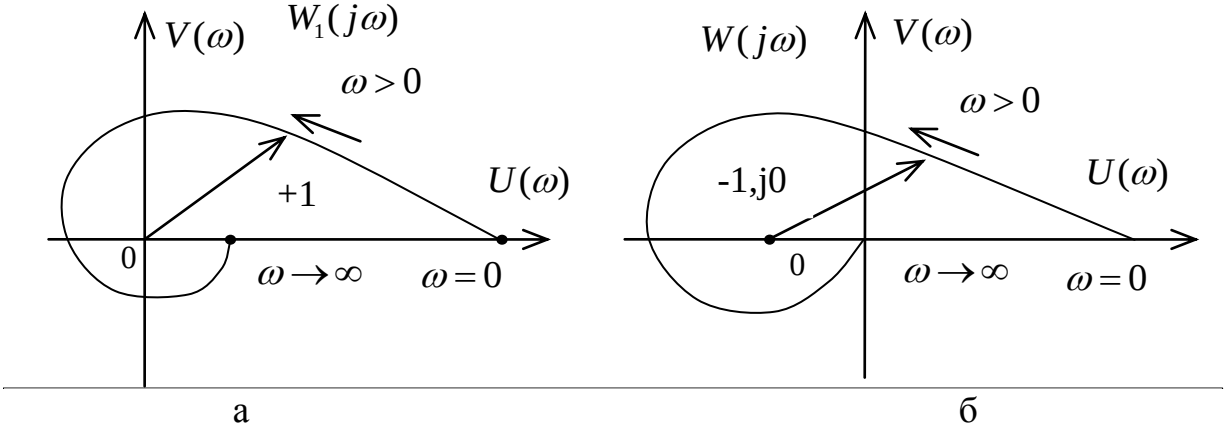
Легко заметить, что число оборотов вектора $W_1(j\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора $W(j\omega)$ вокруг точки $(-1, j0)$.

На основании сказанного вытекает следующая формулировка критерия устойчивости Найквиста: если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $\frac{l}{2}$ раз, где l - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

На рисунке 35, а показана АФХ $W_1(j\omega)$, а на рисунке 35,б - АФХ $W(j\omega)$, соответствующие устойчивой замкнутой системе, которая в разомкнутом состоянии была неустойчива и имела число правых корней $l = 2$. Обычно в реальных системах $W(j\omega)\big|_{\omega=\infty} = 0$ и поэтому $W_1(j\omega)\big|_{\omega=\infty} = 1$.

Если система в разомкнутом состоянии устойчива, то есть $l = 0$, то приращение аргумента вектора $W_1(j\omega)$ равно нулю:

$$\Delta Arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l = 0 .$$

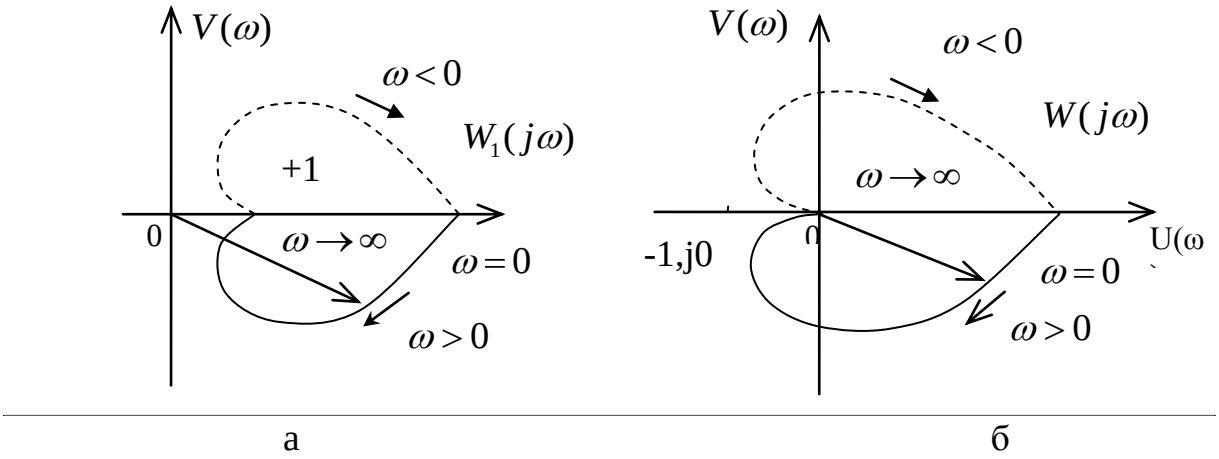


а б

Рисунок 35 – Годографы разомкнутой и замкнутой систем

Это означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ $W_1(j\omega)$ не охватывала начало координат (см.

рисунок 36, а), а АФХ $W(j\omega)$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$ (см. рисунок 36, б).



а б

Рисунок 36 – Годографы разомкнутой и замкнутой устойчивых систем

Таким образом, для этого наиболее часто встречающегося на практике случая получаем следующую формулировку критерия Найквиста:

если разомкнутая система устойчива, то замкнутая система будет устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$.

13 Лекции № 13. Качество процессов регулирования в типовых режимах. Оценка качества регулирования в установившемся режиме

Содержание лекции:

- качество процессов регулирования;
- оценка качества регулирования;
- основные показатели качества.

Цель лекции:

- изучить основные показатели качества регулирования.

13.1 Качество процессов регулирования в типовых режимах

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием пригодности САУ для практического использования. Кроме устойчивости САУ должна удовлетворять ряду требований, характеризующих работу системы как в установившемся, так и переходном режимах, т.е. обеспечивать определенное качество регулирования.

Основным показателем, характеризующим качество регулирования в установившемся режиме является точность, которая определяется величиной

отклонения регулируемой величины от ее заданного значения после окончания переходного процесса.

Рассмотрим показатели, характеризующие качество регулирования в переходном режиме. Эти показатели оцениваются по реакции системы на некоторые тестовые воздействия (единичная ступенчатая, единичная импульсная).

Наиболее широко используется ступенчатая функция

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

В результате на выходе системы получим переходную характеристику, типичный вид которой показан на рисунке 37. По этому рисунку определим основные прямые оценки качества регулирования системы.

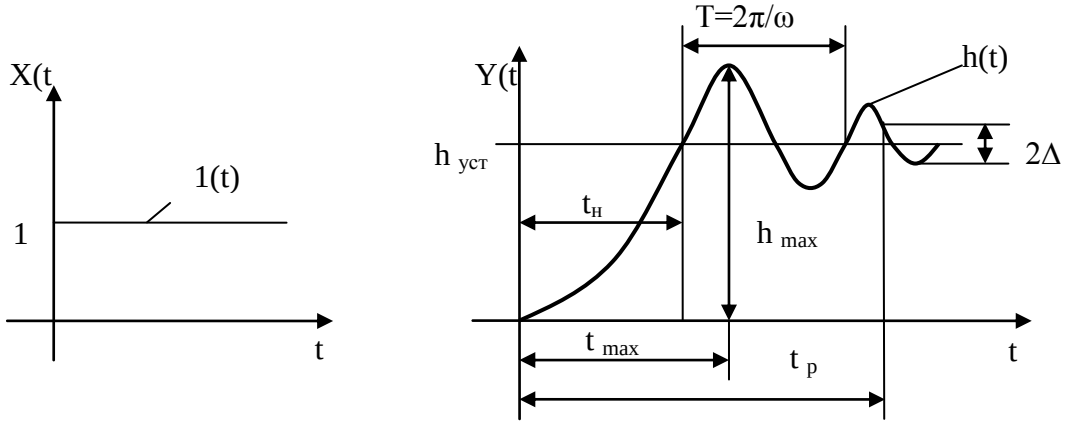


Рисунок 37- Колебательный переходной процесс при единичном ступенчатом воздействии

Основные показатели качества регулирования:

1) Время регулирования – t_p. Это длительность переходного процесса от момента приложения к системе воздействия до момента, когда отклонение регулируемой величины $h(t)$ от нового установившегося значения $h_{óñò}$ станет меньше некоторой заданной величины $\Delta = (1 \div 5)\%$.

$$h(t) - h_{óñò} < \Delta. \qquad (13.1)$$

2) Перерегулирование σ - максимальное отклонение регулируемой величины $h_{\max}$ от нового установившегося значения $h_{óñò}$ в относительных единицах или в %.

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{óñò}}{h_{óñò}} \times (100\%), \ \sigma=10 \div 30\%. \qquad (13.2)$$

3) Частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

4) Время достижения первого максимума – $t_{\max}$.

5) Время нарастания переходного процесса – t_i.

6) Число колебаний – n (за время t_p) обычно (1÷2) . Иногда n=0.

Кривая переходного процесса может быть получена расчетным путем или экспериментально. В тех случаях, когда это затруднительно, используют косвенные методы оценки качества, а прямые оценки – на заключительном этапе исследования САУ.

Косвенные методы оценки качества, не требующие построения графика переходного процесса делятся на три группы: корневые, интегральные и частотные методы.

Как было показано выше, вид корней характеристического уравнения определяет характер переходного процесса системы, поэтому можно сформулировать требования, по качеству переходных процессов не рассматривая самих переходных процессов, а накладывая определенные ограничения на корни характеристического уравнения.

Пусть САУ описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right) Y(p) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m\right) X(p). \qquad (13.3)$$

Решение уравнения ищется в виде:

$$y(t) = y_в(t) + y_{св}(t), \qquad (13.4)$$

$y_в(t)$ – вынужденная составляющая переходного процесса;

$y_{св}(t)$ – свободная составляющая;

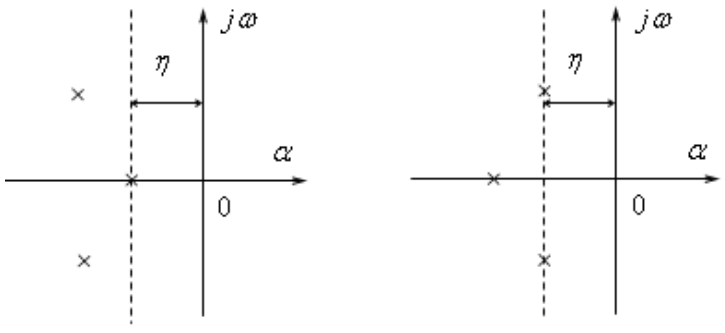
$$y_{св}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots + C_n e^{p_n t}, \qquad (13.5)$$

где $p_1, \cdots, p_n$ - корни характеристического уравнения вида

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (13.6)$$

Для оценки быстродействия используется понятие степени устойчивости η.

Под степенью устойчивости понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения (см. рисунок 38). На рисунке 38, а показан случай когда ближе к комплексной оси расположен вещественный корень, а на рисунке 38, б случай более близкого расположения комплексно-сопряженного корня. Чем больше η, тем выше быстродействие САУ.



а б

Рисунок 38 – Расположение корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к мнимой оси, дают в переходном процессе составляющие, которые затухают наиболее медленно.

$$y_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t}. \qquad (13.7)$$

Видно, что чем больше ŋ тем быстрее затухает соответствующая составляющая. Практически можно считать переходный процесс закончившимся, когда затухнет ŋ – я составляющая.

Для монотонных процессов (без колебаний) – корни вещественные:

$$t_\partial \approx \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\Delta} \qquad \Delta = (0{,}01 \div 0{,}05). \qquad (13.8)$$

Для колебательных процессов дается оценка сверху:

$$t_\partial \le \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\Delta}. \qquad (13.9)$$

Важным обстоятельством является то, что степень устойчивости можно найти без вычисления корней характеристического уравнения. Для этого в характеристическом уравнении делается подстановка вида λ=z-η.

Получаем так называемое смещенное характеристическое уравнение:

$$a_0(z-\eta)^n + a_1(z-\eta)^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (13.10)$$

Геометрически это означает перенос мнимой оси влево на расстояние η. При этом один или два корня попадают на мнимую ось, что соответствует границе устойчивости.

Теперь применив к этому уравнению любой из критериев устойчивости можно определить значения η.

Переходный процесс в САР будет колебательным, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни вида - α ± jω, которые дадут в решении уравнения составляющую вида: $Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$.

Склонность САР к колебаниям характеризуется отношением мнимой части корня ω (угловая частота колебаний) к вещественной α (коэффициент затухания), $\mu = \frac{\omega}{\alpha}$ – показатель колебательности.

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (13.11)$$

Колебательность связана с другим показателем, называемым затуханием

$$\xi = \frac{C_1 - C_2}{C_1}, \qquad (13.12)$$

где $C_1 = Ce^{-\alpha t_1}$, $C_2 = Ce^{-\alpha t_2}$, т. к. $t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, то

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\cdot\pi}{\omega}\right)} = C_1 e^{-\alpha\frac{2\pi}{\omega}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}, \quad \xi = 1 - \frac{C_2}{C_1} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Формулы связывают затухание с показателем колебательности.

В САР допускается затухание за один период $\xi = 90 \div 98\%$ или $0{,}9 \div 0{,}98$ относительных единицах.

Из формул можно получить:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\xi}}. \qquad (13.13)$$

Например: а) если $\xi = 0.9,$ то $\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-0.9}} = \frac{2\pi}{\ln 10} \approx 2.7;$

б) если $\xi = 0.98,$ то $\mu \approx 1.6.$

Это пределы для реальных систем $(1.6 \le \mu \le 2.7).$

14 Лекция № 14. Основы теории нелинейных систем автоматического управления

Содержание лекции:

- особенности нелинейных систем управления;
- простейшие нелинейные элементы;
- исследование нелинейных систем в фазовых плоскостях.

Цель лекции:

- изучить особенности нелинейных систем;
- изучить и освоить методы анализа нелинейных систем.

14.1 Особенности нелинейных систем

Нелинейной системой автоматического управления называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Различаются статические и динамические нелинейности. Первые описываются нелинейными алгебраическими уравнениями, а вторые нелинейными дифференциальными уравнениями.

Обобщенную структурную схему нелинейной системы можно представить в виде соединения двух частей: линейной части ЛЧ, описываемой системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и нелинейной части НЧ, содержащей нелинейный элемент.

Нелинейный элемент является безынерционным и его входная и выходная величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями. Характеристики нелинейных элементов могут быть самыми разнообразными. Различают два вида нелинейных элементов существенно нелинейные и несущественно нелинейные. Нелинейность считается несущественной, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе существенно не отличаются от процессов в реальной системе. Если

же замена невозможна и процессы в линеаризованной системе сильно отличаются, то нелинейность является существенной.

Главной особенностью существенно нелинейных систем заключается в том, что для них не выполняется принцип суперпозиции, а характер переходных процессов зависит от величины внешнего воздействия или начального отклонения.

Простейшие нелинейными элементами являются статические нелинейности. У них выходная величина зависит только от входной величины, причем эта зависимость однозначная.

1. Идеальное реле (двухпозиционное).

Математическое описание:

$$y = \begin{cases} -M, & при \quad x < 0; \\ M, & при \quad x > 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

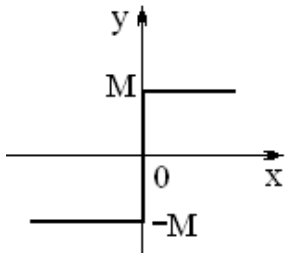


Рисунок 39 – Идеальное реле 2-х позиционное

2. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности.

Математическое описание: $$y = \begin{cases} -M, & при \quad x < -a; \\ 0, & при \quad -a \le y \le a; \\ M, & при \quad x > a. \end{cases} \tag{14.2}$$

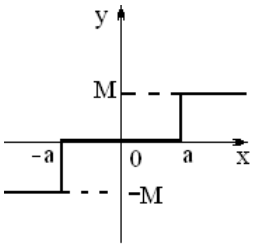


Рисунок 40 – Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности

3. Реле с насыщением и с зоной нечувствительности.

Математическое описание:

$$y = \begin{cases} -M, & при \quad y < -b; \\ k(y+a), & при -b < y < -a; \\ 0, & при -a < y < a; \\ k(y-a), & при\, a < y < b; \\ M, & при \quad y > b. \end{cases} \tag{14.3}$$

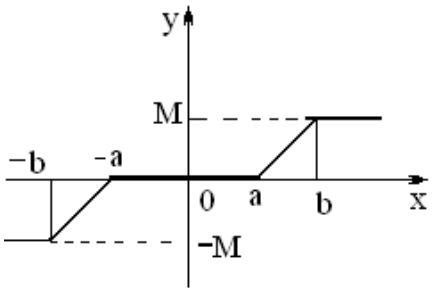


Рисунок 41 – Реле с насыщением и с зоной нечувствительности

4. Реле с зоной нечувствительности без насыщения.

Математическое описание:

$$y = \begin{cases} k(y-a), & при \quad y \ge a; \\ 0, & при \quad -a \le y \le a; \\ k(y+a), & при \quad y \le -a. \end{cases} \qquad (14.4)$$

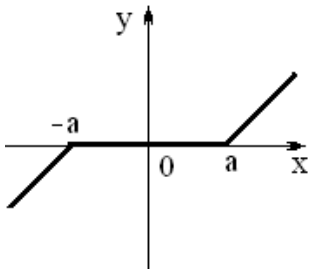


Рисунок 42 – Реле с зоной нечувствительности без насыщения

5. Реле с насыщением

Математическое описание:

$$y = \begin{cases} -M, & при \quad y \le -a; \\ \dfrac{M}{a}x, & при \quad -a \le y \le a; \\ M, & при \quad y \ge a. \end{cases}$$

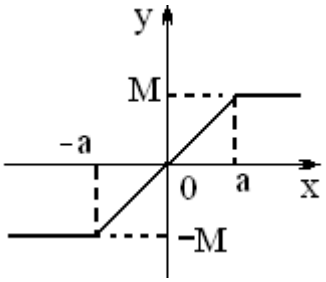


Рисунок 43 – Реле с насыщением

У динамических нелинейностей выходная величина зависит как от входной величины, так и от ее производной. Характеристика динамической нелинейности неоднозначна. На рисунке приведены неоднозначные типовые нелинейные характеристики:

1. Реле с гистерезисом.

Математическое описание при $\frac{dy}{dt} > 0$:

$$y=\begin{cases} M, & при \quad y \ge a; \\ -M, & при \quad y < a; \end{cases} \quad \text{при} \quad \frac{dy}{dt} < 0 \qquad y=\begin{cases} M, & при \quad y \ge -a; \\ -M, & при \quad y < -a; \end{cases}$$

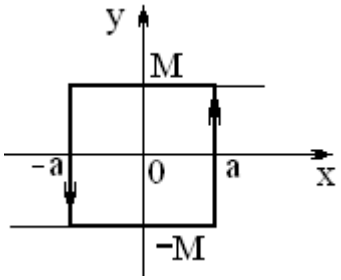


Рисунок 44 –Реле с гистерезисом

2. Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

Математическое описание при $\frac{dy}{dt} > 0$:

$$y=\begin{cases} -M, & при \quad y < -b; \\ 0, & при \quad -b \le y \le a; \\ M, & при \quad y > a. \end{cases} \quad \text{при} \quad \frac{dy}{dt} < 0 \qquad y=\begin{cases} -M, & при \quad y \le -a; \\ 0, & при \quad -a \le y \le b; \\ M, & при \quad y > b. \end{cases}$$

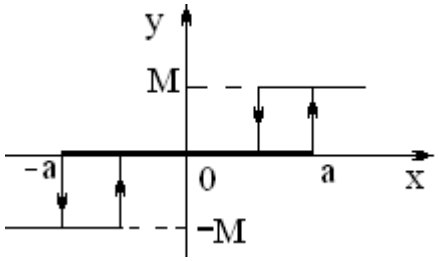


Рисунок 45- Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом

Основными задачами исследования нелинейных систем является:

а) нахождение состояний равновесия системы и исследование их устойчивости;

б) определение автоколебаний и анализ их устойчивости;

в) исследование процессов перехода к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Все методы исследования нелинейных САУ разделяются на две основные группы: точные методы и приближенные методы. К точным методам исследования относятся метод фазовой плоскости и метод Ляпунова.

14.2 Исследование нелинейных САУ в фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости разработан русским ученым А.А.Андроновым. Метод предназначен для исследования линейных и нелинейных САУ 2-го порядка, но это не ограничение, так как всегда можно понизить порядок системы.

Пусть система n- порядка описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \ldots\ ,\ x_n(t)] \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \ldots\ ,\ x_n(t)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \ldots\ ,\ x_n(t)] \end{cases} \qquad (14.5)$$

С начальными условиями $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots . x_{n0}$ при $t = 0$, f, u - возмущение и входное воздействие, x_i - переменные, имеющие в конкретной системе свой физический смысл. Это могут быть выходная величина и ее производные. Если $n = 3$, то x_1, x_2, x_3 можно представить как прямоугольные координаты.

Начальные условия определяют координаты точки M_0 при $t = 0$.

В реальном процессе управления в каждой момент времени величины x_1, x_2, x_3 имеют вполне определенные значения. Это соответствует вполне определенному положению точки М в пространстве. С течением времени в реальном процессе величины x_1, x_2, x_3 определенным образом изменяются. Это соответствует перемещению точки М в пространстве по определенной траектории. Траектория перемещения точки М отражает поведение системы в процессе управления. Точка М называется изображающей точкой, а ее траектория называется фазовой траекторией, а пространство x_1, x_2, x_3 называется фазовым пространством (см. рисунок 46).

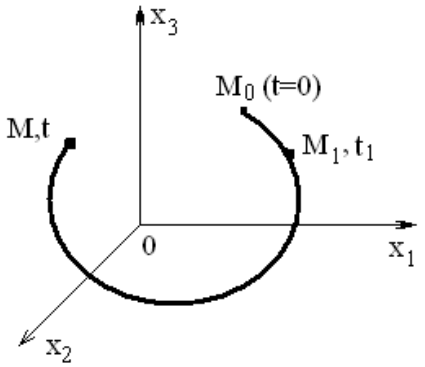


Рисунок 46 – Фазовые траектории

Начальные условия определяют координаты начальной точки фазовой траектории M_0. Если переменных в уравнении будет две, то изображающая точка будет двигаться не в пространстве, а на плоскости.

Фазовое пространство и фазовые траектории представляют собой геометрический образ процессов, протекающих в системе. Фазовая траектория дает лишь качественное представление о поведении системы.

Чтобы определить количественное положение изображающей точки в любой момент времени, нужно найти решение заданных уравнений во времени.

Фазовые траектории устойчивых линейных систем будут асимптотически приближаться к началу координат при неограниченном увеличении времен.

Для нелинейных систем фазовые траектории могут принимать самые разнообразные очертания.

Рассмотрим поведение линейной системы, описываемой уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \qquad (14.6)$$

Введем обозначения: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -a_1\dot{x} - a_2 x. \qquad (14.7)$$

Исключим время t, разделив первое уравнение на второе:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -a_1 - a_2\frac{x}{\dot{x}}. \qquad (14.8)$$

Решения уравнения определяет семейство кривых на фазовой плоскости, которое называется фазовым портретом системы. При этом возможны шесть типовых случаев изображения портретов систем в зависимости от корней характеристического уравнения системы.

$$p^2 + p\cdot a_1 + a_2 = 0,$$
$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4\cdot a_2}{4}} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2}}{2}. \qquad (14.9)$$

1. Корни вещественные и отрицательные при $a_1^2 > 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$, система устойчивая, апериодический процесс. На рисунке 47 показаны вид переходного процесса и фазовые траектории нелинейных систем.

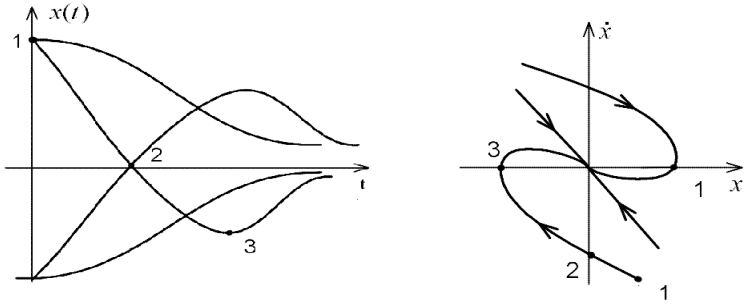


Рисунок 47 – Переходные процессы и фазовые траектории при вещественных отрицательных корнях характеристического уравнения

2. Корни вещественные положительные при $a_1^2 > 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$, система неустойчива, процесс расходящийся. Соответствующий вид переходного процесса и фазовые траектории показаны на рисунке 48.

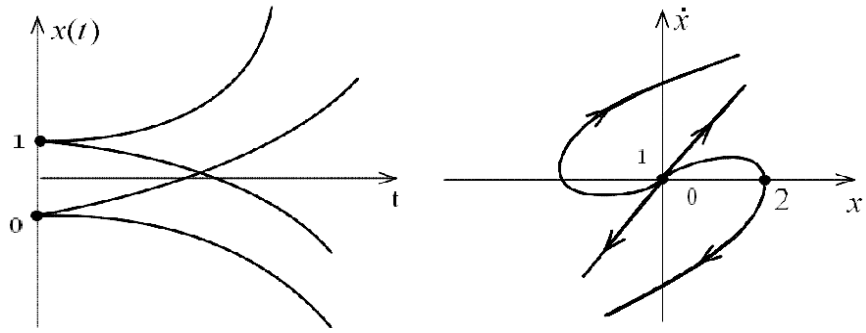


Рисунок 48 – Переходные процессы и фазовые траектории при вещественных положительных корнях характеристического уравнения

3. Корни комплексные, вещественные части отрицательные при $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$, система устойчивая, процесс колебательный сходящийся.

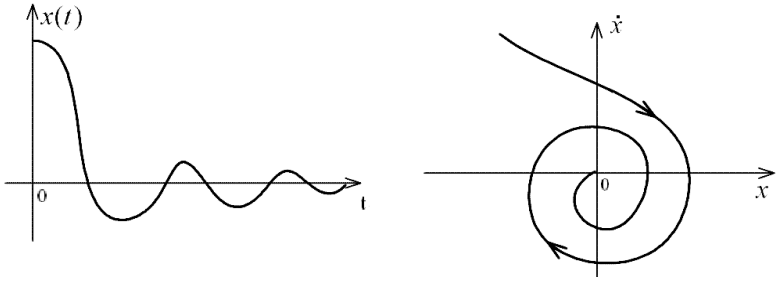


Рисунок 49- Переходной процесс и фазовые траектории при комплексных корнях характеристического уравнения

4. Корни комплексные, вещественные части положительные при $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$, система неустойчивая, процесс колебательный расходящийся.

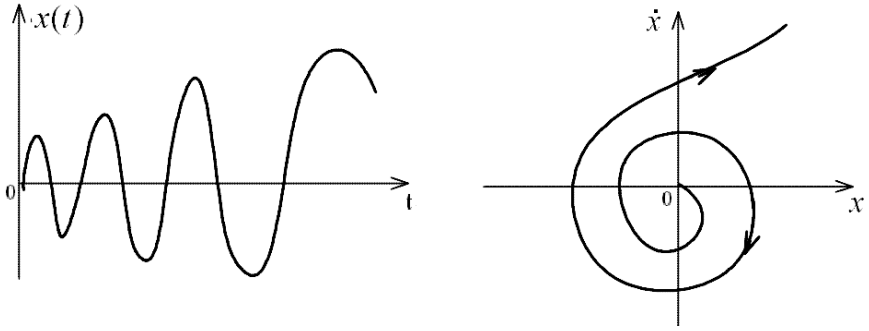


Рисунок 50- Переходной процесс и фазовые траектории при комплексных корнях характеристического уравнения

5. Корни чисто мнимые при $a_1 = 0, a_2 > 0$, системе колебательная граница устойчивости, процесс незатухающий колебательный.

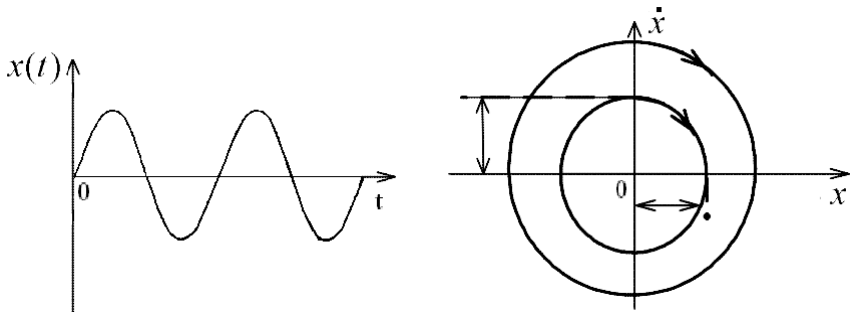


Рисунок 51- Переходной процесс и фазовые траектории при мнимых корнях характеристического уравнения

В фазовом пространстве используются две фазовые переменные: основную координату $x(t)$ и скорость ее изменения $\dot{x}(t)$. Координаты $\dot{x}, x$ называются фазовыми координатами. Совокупность фазовых траекторий называется фазовым портретом системы. Он характеризует свойства системы.

15 Лекция № 15. Основы синтеза линейных систем автоматического управления

Содержание лекции:
- задачи синтеза систем автоматических систем;
- синтез корректирующих устройств в прямой цепи;
- построение желаемой ЛАХ.

Цель лекции:
- изучить основы синтеза систем управления;
- изучить и освоить методы коррекции в системах управления

15.1 Задачи синтеза САУ

В теории автоматического управления выделяются два вида задач: задачи анализа и задачи синтеза. В задачах анализа полностью задана структура системы, заданы параметры системы, необходимо определить ее статические или динамические свойства.

В задачах синтеза требуется построение САУ, которая удовлетворяет заданным требованиям к ее качеству.

В синтезе систем автоматического управления считается, что структура системы заданы, необходимо, исходя из заданных требований к системе, синтезировать корректирующее устройство; выбрать схему и параметры. Задача синтеза сужается: при заданной основной схеме ограничиваются лишь определением вида и параметров корректирующего устройства, которые в сочетании с основной частью схемы обеспечили бы требуемые динамические характеристики системы в целом. При этом необходимо обеспечить требуемый запас устойчивости, точность управления в установившихся режимах и качество управления в динамических режимах.

Вопрос выбора схемы корректирующих устройств решают исходя из преимущества и недостатков, свойственных каждому из видов коррекции. Корректирующее устройство может быть включено последовательно, параллельно или по схеме с обратной связью.

Этапы решения задачи синтеза. Основные этапы задачи синтеза:

1) задание характеристик ОУ, выбор той или иной математической модели ОУ;

2) проверка исходной схемы на устойчивость при заданном принципе управления по рассогласованию;

3) задание требований к качеству переходного процесса $h(t)$: быстродействие t_p, процент перерегулирования σ, статическая точность s и т.п.;

4) определение параметров передаточной функции корректирующего устройства в прямой или обратной связи;

5) построение переходного процесса $h(t)$ – основной характеристики системы автоматического управления; определение показателей качества;

6) корректировка:

- математической модели ОУ неуправляемой части системы;
- закона регулирования САУ; изменение принципа управления.

Получена итерационная процедура решения задачи синтеза САУ, состоящая из шести шагов. Если она сходится, то задача синтеза решена. Если расходится, то требования к переходному процессу не соответствует возможностям математической модели ОУ.

15.2 Синтез корректирующих устройств в прямой цепи

Проектируя систему управления для любого ОУ необходимо создать систему точную, быстродействующую и с большим запасом устойчивости. При этом прежде всего пытаются рациональным образом и в допустимых пределах изменить параметры (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные времени) так, чтобы удовлетворить заданным требованиям качества регулирования, которые определяются критериями качества. При невозможности решить эту задачу в рамках имеющейся системы приходится идти на изменения ее структуры. Для этой цели обычно используется введение в систему управления корректирующих средств, которые должны изменить динамику всей системы в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся звенья с определенными передаточными функциями.

Постановка задачи синтеза. Имеется управляемый объект, задан принцип управления – по рассогласованию, система охвачена жесткой отрицательной обратной связью.

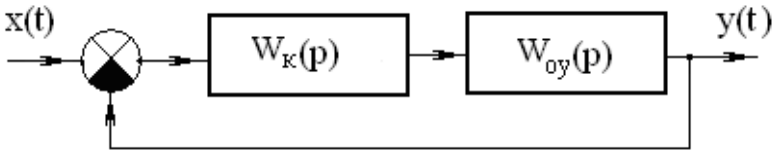


Рисунок 52 – Замкнутая система с корректирующим устройством

Определить корректирующее звено при заданной характеристике ОУ, исходя из требований, предъявляемых системе.

Требования:

- к переходной функции (качеству переходного процесса);
- к ошибке в установившемся режиме.

Математическая постановка задачи: заданы структура системы, т.е. принцип управления; ЛАХ управляемого объекта $L_{OY}(\omega) = \lg|W_{OY}(j\omega)|$; ЛАХ желаемая $L_{Ж}(\omega) = \lg|W_{Ж}(j\omega)|$, исходя из требований к переходному процессу.

Требуется: выбрать передаточную функцию корректирующего устройства $W_K(p)$; определить параметры передаточной функции $W_K(p)$.

Частотная характеристика замкнутой системы имеет следующий вид:

$$W_З(j\omega) = \frac{W_K(j\omega)W_{OY}(j\omega)}{1 + W_K(j\omega)W_{OY}(j\omega)}. \qquad (15.1)$$

Передаточная функция замкнутой системы через желаемую передаточную функцию. Причем, желаемая передаточная функция $W_{Ж}(j\omega)$ определяется свойствами разомкнутой системы:

$$W_З(j\omega) = \frac{W_{Ж}(j\omega)}{1 + W_{Ж}(j\omega)}. \qquad (15.2)$$

Если равны левые части этих выражений, то и правые части уравнений равны:

$$W_{Ж}(j\omega) = W_K(j\omega) \cdot W_{OY}(j\omega). \qquad (15.3)$$

Отсюда имеем передаточную функцию корректирующего устройства:

$$W_K(j\omega) = \frac{W_{Ж}(j\omega)}{W_{OY}(j\omega)}. \qquad (15.4)$$

Прологарифмируем последнее выражение, получим ЛАХ корректирующего устройства:

$$\lg|W_K(j\omega)| = \lg|W_{Ж}(j\omega)| - \lg|W_{OY}(j\omega)|. \qquad (15.5)$$

Так как аппроксимирующая ЛАХ строится отрезками с наклонами ± 20 [дБ/дек], то и вычитать надо отрезками до сопрягающих частот. Из данного выражения вытекает, чтобы получить аппроксимирующую ЛАХ корректирующего устройства необходимо от ЛАХ желаемой отнять ЛАХ исходного ОУ, причем вычитать надо отрезками до сопрягающих частот.

Если ЛАХ пересекает ось частот с наклоном -20 [дБ/дек], то устойчивость системы гарантирована; если -40 [дБ/дек], то система может быть колебательной; необходимо проверить, не находится ли она на границе колебательности.

15.3 Построение желаемой ЛАХ

При синтезе корректирующего устройства необходимо построение желаемой ЛАХ. Желаемой ЛАХ называют асимптотическую ЛАХ $L_{Ж}(\omega)$ разомкнутой системы, имеющей желаемые (требуемые) статические и динамические свойства. Желаемая ЛАХ состоит из трех основных асимптот: низкочастотной, среднечастотной и высокочастотной (см.рисунок 53).

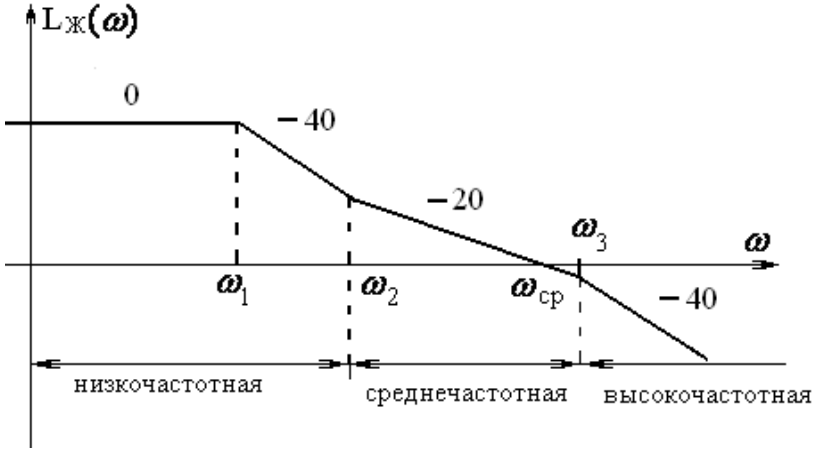


Рисунок 53 – Желаемая ЛАХ

Желаемая ЛАХ строится на оснований требований (заданных показателей качества) к системе. Низкочастотная асимптота ЛАХ разомкнутой системы определяет статические свойства. Среднечастотная асимптота ЛАХ и ее сопряжение с низкочастотной определяют динамические свойства системы – устойчивость и показатели качества переходной характеристики. Высокочастотная асимптота желаемой ЛАХ мало влияет на свойства системы. Поэтому ее следует выбирать так, чтобы корректирующее устройство было возможно простым. Это достигается при повторении наклонов высокочастотной асимптоты ЛАХ исходной системы, т.е. желаемая ЛАХ $L_{Ж}(\omega)$ идет параллельно заданной.

Построение среднеквадратичной асимптоты желаемой ЛАХ начинается с выбора частоты среза ω_{CP}. Для этого используется номограмма В.В. Солодовника. Она определяет зависимость перерегулирования и времени регулирования от максимума $P_{\max}$ вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

На номограмме по заданному значению перерегулирования σ определяют значение $P_{\max}$. Затем по $P_{\max}$ определяют отношение между t_p и ω_{CP}, определив значение параметра c по номограмме.

Например, пусть задано перерегулирование 30%, а быстродействие системы $t_p = 0.6$ сек. Тогда, как показано на рисунке 64, по $\sigma = 30\%$ определяем $P_{\max} = 1.27$ и затем определяем $c = 3.5$.

Следовательно, $t_p = \frac{c \cdot \pi}{\omega_{CP}} = \frac{3.5 \cdot \pi}{\omega_{CP}}$. Отсюда $\omega_{CP} = \frac{3.5 \cdot \pi}{t_p}$.

Таким образом вычисляется частота среза желаемой ЛАХ, при которой время регулирования не превысит заданного значения. Чем больше частота среза ω_{CP}, тем меньше время регулирования, а следовательно, система более быстродействующая.

Среднечастотная асимптота желаемой ЛАХ проводится через точку ω_{CP} обязательно с наклоном -20 дб/дек. При большем наклоне трудно обеспечить необходимый запас устойчивости и допустимое перерегулирование. Протяженность среднечастотной асимптоты устанавливается, исходя из необходимого запаса устойчивости. Из этих соображений выбирают ее сопряжение с низкочастотной асимптотой. Кроме того, сопрягающую асимптоту следует выбирать так, чтобы характеристика $L_{Ж}(\omega)$ возможно меньше отличалась от ЛАХ исходной системы и корректирующее устройство было по возможности более простым.

Список литературы

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления: Учебник для вузов.- М., 2005.- 400 с.
2. Теория автоматического управления/под ред.В.Б.Яковлева.-М., 2009.- 567 с.
3. Александровская А.Н. Автоматика.-М.: «Академия», 2011.
4. Малафеев С.И. Основы автоматики и системы автоматического управления. -М., «Академия», 2010.
5. Петрова А.М. Автоматическое управление.-М., 2010.
6. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления.- СПб., 2010.- 300 с.
7. Советов Б.Я. Теоретические основы автоматизированного управления.-М., 2006.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – СПб., 2004.- 752 с.
9. Бекбаев А., Сулеев Д., Скромин В.А., Ширяева О.И. Теория автоматического регулирования.- Алматы, Асем-Систем, 2008.- 552 с.
10. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб., Политехника, 2005. – 302 с.
11. Цыба Ю.А. Теория автоматического регулирования. Методические указания по выполнению лабораторных работ.- Алматы: АУЭС, 2014. - 23 с.
12. Цыба Ю.А., Сагитов П.И. «Системы автоматического управления». Конспект лекций.- Алматы: АИЭС, 2006.- 70с.
13. Сагитов П.И., Алексеев С.Б. «Системы автоматического управления». Методические указания к выполнению лабораторных работ.- Алматы: АИЭС, 2009.- 33с.
14. Цыба Ю.А., Сагитов П.И. «Элементы теории автоматического управления»: Учебное пособие для ВУЗов. – Алматы: КАУ, 2006.- 130 с.
15. Цыба Ю.А. Автоматическое управление электромеханическими системами.- А., 2008.- 60 с.

Сводный план 2014 г., поз. 296

Пулат Исмаилович Сагитов
Тохтабуби Джумадиловна Иманбекова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В071800 – Электроэнергетика

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать _____ Формат 60х84 1/16
Тираж 150 экз. Бумага типографская №1
Объем 4,6 уч. - изд. л. Заказ ___ Цена 2300 тенге.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126.