Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Өнеркәсіп қондырғыларының электржетегі және автоматтандыру кафедрасы

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ТЕОРИЯСЫ

5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттеріне арналған дәрістер жинағы

Алматы 2014

ҚҰРАСТЫРҒАНДАР: П.И. Сагитов, Т.Д. Иманбекова, М.Б. Жаркымбекова. Автоматты басқару теориясы. 5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттеріне арналған дәрістер жинағы. - Алматы: АЭжБУ, 2014.– 73 бет.

«Автоматты басқару теориясы» пәні бойынша дәрістер жинағы оқу бағдарламасына сәйкес жасалған. 5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттеріне арналған.

Суреттер - 53, әдеб. – 15 атау.

Пікір беруші: Курпенов Б.И.

«Алматы энергетика және байланыс университетінің» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2014 ж. баспа жоспары бойынша басылады.

© «Алматы энергетика және байланыс университетінің» КЕАҚ, 2014 ж.

Мазмұны

	Кіріспе ……..	4
1	Дәріс №1. Автоматты басқару теориясындағы негізгі түсініктемелер және анықтамалар. Басқару жүйелерінің функционалды сұлбалары….	5
2	Дәріс №2. Статикалық және астатикалық реттеу ……...	8
3	Дәріс №3. АБЖ-дағы жалпы аналитикалық тәуелділіктер. ……	12
4	Дәріс №4. Автоматты басқару теориясында Лаплас түрлендіруін қолдану. Беріліс функциясы ……...	16
5	Дәріс №5. Жиіліктік және логарифмдік жиіліктік сипаттамалар……	20
6	Дәріс №6. Уақыттық функциялар және уақыттық сипаттамалар. Автоматты басқару жүйелерінің негізгі типтік буындары …….	24
7	Дәріс №7. Типтік буындардың теңдеулері және олардың сипаттамалары……...	29
8	Дәріс №8. Типтік буындардың логарифмдік сипаттамалары……..	33
9	Дәріс №9. Құрылымдық сұлбалар және құрылымдық сұлбаларды эквивалентті түрлендіру……..	37
10	Дәріс №10. Автоматты басқарудағы тұйықталған және тұйықталмаған жүйелердің теңдеулері ……	41
11	Дәріс 11. Орнықтылықтың алгебралық критерийлері Гурвиц критерийі…….	44
12	Дәріс №12. Жүйелердің орнықтылығының жиіліктік критерийлері. Орнықтылықтың Михайлов және Найквист критерийлері ……	51
13	Дәріс №13. Типтік режимдегі реттеу процесінің сапасы. Калыпты режимдегі реттеу сапасын бағалау…….	57
14	Дәріс №14. Сызықты емес автоматты басқару жүйесінің теориясының негіздері…….	61
15	Дәріс №15. Автоматты басқарудың сызықты жүйесінің синтезінің негіздері ……	68
	Әдебиеттер тізімі ……	73

Кіріспе

Қазіргі таңда өлшеуіш және есептегіш техникалық құралдардың дамуы автоматты басқару жүйесін ауылшаруашылық және өндірістің әр түрлі салаларында кеңінен қолдануға алып келді.

Автоматты басқару теориясы (АБТ) автоматты басқару жүйесін тұрғызу принциптерін және осы жүйелердегі процестерді зерттеу әдістерін қарастыратын ғылым саласы болып табылады.

АБТ дамуы өндірістік революция кезеңінен басталады. Алғашқы кезде ғылымда бұл бағыт реттеу есептерін шешу үшін механикамен жасалған болатын, яғни бу машиналарда қысымды, температураны, айналу жиілігінің берілген мәнінде ұстап тұру. Осы жерден автоматты басқару теориясы деген атау шығады. Автоматты реттеу жүйесі берілген аралықта реттелетін шаманың мәнін ұстап тұру үшін арналған, элементтерінің жұмыс процесінде бір-біріне әсер ететін құрылғылар жиынтығын айтады. Кейіннен анықталғандай, басқару принципін тек қана техникада емес, биологияда, экономикада қолдануға болады екен.

Кибернетика кез келген табиғаттағы ақпаратты өңдеуді және басқару процесін оқытады. Оның техникалық жүйелермен байланысты бөлімдерінің бірі АБТ деп аталады. Басқару теориясы реттеу терминіне қарағанда көбінесе жалпы термин болып табылады. АБТ-ң оқыту нысаны автоматты басқару жүйесі болып табылады. АБТ-ң оқу мысалы автоматты басқару жүйесінде өтетін процестер болып табылады.

«Автоматты басқару теориясы» пәнінің мақсаты басқару процесінің сапасын бағалау, сызықты жүйелердің орнықтылығын талдау әдістерін, уақыттық және жиіліктік аумақтардағы моделді оқыту, автоматты басқару жүйесінің тұрғызу принциптерін оқыту болып табылады.

1 Дәріс №1. Автоматты басқару теориясындағы негізгі түсініктемелер және анықтамалар. Басқару жүйелерінің функционалды сұлбалары

Дәрістің мазмұны:

- автоматты басқарудың анықтамалары және негізгі түсініктемелері;
- автоматты басқару жүйелері туралы түсініктер;
- реттеу жүйесі туралы түсініктер;
- басқару жүйелердің функционалды сұлбасы.

Дәрістің мақсаты:

- негізгі түсініктер мен анықтамаларды оқып білу;
- басқару жүйесінің құрастырудың негізгі принциптерін меңгеру.

1.1 Негізгі түсініктер мен анықтамалар

Басқару – бұл алға қойылған мақсат үшін басқару аймағына оған кедергі болатын қарсы шарттар бар кезде толықтай әсер ететін процесс. Басқару келесі ұғымдармен байланысты:

- басқару объектісі (аймағы);
- басқару мақсаты;
- басқарушы құрылғы;
- басқарушы әсер.

Басқару процесі орындалатын аймақ басқару аймағы деп аталады. Басқару функциясын іске асыру процесі үшін басқарушы құрылғы пайдаланылады.

Басқару бойынша мүмкін болатын барлық операцияларға (әрекеттерге) адам қатыспаса, онда автоматты басқару құрылғысы деп аталады.

Басқару аймағы мен автоматты басқарушы құрылғы бір-бірімен әсер ете отыра автоматты басқару жүйесін (АБЖ) құрайды. Әр автоматты басқару жүйесі бір-бірімен жалғанған тұтастай буындар қатарынан тұрады. Буын – элементтің математикалық моделі немесе жүйенің кез келген бөлігі.

Кейбір жағдайларда басқару реттеу болып табылады. Өзгеретін және тұрақтандыруға жататын аймақтың параметрлері реттелетін параметрлер, ал осы параметрлер реттелетін аймақты реттеу аймағы деп аталады.

Қандай да бір қажетті заң бойынша өзгеретін реттелетін параметрлер немесе әр түрлі аймақтарда реттелетін параметрлердің тұрақты мәнінде автоматты түрде ұстап тұруға арналған құрылғы автоматты реттеуіштер деп аталады. Реттеу аймағының автоматты реттеуішпен байланысын автоматты реттеу жүйесі (АРЖ) деп айтады. Реттелетін аймақ пен автоматты реттеу автоматты реттеу (АР) жүйесінің элементтері болып табылады.

Автоматтты басқару жүйесін тұрақтандыру, бағдарламамен басқару, қадағалау деп бөледі.

Басқарылатын шаманың мәнін тұрақты мәнде ұстап тұратын автоматты басқару жүйесі тұрақтандыру (стабилдеу) жүйесі деп аталады. Оларды әр түрлі физикалық шамаларды тұрақтандыру үшін қолданылады.

Автоматты басқару жүйесінде алдын ала берілген бағдарлама бойынша өзгеретін басқарылатын шаманың мәні бағдарламалық басқару жүйесі деп аталады.

Басқарылатын шаманың өзгеру заңы белгісіз болатын автоматты басқару жүйесі қадағалау жүйесі деп аталады. Мұндай жүйелерде өлшенетін шамалардың кейбір функцияларын немесе өлшенетін шаманы берілген нақтылықпен жүргізу керек.

Автоматты басқару жүйесіне кіретін контурлар санына байланысты бірконтурлы, көпконтурлы жүйелер болып бөлінеді. Қарапайым жүйе бір контур, бір тізбекке ие. Мұндай жүйелер бірконтурлы деп аталады. Ал күрделі жүйелерде сигнал бірнеше контур бойымен өтеді. Ондай жүйелерді көпконтурлы дейді.

Жүйелер сигнал түрлеріне байланысты үздіксіз және дискретті болып бөлінеді. Егер әр буында уақыт бойынша кіріс шаманың үздіксіз өзгеруіне уақыт бойынша шығыс шамасы үздіксіз түрде өзгерсе, онда жүйе үздіксіз әрекет жасайтын жүйе деп аталады.

Егер жүйенің құрамында бір буында кіріс шамасы үздіксіз өзгерісі кезінде шығыс шамасы дискретті түрде өзгеретін болса, онда жүйе дискретті әрекет жасайтын жүйе болып табылады.

Жүйелер стационарды және стационарды емес болып бөлінеді. Уақыт бойынша өзгермейтін, яғни барлық параметрлері тұрақты болып қалатын жүйе стационарды деп аталады. Ал уақыт бойынша параметрлері өзгеретін жүйе стационарды емес жүйе деп аталады.

АБЖ сызықты және сызықты емес болып бөлінеді. Сызықты АБЖ – барлық буындары сызықты теңдеулермен сипатталатын жүйе. Сызықты жүйелер суперпозиция принципіне бағынады. Сызықты емес АБЖ – ең болмағанда бір буында сипаттаманың сызықтылық қасиеті орындалмаса немесе теңдеуде сызықтылық қасиеті бұзылатын жүйе.

1.2 Басқару жүйелерінің функционалды сұлбалары

Кез келген АБЖ екі негізгі элементтен тұрады: басқару аймағы және басқарушы құрылғысы.

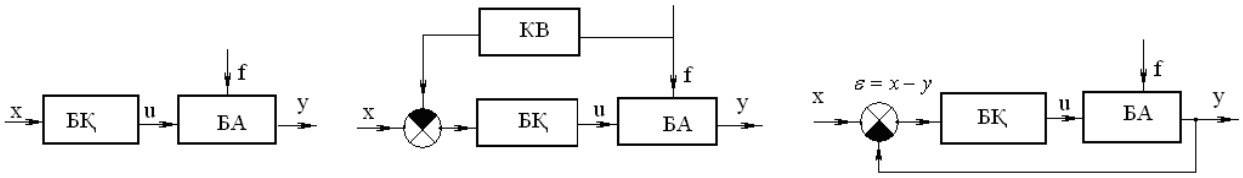
Автоматты басқару жүйелерді бейнелеу үшін функционалды және құрылымдық сұлбалар пайдаланылады. Жүйенің функционалды сұлбалары жұмыс процесінде құрылғылардың, түйіндердің және элементтердің бір-бірімен әсер етуіне ықпал етеді. Жеке элементтердің бейнесі сұлбада тікбұрыш түрінде бейнеленеді.

Құрылымдық сұлба дегеніміз басқару жүйесінің математикалық моделінің сызбалық бейнесі. Құрылымдық сұлбаның элементтері буындар болып табылады. Буындардың арасындағы өзара байланысты байланыс

сызығымен бейнелейді, олар сигналдың беріліс бағытын көрсетеді. Сызық үстінен сигналдың шартты белгісі қойылады. Сызықтардың тармақталуы болатын байланыс сызығының нүктесі түйін деп аталады.

АБЖ құрастыру негізінде басқарудың фундаменталді принципі жатады: тұйықталмаған басқару, орнын толтыру (компенсация), кері байланыс.

Тұйықталмаған басқару принципі. Басқарудың тұйықталмаған автоматты басқару жүйесінің қарапайым функционалды сұлбасы 1 а суретте көрсетілген.



а б в

1 сурет - Тұйықталмаған (а,б) және тұйықталған басқару жүйесінің құрылымдық сұлбасы

Басқару жүйесіне әсер ететін басқарушы (тапсырылатын) x(t) әсер сияқты, сондай-ақ әр түрлі бөгеттер f(t) де әсер етеді, олар жүйе тепе-теңдігін бұзады және басқарушы параметрлер мәнін өзгертеді.

Басқарушы құрылғы (БҚ) сигналдың x(t) уақыт бойынша өзгеруі сияқты басқарудың мақсаты туралы ақпарат алған соң басқару мақсатына жету үшін x(t)-ға сәйкес болатындай басқару аймағына (БА) басқарылатын шама y(t) өзгеретіндей басқарушы әсер болады.

Әсер ету стрелкамен көрсеткендей кірістен шығысқа беріледі. Бұл басқару тұйықталмаған тип бойынша деп аталады. Мұндағы y(t) және x(t) жақындығы тек құрылымымен қамтамасыз етіледі. Осы кемшіліктерге қарамастан, осындай тұрғызу принципі кеңінен қолданылады.

Орнын толтыру принципі (ауытқу бойынша басқару). Тұйықталмаған АБЖ-нің әр түрлілігі ауытқу бойынша басқарудың тұйықталмаған жүйесі болып табылады. Егер ауытқушы әсер үлкен болса, онда тұйықталмаған тізбек функциялау алгоритмінің орындалуда қажетті нақтылықты қамтамасыз етпейді, не болмаса шығыс шаманың тұрақты етіп ұстап тұру үшін функциялау алгоритмінің ауытқытатын әсермен шақыра отыра орнын толтыратын басқару алгоритміне түзету енгізіп, әсерді өлшеуге болады. Осындай басқару әдісін (амалын) ауытқу бойынша басқару деп атайды. Ауытқу бойынша басқарудың функционалды сұлбасы 1 б суретте көрсетілген.

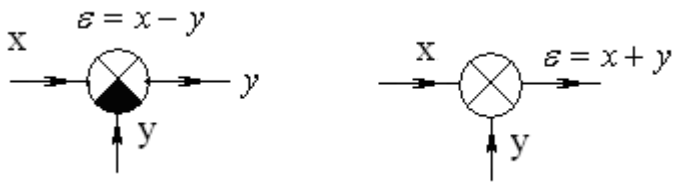
Кері байланыс принципі. Тұйықталған тізбекпен жұмыс жасайтын әрекет жүйесін кейде кері байланысты жүйелер деп те атайды. Негізгі сигналдың таралу бағытымен сәйкес келетін байланыс, яғни кірістен шығысқа баратын байланыс түзу, ал оған қарама - қарсы шығыстан кіріске

баратын байланыс кері байланыс деп аталады. Кері байланыс жүйесінде сигналдар циркуляциясының тұйық контуры болады, сондықтан бұл жүйелер басқарудың тұйықталған жүйесі деген атқа ие болған. Кері байланысы болмайтын жүйені тұйықталмаған жүйе деп атайды.

Кері байланысты басқару жүйесінің функционалды сұлбасы 1 в - суретте көрсетілген. Бұл жерде басқару алгоритміне түзету координаттар мәніне байланысты емес, олардың ауытқуларына $\varepsilon = x - y$ қатысты енгізіледі. Тұйықталған АБЖ-де шығыс шамасы үздіксіз өлшенеді және ауытқуды анықтау үшін $\varepsilon(t)$ бірден берілген мәнмен салыстырылады. Берілген басқарушы құрылғыдан реттелетін параметрдің ауытқу мәні мен шамасына байланысты белгілі бір (анықталған) басқарушы әсер бойынша өңделеді, ауытқу нөлге келмейді. Сұлба тұйықталған жүйенің жалпы түрін көрсетеді.

Егер кері байланыс сигналы кіріс сигналдан $\varepsilon = x - y$ есептелсе, онда кері байланысты теріс кері байланысы деп атаймыз. Егер кері байланыс кіріс сигналмен $\varepsilon = x + y$ жинақталса, онда оны оң кері байланыс деп айтамыз, мұндағы ε - ауытқу немесе басқару қателігі.

Салыстыратын немесе қосушы құрылғы секторларға бөлінген дөңгелек түрінде болады. Салыстырмалы элементте секторы есептеу берілетін қарамен боялған не минус белгісі қойылады. Салыстыратын немесе қосушы құрылғы 2 суретте көрсетілген.



2 сурет – Салыстырмалы және қосушы элементтер

Көптеген жағдайларда ауытқу және қарсы әсер бойынша басқару принципі өзінде байланыстыратын аралас басқаруды қолдану тиімді болып келеді.

2 Дәріс № 2. Статикалық және астатикалық реттеу

Дәрістің мазмұны:
- автоматты реттеуіштің функционалды сұлбасы;
- автоматты реттеуіш элементтері;
- статикалық және астатикалық реттеу;
- статизм.

Дәрістің мақсаты:
- реттеуіштің функционалды сұлбасын оқып білу;
- автоматты реттеуіштің негізгі элементтерін оқып меңгеру.

2.1 Реттеуіштің функционалды сұлбасы

Реттелетін аймақ және автоматты реттеуіш автоматты реттеу жүйесін құрайды. Бір параметрді реттеуге арналған автоматты реттеу келесі негізгі элементтерден тұрады:

а) өлшейтін элемент;

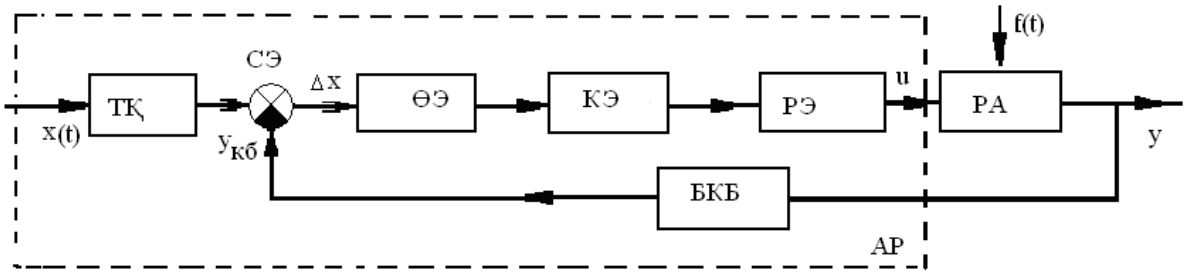
б) тапсырма беруші құрылғы;

в) күшейткіш және түрлендіруші элементтер;

г) реттеуші элемент;

д) кері байланыс құрылғысы.

Автоматты реттеуіштің функционалды сұлбасы 3-суретте көрсетілген. Әсердің көзі болып кіріс әсерді x(t) салыстырушы элементке (СЭ) берілетін сигналға $x_з(t)$ түрлендіретін тапсырма беруші құрылғы табылады. Басты кері байланыс арқылы СЭ-ке пропорционал реттелетін шама $y(t)$ сигналы $y_{КБ}(t)$ беріледі. СЭ - $\Delta x = x_з(t) - y_{КБ}(t)$ есептеуін жүргізетін құрылғы. Бұл сигнал өлшейтін элементке беріледі.



3 сурет – Автоматты реттеуіштің функционалды сұлбасы

Ары қарай сигнал түрлендіргіш-күшейткіш элементке беріледі. Күшейген сигнал реттелетін элементке барады. Реттелетін элемент реттелетін аймаққа берілетін басқарушы сигналды $u(t)$ ретке келтіреді.

Өлшейтін элементке (ӨЭ) берілген мәнге байланысты реттелетін шаманың Δx ауытқуын есепке алады. Тапсырма беруші элемент – реттелетін шаманың белгілі бір мәнге келтіруге арналған құрылғы. Тапсырма беруші құрылғы өзі орындай береді немесе өлшенетін элемент құрылымына кіреді.

Алғашында өнеркәсіп саласында автоматты басқарушы құрылғы ретінде бу машинасын бумен қамтамасыз ететін, бу қазандарында су деңгейін реттейтін автоматты реттеуіштер болған. Алғаш рет орыс механигі Ползунов И.И. қолданды. Осындай түрдегі реттеуіштер тура әрекет реттеуіштері деп аталады.

Тура емес әрекет реттеуіші деп көздерден құралған (электр торабы, сорғы, компрессор) қосымша энергия түсетін күшейткіш немесе түрлендіргіш элементпен басқаратын сезімтал элементтің кіріс сигналы кезінде пайда болатын реттеу аймағында реттелетін параметрдің мәнінің өзгеруін айтады. Сондықтан күшейткіш элемент шығысындағы шығыс элемент кіріс сигналға қатысты күшейген дәрежеде болады. Күшейгіш

элементтің шығысы күштік элементке (сондай-ақ күшейткіш қуат деп те аталады) әсер етеді.

Реттегіштер үздіксіз және дискретті болады. Үздіксіз әрекет реттегіштері деп кіріс шама үздіксіз өзгергенде шығыс шама да үздіксіз өзгереді, яғни уақыт бойынша барлық шамалар үздіксіз өзгеретін реттеуіштер.

Дискретті типтегі реттеуіштер жүйе элементтері арасында тұрақты байланысты емес, үзілмелі байланысты жүзеге асырады. Дискретті реттеуіштер дегеніміз кіріс шама үздіксіз өзгерген жағдайда шығыс шама дискретті түрде өзгереді, яғни шамалар импульс түрінде өңделеді.

2.2 Статикалық және астатикалық реттеу

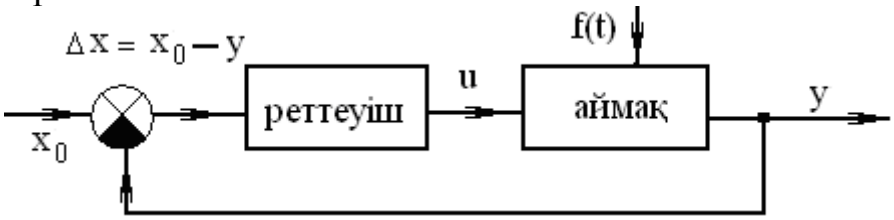
Нақтылықтың белгілі бір дәрежесінде реттелетін шама мәнін ұстап тұру үшін АРЖ қабілеттілігі бойынша астатикалық және статикалық реттеу жүйелері деп бөлінеді.

Статикалық АРЖ жүйелері деп орнықты режимде (статикалық) сыртқы әсер ету кезінде, жүктемеге тәуелді болғанда реттеу қателігі бар жүйелерді айтады. Қателік неғұрлым көп болса, соғұрлым ауытқу да көп. Бұл реттеуіштің әрекет ету принципіне кіреді және оның шегі болмайды, сондықтан орын алатын ауытқу статикалық қателік немесе статизм деп аталады. Статикалық реттеуіш реттелетін шамаларды қателігімен бірге тұрақты мәнін ұстап тұрады.

Тұрақты түрде берілген мән кезінде қателігі жүктемеден тәуелді болатын реттеуді статикалық деп атайды. Кейбір жүйелерде реттеу кезінде статикалық қателігі нөлге тең болса, онда астатикалық реттеуге өтеді.

Реттеудің астатикалық автоматты жүйесі деп орнықты режимде кез келген тұрақты әсер ету кезінде реттеу қателігі нөлге тең болатын жүйелерді айтамыз. Астатикалық жүйеде статизм нөлге тең.

Автоматты реттеу жүйесінің қысқартылған функционалды сұлбасы 4-суретте келтірілген.



x_0 – тапсырма беруші әсер;
y – шығыс басқарылатын шама;
u – басқарушы әсер;
f – қарсы (ауытқу) әсер етуші әсер;
$\Delta x = x_0 - y$ - реттеу қателігі

4 сурет – АРЖ функционалды сұлбасы

Жүйе параметрлері және кіріс шамалары мен шығыс шамалары уақыт бойынша өзгермейтін статикалық стационар режимді, яғни орнықты режимді қарастырамыз.

Белгілеулер енгіземіз:

$k_0 = \frac{y}{u}$ - басқарушы әсер бойынша аймақтың беріліс коэффициенті;

$k_f = \frac{y}{f}$ - қарсы әсер бойынша аймақтың беріліс коэффициенті;

$k_P = \frac{u}{\Delta x} = \frac{u}{x_0 - y}$ - реттеуіштің беріліс коэффициенті;

x_0, f, y - сәйкесінше: тапсырма беруші, қарсы әсер етуші және реттелетін шама; Δx - реттеу қателігі.

Қарастырып отырғын жүйеміздің орнықты (қалыпты) күйін келесі теңдеулермен жазамыз:

$$y = u \cdot k_0 - k_f \cdot f, \qquad u = k_P \cdot \Delta x = k_P \cdot (x_0 - y); \tag{2.1}$$

$$y = k_0 \cdot k_P \cdot (x_0 - y) - k_f \cdot f. \tag{2.2}$$

(2.2) өрнектен реттелетін шаманы y табамыз:

$$y = \frac{k_P \cdot k_0 \cdot x_0}{1 + k_0 \cdot k_P} - \frac{k_f}{1 + k_0 \cdot k_P} \cdot f. \tag{2.3}$$

Байқағанымыздай, шығыс шаманың мәні (реттелетін шама жүктемеге тәуелді) жүктеме f ұлғайған сайын азаяды.

Теңдеуден реттеу қателігін Δx табамыз.

$$\Delta x = x_0 - y = \frac{x_0}{1 + k_P \cdot k_0} + \frac{k_f}{1 + k_P \cdot k_0} \cdot f. \tag{2.4}$$

Бұл жерден көретініміз, орнықты режимде автоматты реттеудің статикалық жүйелерінде әпқашан жүктеме f шамасына тәуелді болатын реттеу қателігі болады. Тұрақты берілген мән x_0 кезінде орнықты статикалық қателік жүктемеге f тәуелді болса, онда реттеу статикалық реттеу деп аталады.

Реттеудің статикалық қателігі:

$$\Delta x_{CT} = \frac{x_0}{1 + k_P \cdot k_0} + \frac{k_f}{1 + k_P \cdot k_0} \cdot f. \tag{2.5}$$

Статикалық реттеуіштер қажетті мәннен реттелетін шаманың міндетті түрде ауытқуы болатын кезде жұмыс жасайды. Бұл ауытқу қарсы әсер f неғұрлым көп болған сайын соғұрлым көп болады. Бұл статикалық реттеу

әрекет принципіне кіреді және қателік болып табылмайды, сондықтан осы ауытқу реттеуіштің статикалық қателігі деп аталады. Статикалық қателікті азайту мақсатында реттеуіштің беріліс коэффициентін көбейту қажет, соның нәтижесінде басқару аймағының беріліс коэффициентін ұлғайтуға болады, алайда беріліс коэффициентін ұлғайту есебімен қателікті Δx толықтай жоя алмаймыз. Сонымен ұлғайту жүйенің орнықтылық қорын азайтуға алып келеді және кейбір мәндер кезінде жүйе орнықсыз бола алады, яғни жұмыс жасауға қабілетсіз.

Көбінесе жүктемеден реттеу қателігінің тәуелділігін бағалау үшін статизм ұғымы қолданылады:

$$\delta_{СИС} = \frac{Y_{XX} - Y_{НОМ}}{Y_{XX}} \cdot 100\% . \qquad (2.6)$$

Жүйенің статизмі жүйенің жүктемелік сипаттамасының салыстырмалы көлбеуін сипаттайды.

Статикалық реттеуіш реттелетін шаманың тұрақты мәнін қателегімен бірге ұстап тұрады. Статизм – бұл бос жүрістен номиналдыға дейін жүктеменің өзгеруі кезіндегі салыстырмалы статикалық қателіктің шартты шамасы. Кейбір жүйелерде статикалық қателік болуы шарт емес. Себебі, қателік жүйенің құрылым күшінде нөлге тең болады, яғни реттеу астатикалық реттеуге өтеді.

3 Дәріс №3. Автоматы басқару жүйесіндегі жалпы аналитикалық тәуелділіктер

Дәрістің мазмұны:

- жүйенің статикалық және динамикалық сипаттамалары;
- жүйелер сипатының математикалық әдісі.

Дәрістің мақсаты:

- жүйенің статикалық және динамикалық сипаттамаларын оқып білу;
- жүйелер сипатының математикалық әдісін оқып үйрену.

3.1 Статикалық және динамикалық сипаттамалар және олардың түрлері

АБЖ-де барлық элементтер тұтастай олардың статикалық және динамикалық сипаттамаларының түрлері бойынша бөлінеді. Осыған сәйкес АБЖ-де статикалық және динамикалық режимдер орын алады.

Буынның статикалық сипаттамасы деп тұрақты әсер ету кезінде орнықты режимде шығыс шаманың кірістің шамасынан тәуелділігін айтады, яғни $y(t) = f(x) = y(x)$ тепе-теңдік жағдайы.

Статикалық режим немесе тепе-теңдік жағдайы кіріс әсері уақыт бойынша тұрақты болғанда орын алады. Статикалық режимдегі кіріс және шығыс шамалардың арасындағы байланыс алгебралық теңдеумен

өрнектеледі. Уақыт болмаған жағдайда кез келген АБЖ статикалық режимде тұтастай статика түріндегі $y = F(x, f)$ теңдеумен өрнектеледі.

АБЖ жұмысының статикалық және орнықтылық режимдері уақыт бойынша басқарылатын шама және барлық аралық шамалар өзгермейді, яғни $y(t) = const$.

Буынның немесе жүйенің динамикалық сипаттамалары аналитикалық түрде шығыстығы және кірістегі параметрлердің өтпелі режимде кез келген әсер кезіндегі байланысын көрсетеді. Яғни, тепе-теңдік бұзылған жағдайда.

АБЖ жұмысының динамикалық режимі кезінде басқарылатын (шығыс) шама және барлық аралық шамалар уақыт бойынша өзгереді, яғни $y(t) = \text{var}$.

Динамикалық режим кезінде процестер жалпы жағдайда дифференциалдық теңдеулермен анықталады.

АБЖ элементтерінің беріліс қасиеттері динамикалық режимде динамикалық сипаттамалар көмегімен сипатталады. Динамикалық сипаттамалар келесі түрлерге бөлінеді:

а) дифференциалды теңдеулер;

б) уақыттық сипаттамалар;

в) беріліс функциялары;

г) жиіліктік сипаттамалар.

Көптеген жағдайларда жүйелер және буындар кез келген дәрежелі сызықты емес дифференциалды теңдеулермен сипатталады. Екінші ретті дифференциалды теңдеумен сипатталатын буынды қарастыралық [1]:

$$F(y.\dot{y}, \ddot{y}, x.\dot{x}) + f = 0, \qquad (3.1)$$

мұндағы

y - шығыс шама;

$\dot{y}$ -уақыт бойынша бірінші туынды;

$\ddot{y}$ - уақыт бойынша екінші туынды;

x, f - кіріс шамалар;

$\dot{x}$ - уақыт бойынша туынды.

Кез келген кіріс әсерлері кезінде буындағы процесті сипаттайтын теңдеуді динамика теңдеулері деп атаймыз.

Тұрақты кіріс әсерлері кезінде $x = x^0$, буындағы $f = f^0$ процесс уақыт арқылы қалыптасады: шығыс шама тұрақты мәнге $y = y^0$ келеді. Онда теңдеу түрі

$$F(y^0, 0, 0, x^0, 0) + f^0 = 0. \qquad (3.2)$$

Бұл теңдеу статика теңдеуі деп аталады. Статикалық режимді статикалық сипаттамалар көмегімен жазуға болады.

Динамикалық жүйе үлкен қызығушылыққа ие. Сызықты жүйелердің динамикалық тәртібінің негізгі тапсырмасы кез келген белгілі бір кіріс сигнал $x(t)$ үшін шығыс сигналды $y(t)$ есептеуге мүмкіндік алу болып табылады.

Дифференциал теңдеудің сызықталуы. Кез келген автоматты жүйенің динамикалық дифференциалды теңдеулерді құрастыру кезінде жүйені жеке буындарға бөледі және әр буын үшін дифференциалды теңдеуді құрастырады. Аралық айнымалыларды ескермеу арқылы бір теңдеуге түрлендіруге болатын барлық буындардың жеке теңдеулері бірыңғай жүйені құрайды.

Динамилық теңдеуді кез келген сызықты емес түрге ие болатын буынды қарастыралық.

$$F(y.\dot{y}, \ddot{y}, x.\dot{x}) + f = 0,$$

мұндағы

y - шығыс шама;

$\dot{y}$ - уақыт бойынша бірінші туынды;

$\ddot{y}$ - уақыт бойынша екінші туынды;

$x.f$ - кіріс шамалар;

$\dot{x}$ - уақыт бойынша туынды.

Кез келген кіріс әсерлері кезінде буындағы процесті сипаттайтын теңдеуді динамика теңдеулері деп атаймыз.

Тұрақты кіріс әсерлері $x = x^0$ кезінде буындағы $f = f^0$ процесс уақыт ағыны бойынша қалыптасады (орнығады): шығыс шамасы тұрақты мәнде $y = y^0$ болады. Онда теңдеу келесі түрге $F(y^0,0,0,x^0,0) + f^0 = 0$ ие болады.

Сызықты емес теңдеулердің сызықталу негізінде барлық айнымалылар өзгереді деген болжам жатыр және орныққан мәндерінен олардың ауытқуы уақыт бойынша өте аз болып саналады.

Ауытқуды $\Delta x, \Delta y$ деп белгілейміз. Онда динамикалық процесте

$$x = x_0 + \Delta x, \;\; y = y_0 + \Delta y, \;\; \dot{y} = \Delta \dot{y}, \;\; \ddot{y} = \Delta \ddot{y}$$

айнымалылардың динамикалық ауытқуының кейбір орныққан мәндерден аз болу шарты АР жүйесі үшін әрқашан да орындалады. Сыртқы әсер АЖ жұмысына тәуелді емес, оның кез келген өзгерісі болуы мүмкін, сондықтан да оң жақ бөлігі сызықталуға жатпайды.

Тейлор қатарына F функцияны жіктейміз:

$$F_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Delta \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\Delta \ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x} + f_0 + \Delta f = 0. \qquad (3.3)$$

Теңдеудегі барлық жеке туындылар тұрақты коэффициенттерге ие. Осы теңдеуден статика теңдеуін шығара отырып, берілген буын үшін қажетті сызықталған динамика теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\Delta\ddot{y}+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Delta\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Delta\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\Delta f=0. \qquad (3.4)$$

Бұл дифференциалды теңдеу автоматты жүйенің сол буынын, сондай-ақ динамикалық процесін сипаттайды. Бұл теңдеу жуықталған болып табылады. Жіктеу процесі кезінде жоғары реті алынып тасталған, уақыттың белгісіз функциялары алдынғы шамалар болмайды, олардың кейбір орныққан мәндерінен ауытқуы $\Delta x, \Delta y$ болады, алынған теңдеу тұрақты коэффициенттерімен ауықтуға қарағанда сызықты болып табылады. Бұл теңдеу ауытқулар кезіндегі буынның дифференциал теңдеуі деп аталады. АРЖ-де буындардың дифференциал теңдеулерін екі стандартты түрде жазу қабылданған.

Дифференциал теңдеулерді шығыс шамамен және оның туындылары сол жағында, ал кіріс шамамен және басқа бар мүшелері оң жағында болатындай, ал шығыс шаманың өзі бірлік коэффициентімен теңдеуге кіретіндей етіп жазамыз. Сызықталған теңдеудің стандартты түрге келтіру үшін белгілеулер енгіземіз.

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}=a_0,\quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}=a_1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=a_2,\quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=-b_0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=-b_1,\quad c_0=-1$$

ескере отыра алатынымыз

$$\begin{aligned} a_0\Delta\ddot{y}+a_1\Delta\dot{y}+a_2\Delta y-b_0\Delta\dot{x}-b_1\Delta x-c_0\Delta f=0,\\ a_0\Delta\ddot{y}+a_1\Delta\dot{y}+a_2\Delta y=b_0\Delta\dot{x}+b_1\Delta x+c_0\Delta f. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Белгілейміз:

$$\frac{a_0}{a_2}=T_2^2,\quad \frac{a_1}{a_2}=T_1,\quad \frac{b_1}{b_0}=k_1,\quad \frac{b_0}{b_1}=k_2,\quad \frac{c_0}{a_2}=k_0,$$

мұндағы T_1, T_2, T_0 - берілген буынның уақыты,

k_1, k_2, k_0 – беріліс коэффициенттері.

Осыны ескере отыра:

$$T_2^2\Delta\ddot{y}+T_1\Delta\dot{y}+\Delta y=k_2\Delta\dot{x}+k_1\Delta x+k_2\Delta f\ .$$

$$x_0=y_0=f_0=0\ ,\ \Delta x=x-x_0=x,\ \Delta y=y-y_0=y,$$

$\Delta f=f-f_0=f, \Delta\dot{y}=\dot{y},\quad \Delta\ddot{y}=\ddot{y},\quad \Delta\dot{x}=\dot{x}$ деп есептейміз.

Стандартты түрдегі теңдеу:

$$T_2^2\ddot{y}+T_1\dot{y}+y=k_1(T_0\dot{x}+1)x+k_2 f\ . \qquad (3.6)$$

Теңдеуді символ түрінде жазамыз. Бұл үшін операторларды енгіземіз $\frac{dy^2}{dt^2}=p^2,\ \frac{dy}{dt}=p$, символ түрінде стандартты түрін:

$$y(T_2^2\ p^2+T_1p+1)=k_1(T\ p+1)x+k_2 f\ . \qquad (3.7)$$

Теңдеудің екінші формасы:

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \dot{x} + b_1 x + c_0 f;$$
$$a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p x + b_1 x + c_0 f; \quad (3.8)$$
$$y(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = (b_0 p + b_1) x + c_0 f.$$

Белгілеулер енгіземіз:

$Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ - меншікті дифференциал операторы;

$R_1(p) = b_0 p + b_1, \quad R_2(p) = c_0$ - әсердің операторы.

Онда алатынымыз:

$Q(p) y = R_1(p) x + R_2(p) f$ қарапайым түрдегі.

Беріліс функциялары.

Өзінің операторына оператор әсерінің қатынасы деп беріліс функциясы немесе оператор түріндегі беріліс функцияларын айтады.

Теңдеумен жазылатын екі беріліс функциямен сипаттауға болады: x кіріс шама бойынша $W_1(p)$ беріліс функциясы, яғни

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (3.9)$$

және кіріс шама f бойынша беріліс функциялары $W_2(p)$.

Беріліс функцияларын пайдалана отыра алатынымыз $y = W_1(p) x + W_2(p) f$.

4 Дәріс №4. Автоматты басқару теориясына Лаплас түрлендіруін қолдану. Беріліс функциялар.

Дәрістің мазмұны:

- тура және кері Лаплас түрлендіруі;
- Лаплас түрлендіруінің қасиеттері;
- басқару теориясына Лаплас түрлендіруін қолдану;
- беріліс функциясы.

Дәрістің мақсаты:

- Лаплас түрлендірулерін оқып меңгеру;
- автоматты басқару теориясына Лаплас түрлендіруін пайдалана білу.

4.1 Лаплас түрлендіруі

Динамикалық жүйелердің сызықты дифференциал теңдеулері Лаплас түрлендіруіне негізделген операторлық әдіспен шешіледі.

Лаплас түрлендіруі нақты уақыттық айнымалы функцияны $f(t)$ комплекстік айнымалы функцияға F(p) түрлендіреді:

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (4.1)$$

мұндағы

$f(t)$ - түпнұсқа деп аталады;

$F(p)$ - бейне деп аталады;

$p=\sigma+j\cdot\omega$ -комплексті айнымалы, оператор;

$j=\sqrt{-1}$ - жорамал бірлік.

Лаплас түрлендіруін келесі түрде жазуға болады: $F(p)=L[f(t)]$.

Лапластың кері түрлендіруі белгілі бейне бойынша түпнұсқаны табуға мүмкіндік береді:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p)\,e^{pt}\,dp\,, \qquad (4.2)$$

мұндағы σ - оператордың нақты бөлігі p.

Осылайша, түрлендіру нәтижесінде сәйкесінше бір белгідегі жұптар алынады: $F(p)=f(t),\ f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

Көптеген функциялар үшін осындай сәйкестіктер табылған және кестеге енгізілген.

Кейбір функциялардың бейнелері:

1) Бірлік функция:

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Бірлік функцияның бейнесі:

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}1e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p}. \qquad 1\div\frac{1}{p}, \quad A\div\frac{A}{p}.$$

2) Көрсеткіш $f(t)=e^{-\alpha t}$ функцияның бейнесі:

$$F(p)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-pt}dt=\int_{0_-}^{\infty}e^{-(\alpha+p)t}dt=-\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{\alpha+p}\Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{1}{p+\alpha};$$

$$e^{-\alpha t}\div\frac{1}{p+\alpha}.$$

3) Көрсеткіш $f(t)=e^{\alpha t}$ функцияның бейнесі: $e^{\alpha t}\div\frac{1}{p-\alpha}$.

4) Синус функцияның бейнесі: $\sin\omega_0 t\div\frac{\omega_0^2}{p^2+\omega_0^2}$.

5) Косинус функцияның бейнесі: $\cos\omega_0 t\div\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$.

4.2 Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттері

1. Сызықтылық қасиеті.

Кез келген α және β (α,β -тұрақтылар) тұрақтылар үшін дұрыс:

$$L[f_1(t)+ f_2(t)]= L[f_1(t)+ f_2(t)]= F_1(p)+ F_2(p). \quad (4.3)$$

Қосындының бейнесі бейнелерінің қосындасына тең. Тұрақты шаманы бейне белгісінен шығаруға болады.

$$L[af(t)]= aL[f(t)]= aF(p), \quad (4.4)$$

мұндағы a – тұрақты.

2. Туындының бейнесі:

$$L\left[\frac{d\ f(t)}{d\ t}\right]= p\,F(p)- f(0), \quad (4.5)$$

мұндағы $F(p)= L[x(t)]$, $f(0)= \lim_{x(t)\to 0} x(t)$ - функцияның бастапқы мәні.

$$L[\ddot{x}(t)]= p^2 X(p)- p\,x(0)- \dot{x}(0). \quad (4.6)$$

Егер n-ші туынды болса, $L[x^n(t)= p^n X(p)-[p^{n-1}x(0)- p^{n-2}x(0)-....]$.

Нөлдік (нөл болған кездегі) бастапқы шарттар кезінде $L[x^{(n)}]= p^n X(p)$. Нөлдік бастапқы шарт кезінде нақты бөлікті $x(t)$ дифференциалдауда Лаплас $X(p)$ бойынша p бейнесіне айнымалыны көбейтуге сәйкес келеді, дифференциал қатары қандай болса, p айнымалы сол дәрежеде.

3. Интегралдың бейнесі.

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]= \frac{F(p)}{p}, \quad (4.7)$$

мұндағы $f(0)$-функцияның $t=0$ болған кездегі бастапқы мәні.

Интегралдау бейнесі $x(t)$ функцияның бейнесін p-ге бөлуге сәйкес келеді.

4. Ықшамдау (свертке) теоремасы. Егер $x_1(t), x_2(t)$ түпнұсқасы болса, олардың бейнесі $X_1(p), X_2(p)$. Онда

$$X_1 \cdot X_2 = \int_0^t x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)\cdot x_1(t-\tau)d\tau\ . \quad (4.8)$$

5. Жіктеу теоремасы. Егер $X(p)= \frac{A(p)}{B(p)}$ бөлшек рационалды түрде болса, алымның полином дәрежесі бөлім полиномының дәрежесінен аз, онда оның түпнұсқасы

$$x(t)= \sum_{K=1}^{n} \frac{A(p_K)}{B'(p_K)} e^{p_K t}\ , \quad (4.9)$$

мұндағы p_K - теңдеудің $B(p)=0$ қарапайым түбірлері.

Бұл өрнекті жіктеу теоремасы деп атайды.

Кейбір жағдайларда, бөлім құрамында көбейткіш p болса, яғни бөлім бір нөлдік түбірге $F(p)=\dfrac{A(p)}{pB(p)}$ ие болса, ал $B(p)$ құрамында нөлдік түбір жоқ болса және теңдеу $B(p)=0$ әр түрлі n мен түбірлері нөлге тең емес p_k $(k=1,2,...,n)$ ие болғанда, онда жіктеу формуласы келесі түрде болады:

$$F(p)\div f(t)=\frac{A(0)}{B(0)}+\sum_{k=2}^{k=2}\frac{A(p_k)}{pB'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (4.10)$$

Ерекшеленген тұрақты мүше $\dfrac{A(0)}{B(0)}$ тізбектегі орныққан токты немесе кернеуді көрсетеді. Егер $B(p)$ комплексті – түйіндес түбірге ие болса, p_1, p_2 онда жіктеу формуласы келесі түрде:

$$F(p)\div f(t)=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_1)e^{p_1 t}}{F_2'(p_1)}\right]. \qquad (4.11)$$

4.3 Беріліс функциясы

Лаплас бойынша беріліс функция. Беріліс функциясы – бұл бастапқы мәндер нөлге тең болатын шарттар кезінде шығыс шаманың Лаплас бойынша бейнесін кіріс шаманың Лаплас бойынша бейнесіне қатынасы [1,2]:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+...+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n}=\frac{F_2(p)}{F_1(p)}. \qquad (4.12)$$

Автоматты басқару жүйесінде екі полиномдардың бұл қатынасы операторлық беріліс функциясы деген атқа ие. Динамикалық түрде жүйенің қасиетін сипаттайтын беріліс функцияның бөлімі $F_1(p)$ сипаттамалық полином деп аталады. Теңдеудің түбірлерін $F_1(p)=0$ жүйенің полюсі деп аталады. Жүйенің шығыс шамасының бейнесін алу үшін кіріс шаманың бейнесін беріліс функцияға $Y(p)=W(p)\cdot X(p)$ көбейтсек жеткілікті.

Лаплас бейнесі бойынша жүйенің беріліс функциясы келесі қасиеттерге ие: $W(p)$ коэффициенттері әрқашан да нақты (заттық) және алымының полином дәрежесі бөлімінің полином дәрежесінен аз болады.

Дифференциалды теңдеулерді Лаплас түрлендіруін қолданып шешу келесідей болады:

а) берілген кіріс әсері $f_1(t)$ бойынша Лаплас түрлендіруі көмегімен $F_1(p)$ бейнесін табамыз;

б) дифференциалды теңдеу бойынша беріліс функцияны $W(p)$ құрайды;

в) шығыс шаманың бейнесін $F_2(p)=W(p)\cdot F_1(p)$ бойынша анықтайды;

г) белгілі шығыс шаманың $F_2(p)$ бейнесі бойынша шығыс функцияның $f_2(t)$ түпнұсқасын табамыз.

Шығыс функцияның $f_2(t)$ түпнұсқасын табу үшін түпнұсқа кестесін не болмаса жіктеу теоремасын пайдаланады.

5 Дәріс № 5. Жиіліктік және логарифмді жиіліктік сипаттамалар

Дәрістің мазмұны:

- динамикалық буындардың жиіліктік сипаттамалары;
- логарифмді жиіліктік сипаттамалары;
- жиіліктік және логарифмдің сипаттамаларды тұрғызу.

Дәрістің мақсаты:

- динамикалық буындардың жиіліктік сипаттамаларын оқып меңгеру;
- динамикалық буындардың логарифмді жиіліктік сипаттамаларын оқып үйрену.

5.1 Динамикалық буындардың жиіліктік сипаттамалары

Динамикалық буындардың маңызды сипаттамасы жиіліктік беріліс функциясы болып табылады. Оларды қарсы әсер нөлге тең болғанда, гармоникалық әсерді кіріске бере отыра жүйенің орнықты режимін қарастыру кезінде аламыз.

Кірісте гармоникалық әсер болған кездегі $x\ (t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ динамикалық буынды қарастыралық.

Комплексті түрде: $\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi_1}$,

мұндағы X_m-амплитуда;

φ_1 - бастапқы фаза;

ω - осы әсердің бұрыштық жиілігі.

Орнықты режимде сызықты буынның шығысында сол жиіліктің гармоникалық функциясы болады, бірақ жалпы жағдайда ψ бұрышқа кіріс фазамен салыстырғанда фаза бойынша ығысқан болады.

Шығыс шама : $y(t) = X_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$. Комплексті түрде: $\dot{Y} = Y_m e^{j\varphi_2}$.

Стандартты түрде сызықты буынның дифференциалды теңдеуі келесі түрде өрнектеледі:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_n = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + ... + b_m; \quad (5.1)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m) X(p); \quad (5.2)$$

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a^n} = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (5.3)$$

Комплекстік жиілікті сипаттаманы $p = j \cdot \omega$ ауыстырып алғанда қарастырылады.

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+...+b^m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+...+a^n}=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=A(\omega)e^{j\psi(\omega)}=U(\omega)+jV(\omega). \qquad (5.4)$$

Шығыс функцияның комплексті мәні кіріс функцияның комплексті мәніне қатынасы комплексті жиілікті беріліс функция деп аталады :

$$W(j\omega)=\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{Y_m}{X_m}e^{j\psi(\omega)}. \qquad (5.5)$$

Жиіліктік беріліс функция $W(j\omega)$ комплекстік сан, модулі шығыс функцияның амплитудасының кіріс функцияның амплитудасының қатынасына тең. Ал аргументі – кіріс қатынасы бойынша шығыс шаманың фазаларының ығысуы:

$W(j\omega)=|W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, мұндағы $|W(j\omega)|$ - модуль $W(j\omega)$;

$\varphi(\omega)=\arg[W(j\omega)]$ - аргумент $W(j\omega)$.

Осылайша, жүйе кірісіне гармоникалық сигналы берілсе, шығыста орнықтыланған гармоникалық шама кіріс шаманы комплексті жиілік функциясына көбейтумен анықталады.

$$\dot{Y}=W(j\omega)\cdot\dot{X}. \qquad (5.6)$$

Комплекстік беріліс функцияны келесі түрде қарастыруға болады:

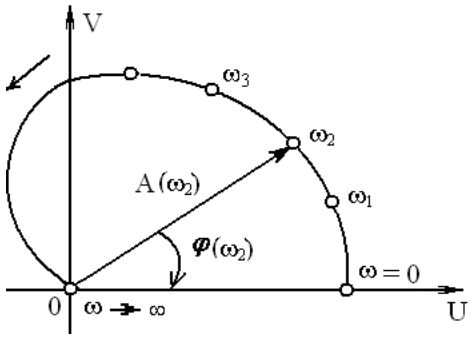
$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)};$$

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}+\pi k\right). \qquad (5.7)$$

Комплексті жазықтықта жиілікті беріліс функция $W(j\omega)$ ұзындығы - $A(\omega)$ тең болатын векторды көрсетеді, ал аргументі (осы вектормен нақты оң полюстен құралған бұрыш) - $\varphi(\omega)$. Жиілігі 0 - ден ∞- дейін өзгеру кезіндегі осы вектордың соңы комплексті жазықтықта сипаттайтын қисықты амплитудалы-фазалы жиіліктік сипаттама деп атайды.

Амплитудалы - фазалы жиіліктік сипаттама $W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$ жиіліктік беріліс функциясына сәйкес болатын векторлардың (годограф) соңының геометриялық орнын көрсетеді.

Жиілікті нөлден шексіздікке дейін өзгертіп, абсцисса өсі бойынша нақты бөлігін, ал ордината өсі бойынша жорамал бөлігін бейнелейді. Әр жиілік үшін нүкте белгіленеді. Алынған нүктелерді бір-бірімен қосады (5 сурет).



5 сурет – Буынның амплитудалы-фазалы жиіліктік сипаттамасы

Сонымен қатар жиіліктік беріліс функцияны амплитудалы-фазалы жиіліктік функция деп аталады. Оның нақты бөлігін $U(\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega]$ нақты жиіліктік функия, ал жорамал бөлігін $V(\omega) = \mathrm{Im}[W(j\omega)]$ жорамал жиіліктік функция деп атайды. Модулін $A(\omega) = |W(j\omega)|$ амплитудалы-жиіліктік функция деп атайды, оның сызбасын амплитудалы жиіліктік сипаттама дейді. Аргументті $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ фазалы жиіліктік функция, ал оның сызбасын фазалы жиіліктік сипаттама деп атайды.

5.2 Логарифмдік жиіліктік сипаттамалар

Іс жүзінде логарифмдік жиіліктік сипаттамаларды пайдалану қолайлы: логарифмдік амплитудалы жиіліктік сипаттама (ЛАЖС) және логарифмдік фазалы жиіліктік сипаттама (ЛФЖС).

Жиіліктік беріліс функция: $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Жиіліктік беріліс функцияны өрнегін логарифмдейміз:

$$\ln W(j\omega) = \ln\left[A(\omega)\cdot e^{j\omega}\right] = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \qquad (5.8)$$

Бұл өрнектен көретініміз, жиіліктік беріліс функцияның логарифмі комплексті шама болып табылады, нақты бөлігі модулдің логарифмі, ал жорамал бөлігі фаза болады.

Практикадағы есептеулер мен жеке ЛАЖС және ЛФЖС тұрғызуға ондық логарифмді қолдану ыңғайлы.

Логарифмдік амплитудалы-жиіліктік функция деп келесі функцияны атайды:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|. \qquad (5.9)$$

$L(\omega)$ өлшем бірлігі – децибел, ал жиілік логарифмінің өлшем бірлігі декада болып табылады.

Логарифмдік амплитудалы-жиілік функцияның $L(\omega)$ жиілік логарифмінен $\lg(\omega)$ тәуелділік сызбасын логарифмдік амплитудалы-жиіліктік сипаттамасы деп атайды.

Фазалы жиіліктік функцияның жиілік логарифмінен тәуелділік сыздасын логарифмдік фазалы $\lg(\omega)$ жиіліктік сипаттама деп атайды. Логарифмдік фазалы жиіліктік сипаттама үшін қарапайым фазалы жиіліктік сипаттама үшін алынған $\varphi(\omega)$ өрнегі пайдаланылады.

ЛАЖС-ны тұрғызудың кейбір ерекшеліктері:

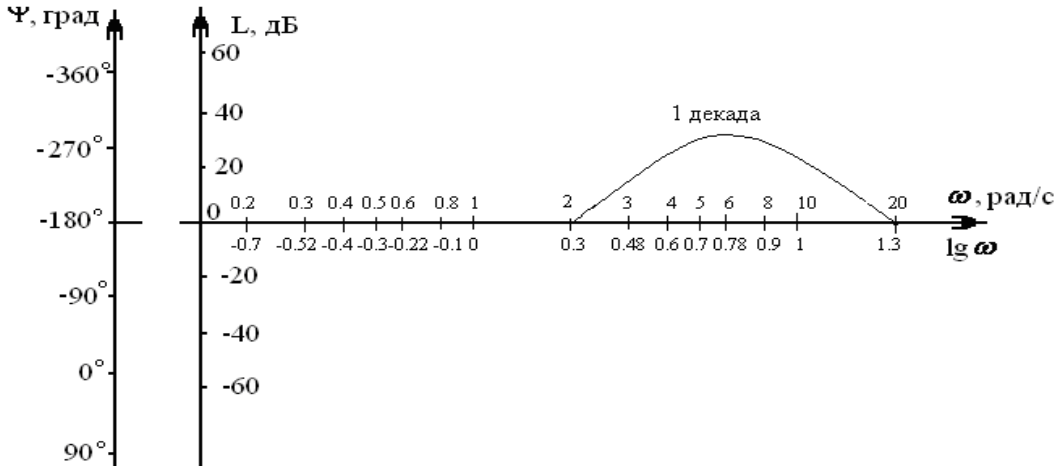
1) логарифмдік жиіліктік сипаттамаларды (ЛЖС) тұрғызу кезінде абсцисса өсі бойынша логарифмді мсштабта ω бұрыштық жиілік алынады, яғни белгілеуде $\lg(\omega)$ мәні емес, оған сәйкес келетін ω мәні жазылады.

2) жиілігі $\omega = 0$ шексіз алыстатылған нүктеге сәйкес келеді, $\omega = 0,\ \lg 0 \to -\infty$ кезінде, осыны ескергенде, ординат өсі өзінен ЛАС барлық сипаттамасы оң жағында болатындай жүргізіледі. Теріс жиіліктер қарастырылмайды.

Жиіліктің 10 рет өзгеруіне сәйкес келетін интервал декада деп аталады. Декада ұзындығы да оның өсте орналасуынан тәуелсіз.

3) Ордината өсінде бірөлшемді масштабта $L(\omega)$ мәні децибелмен (дБ) алынады. Абсцисса өсі 0 дБ нүктесі арқылы өту керек, $A(\omega) = 1$ модуль мәнімен сәйкес келеді, себебі $\lg 1 = 0$.

Логарифмдік фаза-жиіліктік сипаттама ЛАЖС-мен бірге тұрғызылады, ескере кететін жай, екеуінің де сипаттамаларының горизонталі жалпы болады. Сызықты масштабта ординат өсі бойынша фаза градуспен алынады. ЛАЖС мәнінің оң есептеу бағыты төмен болады. ЛАЖС (горизонталь өспен қиылысуы) үшін 0 дБ нүктесімен -180^0 нүктесі бірігеді (6-суретті қараңыз). Сондай- ақ, логарифмді фазалы-жиілікті сипаттама фаза-жиілікті сипаттаманы қайталайды, біресе оны тұрғызбайды және буындар сипаттамасы үшін практикада қолданбайды.



6 сурет – ЛАЖС және ЛФЖС тұрғызуға арналған стандартты тор

Логарифмді амплитудалы жиіліктік сипаттаманың басты қасиеті есептеусіз-ақ тұрғызуға болатындығында болып отыр, үлкен емес сызбада кең диапазон қамтылуы мүмкін.

Осыдан басқа, үлкен нақтылықты ЛАЖС бірқатар бөліктерінде түзу сызықтармен – асимптотамен алмастырылуы мүмкін. Олар оң және теріс көлбеулерге ие, еселі $20^{дб}/_{дек}$, яғни $0^{дб}/_{дек}$, $-20^{дб}/_{дек}$, $-40^{дб}/_{дек}$, сонымен қатар $+20^{дб}/_{дек}$, $+40^{дб}/_{дек}$.

Жиіліктің жеке бөліктерінде кривизной ЛАЖС елемеуі мүмкін. Онда ЛАЖС түзу кесінділермен (асимптотамен) бейнеленеді, және асимптоталы ЛАЖС деп аталады. Оны тұрғызу үшін тек қарапайым есептеулер қажет.

6 Дәріс №6. Уақыттық функциялар және уақыттық сипаттамалар. Автоматты басқару жүйелерінің негізгі типтік буындары

Дәрістің мазмұны:

- динамикалық буындардың уақыттық функциялары және сипаттамалары;
- уақыттық сипаттамаларды тұрғызу;
- басқару жүйесінің типтік буындары.

Дәрістің мақсаты:

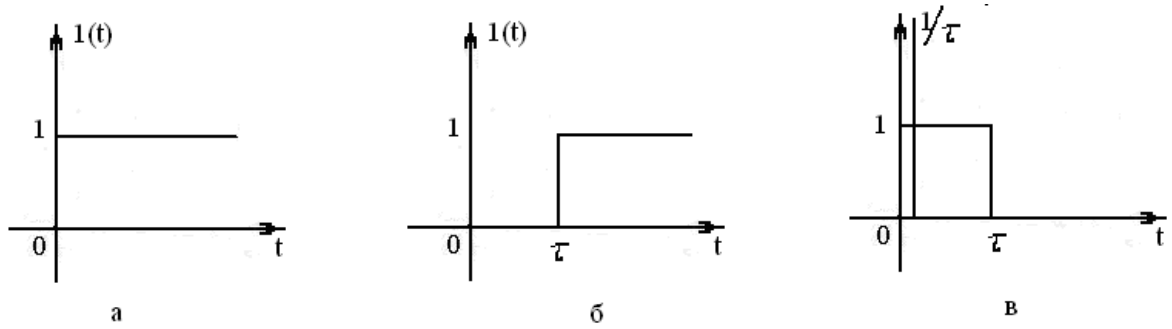
- динамикалық буындардың уақыттық сипаттамаларын оқып меңгеру;
- типтік буындардың негізгі сипаттамаларын оқып меңгеру.

6.1 Бірлік сатылы және импульсті функциялар

Автоматты реттеу теориясында екі функция кеңінен қолданылады: бірлік сатылы функция және бірлік импульсті функция.

Бірлік сатылы функция $1(t)$ деп белгіленеді және төмендегі теңдеумен анықталады (7, а сурет):

$$1(t) = \begin{cases} 1, кезінде\ t \geq 0 \\ 0, кезінде\ t < 0. \end{cases} \qquad (6.1)$$



7 сурет - Бірлік сатылы функция (а,б), бірлік импульсті функция (в)

τ уақытқа ығысқан функция $1(t-\tau)$ деп белгіленеді (7, б сурет):

$$1(t-\tau)=\begin{cases}1, & \textit{кезінде } t\geq\tau\\ 0, & \textit{кезінде } t<\tau\end{cases}. \qquad (6.2)$$

Кез келген уақыт функциясын $x(t)$ бірлік сатылы функцияға көбейту кезінде уақыттық функциясы тек қана $t\geq 0$ ауданда $x(t)$ тең болады. $t<0$ кезінде нөлге тең болады.

Бірлік импульсті функцияны немесе дельта-функцияны $\delta(t)$ барлық t ауданда нөлге тең функция ретінде анықтайды, тек $t=0$ жағдайында $\delta(0)=\infty$ болады.

Дельта-функция келесі түрде беріледі:

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \textit{кезінде } t<0\\ \infty & \textit{кезінде } t=0\\ 0 & \textit{кезінде } t>0\end{cases}. \qquad (6.3)$$

Дельта-функция бірлік сатылы функцияның туындысы болып табылады: $\delta(t)=\dfrac{d1(t)}{dt}=1'(t)$ және өте енсіз импульс ретінде көрсетіледі, оның ұзақтығы нөлге ұмтылғанда, ауданы бірге тең болып қалады. Іс жүзінде жүзеге аспайды. Ол формальды түрде алынуы мүмкін, мысалы ауданы бірге тең бірлік импульстен $\tau\to 0$ өткен жағдайда (7, в сурет). Дельта-функцияның негізгі қасиеті – оның бірлік ауданға $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$ ие болуы.

Лаплас бойынша бейнесі $L[\delta(t)\}=1,\quad L[\dot{\delta}(t)]=s,\quad L[\overset{(m)}{\delta}(t)]=s^m.$

Автоматты жүйелердің (буындардың) өте маңызды сипаттамасы өтпелі және импульсті өтпелі функциялар немесе зілдеме функциясы болып табылады. Олардың сызбасын уақыттық сипаттамалар деп атайды.

Өтпелі функция немесе өтпелі сипаттама кіріс әсері бастапқы мәндері нөл болатын шарт кезіндегі бірлік сатылы функция түріндегі буынның немесе жүйенің шығыс шамасының өзгерісін сипаттайды, яғни өтпелі функция $h(t)$ бастапқы мәні нөлге тең болатын шарт кезіндегі бірлік сатылы әсер етуде буынның не жүйенің реакциясын сипаттайды.

Зілдеме функциясы $w(t)$ деп бірлік импульсті функцияға $\delta(t)$ буынның реакциясын айтады. Зілдеме функция сызбасы деп импульсті өтпелі сипаттаманы айтады.

Өтпелі функция $h(t)$ мен зілдеме функциясы $w(t)$ арасындағы байланысты қарастырайық. Зілдеме функциясы

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}, \qquad (6.4)$$

яғни, өтпелі функцияны уақыт бойынша дифференциалдау арқылы салмақ функциясын алуға болады.

Зілдеме функциясы оның беріліс функциясын Лаплас түрлендіруімен байланысты:

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt; \qquad (6.5)$$

$$W(p) = L[w(t)], \quad w(t) = L^{-1}[W(p)].$$

Беріліс функция – зілдеме функцияның бейнесі. Зілдеме функциясы – беріліс функциясының Лаплас бойынша кері түрлендіруі. $h(t)$ бейнесі:

$$L[h(t)] = \frac{1}{p} W(p), \qquad (6.6)$$

онда

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} W(p)\right]. \qquad (6.7)$$

Зілдеме және өтпелі функциялар бастапқы мәндері нөлге тең болған шарттар кезінде жүйенің (буынның) толық сипаттамалары болып табылады. Осыдан бірден өтпелі функция бойынша түйін интегралы көмегімен еркін кіріс әсер кезінде шығыс шаманы анықтауға болады.

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau; \qquad (6.8)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\; w(t-\tau)\, d\tau\,.$$

6.2 Автоматты басқару теориясындағы негізгі типтік буындар

Буын – элементтің математикалық моделі немесе жүйенің кез келген бөлігі. Буында, жүйе сияқты жоғары ретті дифференциалдық теңдеулермен жазылады және олардың беріліс функциялары төмендегі түрде болуы мүмкін:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b^m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a^n}\,. \qquad (6.9)$$

Динамикалық жүйені типтік немесе элементар буындардың қосылуы ретінде қарастыруға болады. Олардың дифференциалдық теңдеулер реті екіден аспауы керек.

Егер буынның беріліс функциялары қарапайым элементар көбейткіш немесе элементар бөлгіштер түріне ие болса, онда типтік немесе элементар буындар деп атайды. Типтік буындарды қарапайым бірінші және екінші ретті дифференциал теңдеулермен ажыратуға болады:

а) қарапайымы: инерциясыз, интегралдаушы, дифференциалдаушы буындар;

б) бірінші ретті буындар: инерциялы, инерциялы- диффененциалдаушы, форсирлеуші, инерциялы - форсирлеуші;

в) екінші ретті тербелмелі буын.

Егер буынның шығыс шамасы әр уақытта кіріс шамаға пропорционал болса, онда инерциясыз немесе пропорционал буын деп аталады.

Инерсиясыз буынның теңдеу түрі $y(t) = K \cdot x(t)$, мұндағы K - пропорционалдық немесе буынның беріліс коэффициенті;

$x(t)$ - кіріс сигнал және әсер;

$y(t)$ - шығыс сигнал.

Осындай буынға мысал ретінде редуктор, рычақ, тұрақты ток күшейткіштері, кернеу бөлгіштері жатады.

Кірістен шығысқа сигналдың берілуі қандай да бір инерциясыз тез іске асырылады, сондықтан буын инерциясыз деп аталады. Инерциясыз буын өзі арқылы кіріс сигналды оның масштабын өзгерте отыра және пішінін өзгертпей өткізетін қасиетке ие. Кіріс сигналдың масштабын өзгерту k мәнімен анықталады.

Егер инерциясыз буынға синусоидалы сигнал берсек $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$, онда шығысында да $y = Y_m \sin(\omega t + \varphi_Y)$ шама синусоидалы болады, мұндағы $Y_m = k \cdot X_m$ сигналдың амплитудасы.

Комплексті түрде: $\dot{Y} = k \cdot \dot{X}$. Комплексті жиілікте $Y(j\omega) = k \cdot X(j\omega)$.

Комплексті жиіліктік беріліс коэффициенті:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k.$$

Буынның беріліс фцнкциясы : $W(p) = k$, онда комплексті жиіліктік сипаттамасы: $W(j\omega) = K = K + j0 = U(\omega) + jV(\omega).$

Амплитудалы-жиіліктік сипаттамасы (АЖС): $W(\omega) = |W(j\omega)| = K.$

Фазалы-жиіліктік сипаттамасы (ФЖС): $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 0.$

Нақты жиіліктік сипаттамасы: $U(\omega) = K.$

Жорамал жиіліктік сипаттамасы: $V(\omega) = 0.$

Өтпелі (уақыттық) сипаттамасы:

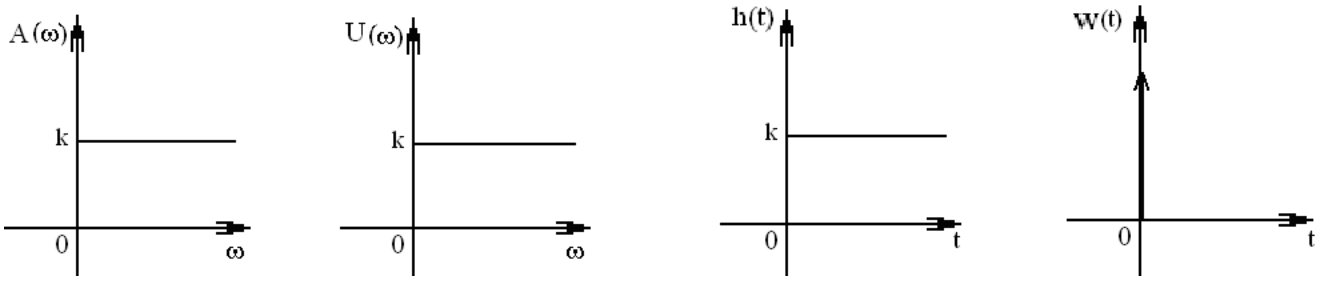
$$h(t) = L^{-1}(\frac{W(p)}{p}) = L^{-1}\left(\frac{k}{p}\right) = kL^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = k \cdot 1(t). \qquad (6.10)$$

Зілдеме функциясы : $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t).$

8-суретте буынның АЖС, өтпелі және импульсті сипаттамалары көрсетілген.

Идеал интегралдаушы буын. Идеал интегралдаушы буын деп шығыс шамасы уақыт бойынша кіріс шамасының интегралына пропорционал. Шығыс шамасы кіріс шамасымен келесі теңдеумен байланысты:

$$y(t) = K\int_0^\infty x(t)dt; \quad y'(t) = K \cdot x(t); \quad \frac{dy(t)}{dt} = K \cdot x(t), \qquad (6.11)$$



8 сурет – Инерциясыз буынның жиіліктік және уақыттық сипаттамалары

Егер интегралдаушы буын кірісіне синусоидалы сигнал берілсе $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$, онда шығыста сигнал кіріс интегралы сияқты анықталады: $y = -\left(\frac{K}{\omega}\right) X_m \cos(\omega t + \varphi_X)$.

Теңдеу комплексті түрде $\dot{Y} = \frac{K}{p}\dot{X}$, немесе $Y(p) = \frac{K \cdot X(p)}{p}$.

Беріліс функциясы: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{p}$.

Комплексті беріліс коэффициенті: $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-j90^0} = A(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}$.

Амплитудалы-жиіліктік функция: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$.

Фазалы-жиіліктік функция: $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = -90^0$.

Алгебралық түрдегі комплексті жиіліктік функция:

$$W(j\omega) = -j\frac{K}{\omega} = 0 - jV(\omega).$$

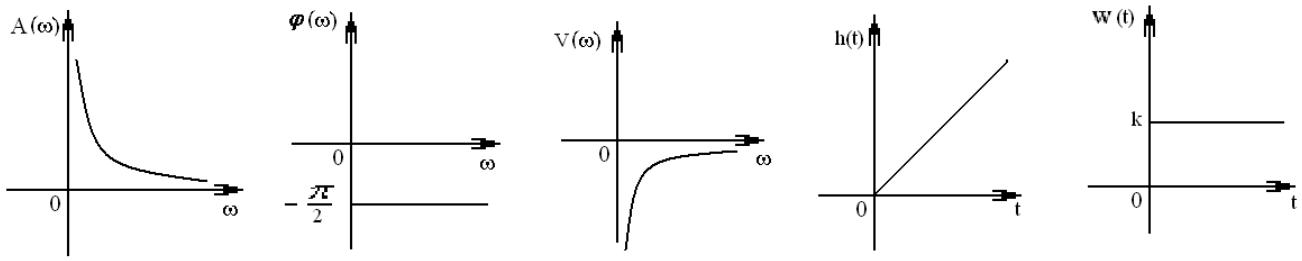
Нақты жиіліктік функция: $U(\omega) = 0$.

Жорамал жиіліктік функция: $V(\omega) = -\frac{K}{\omega}$.

Өтпелі функция: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{p} \cdot \frac{1}{p}\right] = KL^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = K \cdot t \cdot 1(t)$.

Импульсті немесе зілдеме функциясы: $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K \cdot 1(t)$.

Жиіліктік және уақыттық сипаттамалар 9 - суретте көрсетілген.



9 сурет – Интегралдаушы буынның жиіліктік және уақыттық сипаттамалары

7 Дәріс №7. Типтік буындардың теңдеуі және олардың сипаттамалары

Дәрістің мазмұны:

- типтік буындардың байланыс теңдеулері;
- типтік буындардың жиілігі және уақыттық сипаттамалары.

Дәрістің мақсаты:

- негізгі типтік буындардың байланысын оқып білу;
- типтік буындардың негізгі сипаттамаларын меңгеру.

7.1 Дифференциалдаушы буын

Егер буынның шығыс және кіріс шамалары келесі теңдеумен сипатталса, буынды дифференциалдаушы буын деп айтады:

$$y(t) = K \cdot \frac{dx(t)}{dt}. \qquad (7.1)$$

Шығыс шама кіріс шаманың өзгеру жылдамдығына пропорционал.

Егер интегралдаушы буынның кірісіне синцсоидалы сигнал $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$ берілсе, онда шығыста сигнал кіріс шаманың туындысымен анықталады: $y = K\,\omega\, X_m \cos(\omega t + \varphi_X)$.

Дифференциалдаушы буынның беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K\ p\ X(p)}{X(p)} = K\ p. \qquad (7.2)$$

Дифференциалдаушы буынның комплексті жиіліктік беріліс коэффициенті:

$$W(j\omega) = j\omega K = 0 + j\omega K = \omega K\, e^{j90^0}. \qquad (7.3)$$

Амплитудалы-жиілікті функция: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \omega K$.

Фазалы-жиілікті функция: $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 90^0 = \frac{\pi}{2}$.

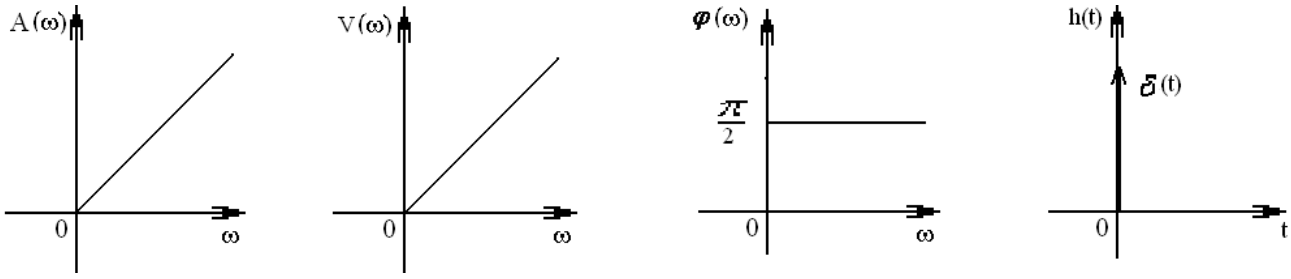
Нақты жиіліктік функция: $U(\omega) = 0$.

Жорамал жиілікті функция: $V(\omega) = \omega \cdot K$.

Өтпелі функция: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right] = L^{-1}[K] = \delta(t)$.

Зілдеме функция: $w(t) = \dot{\delta}(t)$.

Жиілікті және уақыттық сипаттамалар 10-суретте көрсетілген.



10 сурет – Дифференциалдаушы буынның жиіліктік және уақыттық сипаттамалары

7.2 Бірінші ретті инерциялы буын (апериодты)

Буынның кіріс шама мен шығыс шама арасындағы байланысы төмендегі дифференциалды теңдеумен анықталса, онда инерциялы буын болып табылады:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t), \qquad (7.4)$$

мұндағы $y(t)$ - шығыс шама;

$x(t)$ - кіріс шама;

T - буынның уақыт тұрақтысы;

K - буынның күшейткіш коэффициенті.

Инерциялы буын екі параметрмен сипатталады: уақыт тұрақтысы T және беріліс коэффициенті K.

Беріліс функциясы: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$

$$T \cdot p \cdot Y(p) + Y(p) = K \cdot X(p);$$
$$Y(p)[1 + T \cdot p] = K \cdot X(p);$$
$$Y(p) = \frac{K \cdot X(p)}{[1 + T \cdot p]}; \qquad (7.5)$$
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}.$$

$W(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$ - инерциялы буынның беріліс функциясы.

Жиіліктік беріліс функция:

$$W(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega\cdot T}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}\,e^{-j\,arctg(\omega\cdot T)}=W(\omega)e^{-j\,\varphi(\omega)}. \qquad (7.6)$$

Амплитудалы-жиіліктік функция: $W(\omega)=|W(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}$.

Фазалы-жиіліктік функция: $\varphi(\omega)=-arctg(\omega\cdot T)$.

Алгебралық түрі:

$$W(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}=\frac{K}{1+(\omega T)^2}-j\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2}=U(\omega)-jV(\omega). \qquad (7.7)$$

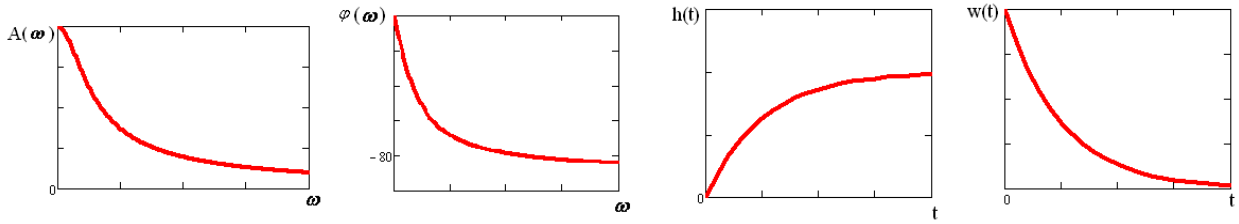
Нақты жиіліктік функция: $U(\omega)=\frac{K}{1+(\omega T)^2}$.

Жорамал жиіліктік функция: $V(\omega)=-\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2}$.

Беріліс функциясы: $h(t)=L^{-1}\left[\frac{K}{1+pT}\cdot\frac{1}{p}\right]=K(1-e^{-\frac{t}{T}})\cdot 1(t)$.

Зілдеме функциясы: $w(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\cdot 1(t)$.

Инерциялы буынның жиіліктік және уақыттық сипатталары 11- суретте көрсетілген.



11 сурет – Инерциялы буынның жиіліктік және уақыттық сипатталары

7.3 Тербелмелі буын

Тербелмелі буын екінші ретті теңдеумен сипатталады:

$$T_2^2\,y''(t)+T_1\,y'(t)+y(t)=K\,x(t)$$
$$T_2^2\frac{d^2y}{dt^2}+T_1\frac{dy}{dt}+y(t)=Kx(t) \qquad (7.8)$$

немесе өзгеше түрде:

$T=T_2$, $\xi=\frac{T_1}{2\cdot T}$ осы түрлендірулерді ескере отыра алатынымыз:

$$T^2\,y''(t)+2\xi T\,y'(t)+y(t)=K\,x(t). \qquad (7.9)$$

Символды түрде:

$$T^2\,p^2Y(p)+2\xi T\,pY(p)+Y(p)=K\,X(p);$$
$$Y(p)\left[T^2\,p^2+2\xi T\,p+1\right]=K\,X(p). \qquad (7.10)$$

Тербелмелі буынның беріліс функциясы:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K}{T^2\,p^2+2\xi T\,p+1},$$

мұндағы T - тербелмелі буынның уақыт тұрақтысы.

Жиілікті беріліс функция:

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{K}{T^2(j\omega)^2+2\xi T(j\omega)+1}. \qquad (7.11)$$

Амплитудалы-жиіліктік функция:

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\xi^2T^2\omega^2}}. \qquad (7.12)$$

Алгебралық түрде комплексті жиіліктік функция:

$$W(j\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2+2\cdot\xi T(j\omega)}=\frac{K(1-(T\omega)^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}-j\frac{KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}.$$

Нақты жиіліктік функция:

$$U(\omega)=\frac{K(1-(T\omega)^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}. \qquad (7.13)$$

Жорамал жиіліктік функция:

$$V(\omega)=-\frac{KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}. \qquad (7.14)$$

Фазалы-жиіліктік функция: $\varphi(\omega)=-arctg\,\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}$.

Сипаттамалық теңдеу: $Z(p)=T^2\,p^2+2\xi T\,p+1=0,\ 0<\xi<1.$

Комплексті-түйіндес түбірлер: $p_{1,2}=\frac{-\xi}{T}\pm\sqrt{\frac{\xi^2-1}{T}}=-\alpha\pm j\beta,$

мұндағы $\alpha=\frac{\xi}{T}$ - өшу коэффициенті , $\beta=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ - буын тербелісінің дербес жиілігі.

Аналитикалық шешім: $y(t)=Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)$, мұндағы $\varphi=arctg\,\frac{\beta}{\alpha}$, С – тұрақты.

Өтпелі функция:

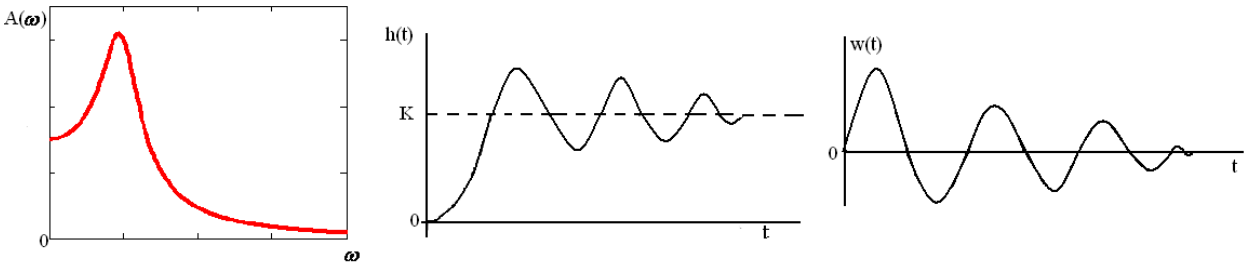
$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{K}{1+2\xi pT+(pT)^2}\cdot\frac{1}{p}\right]=K\cdot1(t)\left[1-e^{-\alpha\cdot t}(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)\right]. \qquad (7.15)$$

Зілдеме функциясы: $w(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{K\omega_0^2}{\beta}\cdot1(t)e^{-\alpha t}\sin\beta t$, мұндағы

$\omega_0=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{T}$.

Буынның сипаттамасы: өшу темпі $e^{-\alpha t}$, тербеліс периоды: $T=\frac{2\pi}{\beta}$.

Тербелмелі буынның жиіліктік және уақыттық сипаттамалары 12-суретте көрсетілген.



12 сурет – Тербелмелі буынның жиіліктік және уақыттық сипаттамалары

8 Дәріс № 8. Негізгі типтік буындардың логарифмдік сипаттамалары

Дәрістің мазмұны:

- негізгі типтік буындардың логарифмді жиіліктік сипаттамалары;
- типтік буындардың логарифмдік сипаттамаларын тұрғызу ерекшеліктері.

Дәрістің мақсаты:

- типтік буындардың логарифмдік сипаттамаларын меңгеру және оқып білу;
- типтік буындардың логарифді жиіліктік сипаттамаларын тұрғызу әдістерін меңгеру және оқып білу.

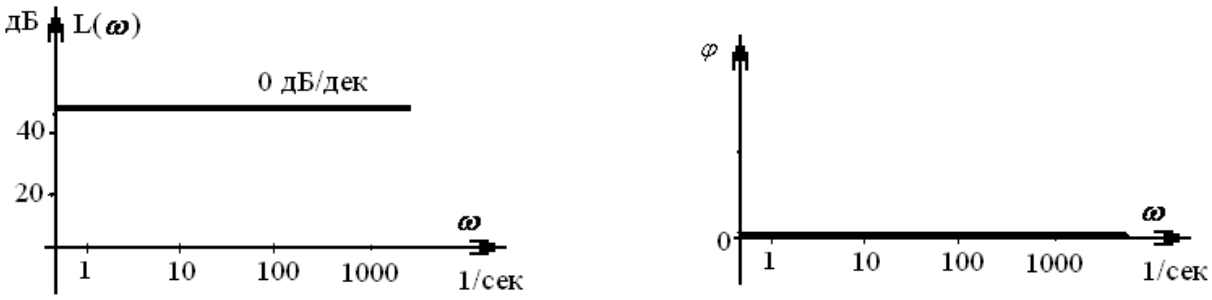
Негізгі типтік буындардың логарифмдік жиіліктік сипаттамаларын қарастыралық.

Инерциясыз буын. Бұл буынның беріліс функциясы келесі түрде болады $W(p) = K$. Комплексті жиіліктік сипаттамасы $W(j\omega) = K$. Комплексті жиіліктік сипаттамасы тек нақты (заттық) бөліктен $U(\omega) = K$ тұрады, жорамал бөлігі $V(\omega) = 0$. Комплексті жиіліктік сипаттамасының аргументі $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = 0$. Инерциялы емес буынның жиілікті беріліс функциясының модулі тұрақты санға $A(\omega) = K$ тең.

Инерциялы емес буынның логарифмді амплитудалы - жиіліктік сипаттамасы келесі түрде болады:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg A(\omega) = 20\lg K. \qquad (8.1)$$

ЛАЖС абцисса өсіне параллель түзу болады (13 а сурет). Барлық жиіліктер үшін логарифмді фаза-жиіліктікті сипаттама жиіліктер өсімен сәйкес келеді, яғни $\varphi = 0$.



а) б)

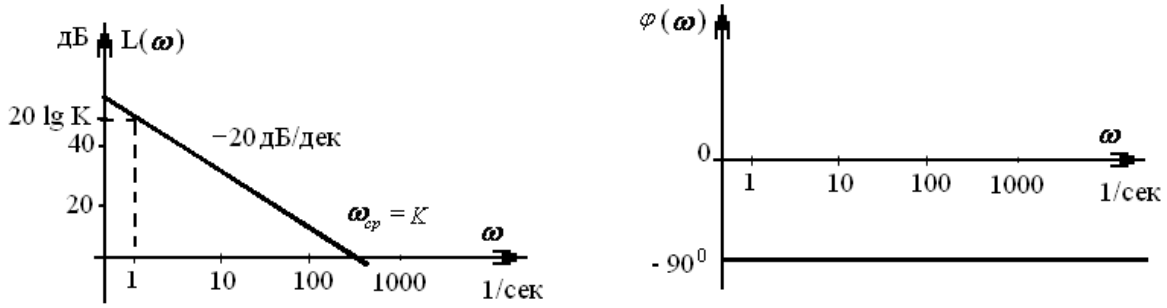
13 сурет – Инерциялы емес буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік (а) және логарифмді фаза-жиіліктік (б) сипаттамалары

Интегралдаушы буын. Идеал интегралдаушы буынның беріліс функциясы: $W(p)=\frac{K}{p}$. Буынның комплексті жиіліктік сипаттамасы: $W(j\omega)=\frac{K}{j\omega}=\frac{K}{\omega}e^{-j90^0}$. Интегралдаушы буынның АЖС: $A(\omega)=\frac{K}{\omega}$, буынның ФЖС: $\varphi(\omega)=-90^0$. Интегралдаушы буынның амплитудалы-жиіліктік функциясы:

$$L(\omega)=20\lg A(j\omega)=20\lg\frac{K}{\omega}=20\lg K-20\lg\omega. \qquad (8.2)$$

ЛАЖС сызбасы түзу сызықты, координатасы $\omega=1\ сек^{-1}$ және $L(\omega)=20\lg K$ нүктесі арқылы өтеді және теріс көлбеуге $20\,{}^{дб}\!/_{дек}$ ие болады. Сондай-ақ жиіліктің он рет өсуі $\lg\omega$ бір бірлікке өсуіне әкеледі, яғни $L(\omega)$ 20 *дб-ге* азаюы (14 а сурет).

Буынның ЛФЖС $\varphi(\omega)=-90^0$ теңдеуі бойынша тұрғызылады, бұл жерден көретініміз, сипаттама жиіліктен тәуелді емес және абцисса өсіне -90^0 қашықтықта параллель түзу өтеді (14 б сурет).



а) **б)**

14 сурет – Идеал интегралдаушы буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік (а) және логарифмді фаза-жиіліктік (б) сипаттамалары

K коэффициентінің өлшемділігі $[сек^{-1}]$ болуы керек. Сәйкесінше $A(\omega)=\frac{k_1}{\omega^2}$ жағдайда ЛАЖС теріс көлбеулі $40^{дб}/_{дек}$ түзу сызықты болады. Бұл түзу қандай да бір нүкте бойынша тұрғызылуы мүмкін, мысалы $\omega=1\ сек^{-1}$ нүктесі бойынша және $L(\omega)=20\lg k_1$ немесе кесу жиілігі бойынша $\omega=\sqrt{k_1}$.

Көріп отырғанымыздай, бұл жағдайда k_1 коэффициентінің өлшемділігі $[сек^{-2}]$ болу қажет.

Дифференциалдаушы буын. Идеал дифференциалдаушы буынның беріліс функциясы мына түрде болады: $W(p)=K\cdot p$.

Комплексті жиілікті беріліс функциясы: $W(j\omega)=j\omega K=\omega K\cdot e^{j90^0}$.

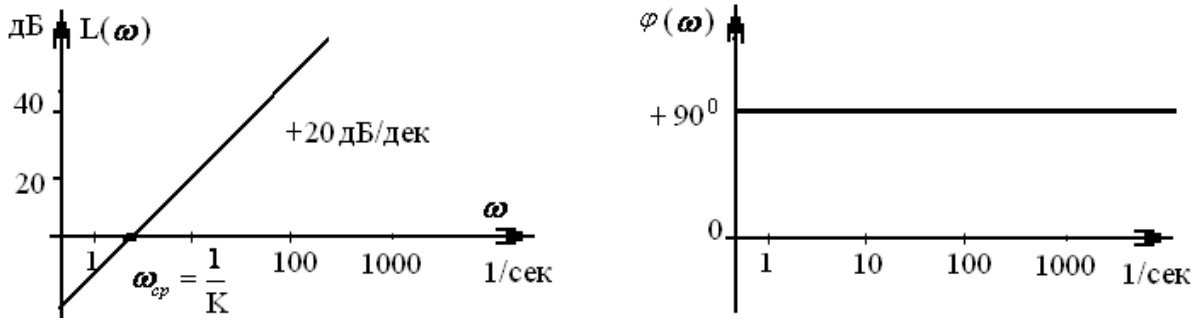
Буынның АЖС: $A(\omega)=\omega K$ және ФЖС: $\omega=90^0$.

Идеал дифференциалдаушы буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік функциясы:

$$L(\omega)=20\lg|W(j\omega)|=20\lg A(\omega)=20\lg K+20\lg\omega. \qquad (8.3)$$

Буынның ЛАЖС $\omega=\frac{1}{K}$ кезінде нөл арқылы өтетін $+20^{дб}/_{дек}$ көлбеулі түзу сызық түрінде болады (15 а сурет).

ЛФЖС абцисса өсіне параллель түзу сызық болады және одан $+90^0$ қашықтықта өтеді (15 б сурет).



а) **б)**

15 сурет – Идеал дифференциалдаушы буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік (а) және логарифмді фаза-жиіліктік (б) сипаттамалары

Бірінші ретті инерциялық буын (апериодты).

Инерциялы буынның беріліс функциясы:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{1+T\cdot p}. \qquad (8.4)$$

Жиіліктік беріліс функциясы:

$$W(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega\cdot T}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}e^{-jarctg(\omega\cdot T)}=W(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \qquad (8.5)$$

Амплитудалы-жиілікті функциясы:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega \cdot T)^2}}. \qquad (8.6)$$

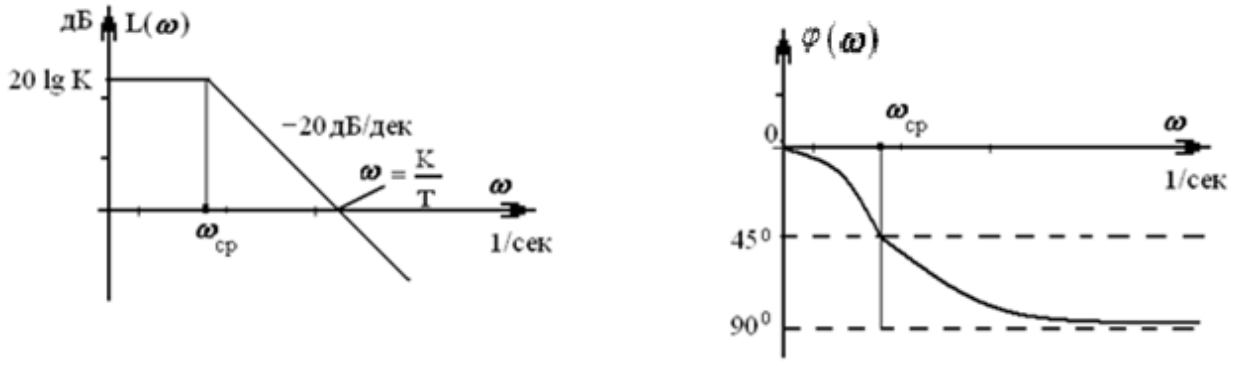
Фаза-жиіліктік функциясы: $\varphi(\omega) = -arctg(\omega \cdot T)$.

Инерциялы буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік функциясы:

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\right) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+\omega^2 T^2} = 20\lg K - 10\lg(1+\omega^2 T^2). \qquad (8.7)$$

Егер $\omega^2 T^2 << 1$ болған кезде, $L(\omega) = 20\lg K$ ие. Бұл – абцисса өсіне параллель, төменгі жиілікті асимптота. Жоғары жиіліктер $\omega^2 T^2 >> 1$ кезінде $L(\omega) \approx 20\lg K - 20\lg \omega T$ болады. Бұл –жоғары жиілікті асимптота.

Асимптоталық ЛАЖС $\omega_{кесу} = \frac{1}{T}$ жиілігінде түйіндесетін екі асимптотадан құралады, сонымен бірге бұл жиілікте екі асимптотаның да теңдеулерін қанағаттандырады. Инерциялық буынның ЛЖС 16 - суретте көрсетілген.



а) **б)**

16 сурет – Инерциялы буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік (а) және логарифмді фаза-жиіліктік (б) сипаттамалары

Тербелмелі буын. Тербелмелі буынның беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \qquad (8.8)$$

Тербелмелі буынның жиіліктік функциясы:

$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T (j\omega) + 1}. \qquad (8.9)$$

Амплитудалы-жиіліктік функция:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi^2 - 1) + \omega^4 T^4}}. \qquad (8.10)$$

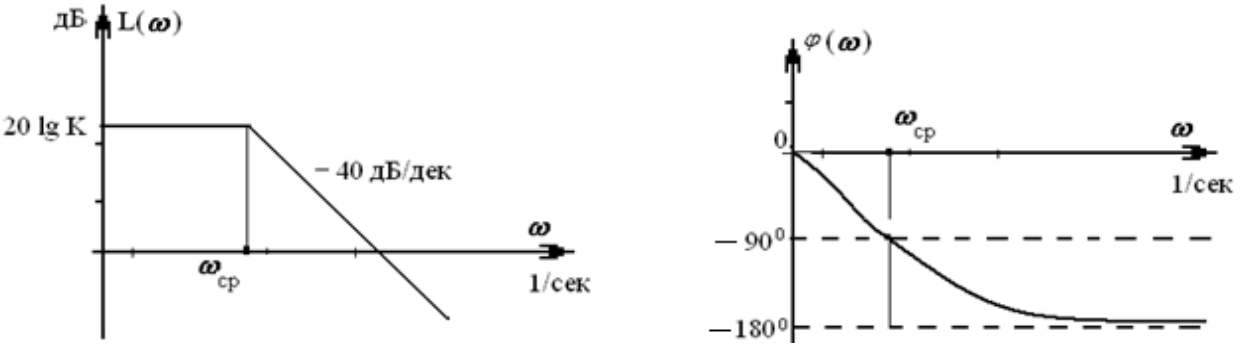
Тербелмелі буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік сипаттамасы келесі өрнек бойынша өрнектеледі:

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+2\omega^2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4} = \\ = 20\lg K - 10\lg\left[1+2\omega^2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4\right]. \quad (8.11)$$

Төменгі және жоғары жиілікті екі аймақ қарастырылады.

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg K, & \omega T << 1 \quad кезінде \\ 20\lg K - 40\lg \omega T, & \omega T >> 1 \quad кезінде. \end{cases}$$

Асимптоталық ЛАЖС $\omega_{кесу} = \frac{1}{T}$ жиілігінде түйіндесетін екі асимптотадан құралады. Төменгі жиілкті асимптота абсцисса өсіне параллель, ал жоғары жиілікті асимптота теріс көлбеуге ие болады және $40^{дб}/_{дек}$ азаяды. Тербелмелі буынның асимптоталық ЛЖС-сы 17- суретте көрсетілген.



а) **б)**

17 сурет – Тербелмелі буынның логарифмді амплитудалы-жиіліктік (а) және логарифмді фаза-жиіліктік (б) сипаттамалары

9 Дәріс № 9. Құрылымдық сұлбалар мен құрылымдық сұлбаларды эквивалентті түрлендіру

Дәрістің мазмұны:

- автоматты басқару жүйелердің құрылымдық сұлбалары;
- құрылымдық сұлбалардың элементтері және олардың қосылуы;
- құрылымдық сұлбалардың эквивалентті түрлендірулер;
- эквивалентті беріліс функцияны табу жолдары.

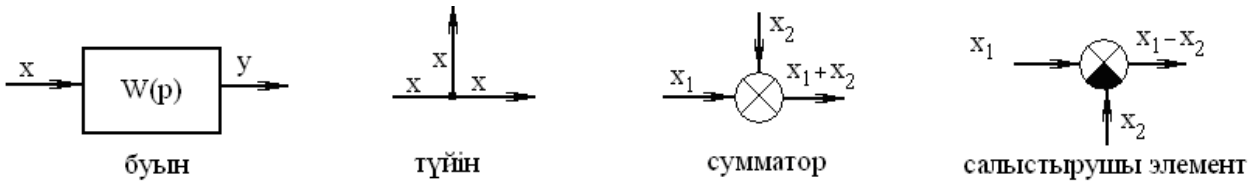
Дәрістің мақсаты:

- құрылымдық сұлбалардың элементтерін қосуды оқып білу;
- құрылымдық сұлбалардың әр түрлі элементтерді қосу кезіндегі эквивалентті беріліс функцияларын табу әдістерін оқып меңгеру.

9.1 Құрылымдық сұлбалар және элементтерді қосу

Басқару жүйелерінің математикалық моделінің сызбалық суреті АБТ-да құрылымдық сұлба деп аталады. Құрылымдық сұлбалардың элементтеріне

буындар, түйіндер, сумматор және салыстырмалы элементтер жатады. Буындар ішіне буынның беріліс функциясы жазылатын кіріс және шығыс шамалардың көрсетулерімен тікбұрышты түрінде суреттеледі. Байланыс сызығындағы тармақталу болатын нүктелер түйін деп аталады. Құрылымдық сұлба элементтері 18- суретте көрсетілген.



18 сурет – Құрылымдық сұлбалардың элементтері

Сұлба қаншалықты күрделі болса да, онда үш типті байланыстар орын алады:

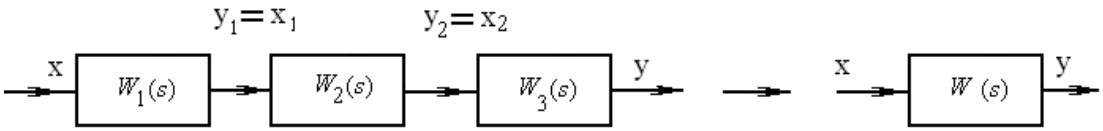
- тізбектей;
- параллель;
- кері байланысты тізбектей.

Буындардың тізбектей қосылуы. Буындардың тізбектей қосылған тізбегін эквивалентті түрлендіру арқылы бір буынға ауыстыруға болады. Буынның беріліс функциясы $W(s)$ жеке буындардың беріліс функцияларын көбейтуге тең (19 сурет).

$$W(s)=\prod_{i=1}^{n}W_i(s), \tag{9.1}$$

бұл кезде комплексті коэффициенттерінің модулі көбейтіледі, ал аргументтер жинақталады.

Тізбектей қосылу кезінде әр алдыңғы буынның шығыс шамасы келесі буынның кіріс шамасының әсері болып табылады:



19 сурет – Буындардың тізбектей қосылуы

$$W_1(s)=\frac{y_1}{x};\quad W_2(s)=\frac{y_2}{x_1};\quad W_3(s)=\frac{y}{x_2}. \tag{9.2}$$

Бұл өрнектерден

$$y_1=W_1(s)\cdot x;\quad y_2=W_2(s)\cdot x_1;\quad y=W_3(s)\cdot x_2. \tag{9.3}$$

$y_1=x_1,\quad y_2=x_2$ ескерсек,

$$y=W_3(s)\cdot W_2(s)\cdot W_1(s)\cdot x.$$

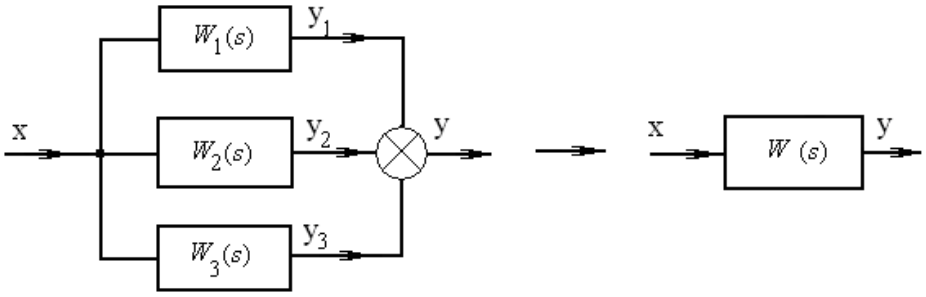
Барлық қосылудың беріліс функциясы

$$W(s) = \frac{y}{x} = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s). \qquad (9.4)$$

Буындардың параллель қосылуы. Параллель қосылу кезінде барлық буындар кірісіне бір сигнал беріледі, ал шығыс шамалар қосылады. Параллель қосылған буындардың тізбегін буындарға кіретін беріліс функциялардың қосындысына тең болатын беріліс функциялы $W(s)$ бір буынмен алмастыруға болады (20-суретті қараңыз):

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s).$$

Сәйкесінше өтпелі процесс $h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t)$, зілдеме функциясы $w(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t)$



20 сурет - Буындардың параллель қосылуы

Әр буындар үшін операторлы түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} &y_1(s) = x(s) \cdot W_1(s); \quad y_2(s) = x(s) \cdot W_2(s); \\ &y_3(s) = x(s) \cdot W_3(s); \ldots y_n(s) = x(s) \cdot W_n(s) \end{aligned} \qquad (9.5)$$

Онда барлық жүйенің шығысы

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) + ... = x(s)[W_1(s) + W_2(s) + ...W_n(s)] = x(s)\sum_{i=1}^{n} W_i(s). \qquad (9.6)$$

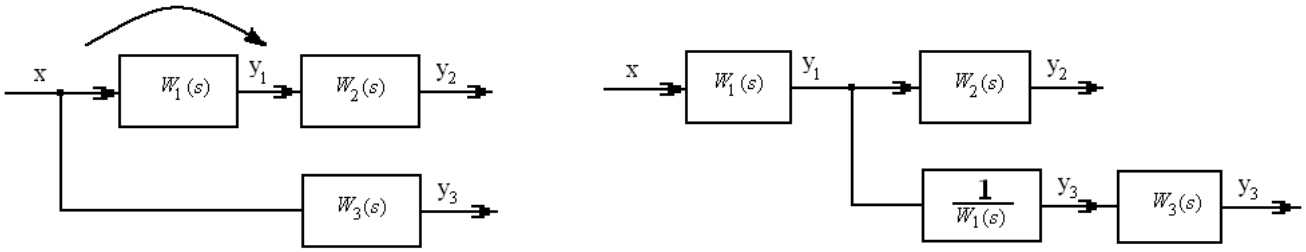
Осылайша параллель қосылған жүйелердің беріліс функциясы жеке буындардың беріліс функцияның қосындысына тең болады.

9.2 Құрылымдық сұлбаларды эквивалентті түрлендіру

Әр түрлі құрылымдық сұлбалы жүйелер бірдей беріліс функцияға ие болуы мүмкін, яғни динамикалық эквивалентті болуы мүмкін. Сондықтан жүйенің динамикалық сипаттамаларын сақтайтын құрылымдық сұлбаларды түрлендірудің жалпы ережесін білу кежет.

Құрылымдық сұлбаларды түрлендірудің дұрыстылық критерийі түрленетін аймақтың кіріс және шығыс сигналдары түрлендіруге дейін және түрлендіруден кейін де бірдей болуымен тұжырымдалады.

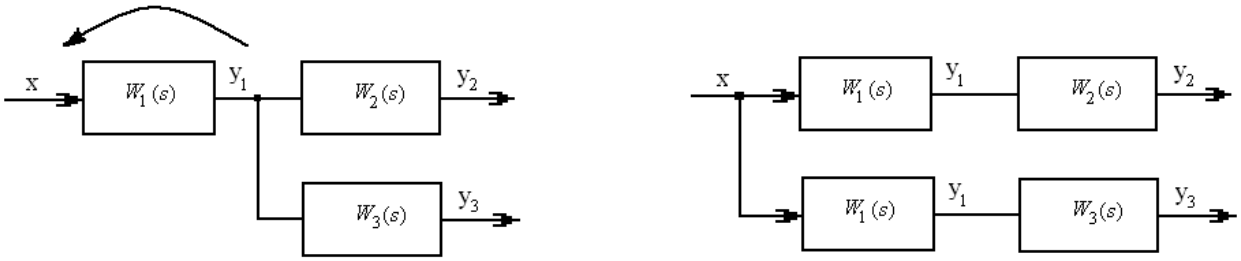
1. Түйінді ауыстыру (21 сурет).



21 сурет – Сигналдың таралу бағыты бойынша түйіндерді ауыстыру

Егер түйінді сигналдың таралу бағыты бойынша беріліс функциясы $W_1(s)$ буын арқылы ауыстырсақ, онда буынның жанында буын пайда болады. $\frac{1}{W_1(s)}$ беріліс функциясына тең.

Сигналдың таралу бағытына қарсы буын арқылы түйіндерді ауыстырса, онда түйін ауысатын жерден буынның беріліс функциясына тең болатын буын қосылады (23 сурет). Беріліс функциясы $W_1(s)$ тең.

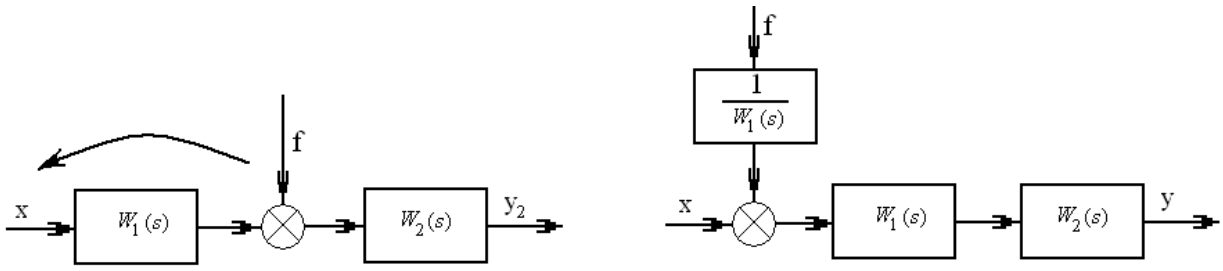


22 сурет – Сигналдың таралу бағытына қарсы түйінді ауыстыру

2. Түйін арқылы түйінді ауыстыру қосымша түрлендірулерсіз-ақ жүзеге асырылады.

3. Сумматорды ауыстыру. Егер сумматорды сигналдың беріліс бағытына қарсы беріліс функциясы $W_1(s)$ буын арқылы ауыстырсақ, сумматор мен сыртқы әсердің ортасына қосымша буын қосылады. Беріліс функциясы $\frac{1}{W_1(s)}$ тең болады (23 сурет).

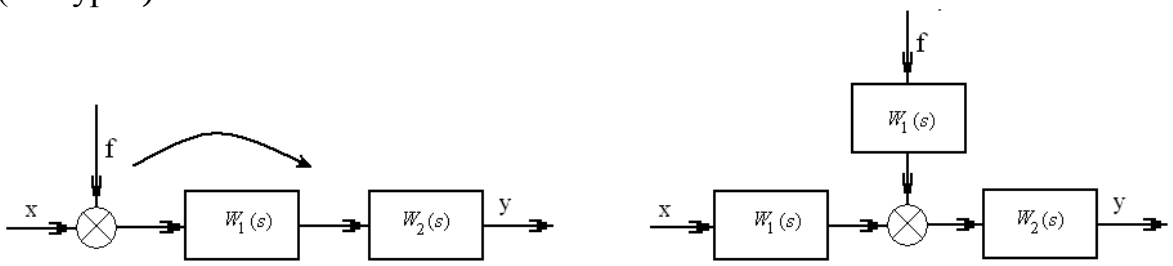
беріліс функциясы $W_1(s)$ буынның кірісіндегі сыртқы әсерді f шығысына ауыстыруға болады, буынның кірісі мен әсер арасына беріліс функциясы $W_1(s)$ қосымша буынды қосуға болады.



23 сурет – Сигнал бағытына қарсы сумматорды ауыстыру

$W_1(s)$ беріліс функциялы буынның кірісіне кіретін сыртқы әсерді f буынның шығысы мен кірісі арасына дәл сондай беріліс функциялы қосымша буынды орналастыра отырып, оның шығысына ауыстыруға болады.

Сигналдың таралу бағыты бойынша $W_1(s)$ беріліс функциялы буын арқылы сумматорды ауыстыру кезінде байланыс түзуінде сыртқы әсер мен сумматор арасына буынның беріліс функциялы қосымша буынды қосу керек (24 сурет).



24 сурет – Сигнал бағыты бойынша сумматорды ауыстыру

4. Сумматор арқылы сумматорды ауыстыру қосымша түрлендірулерсіз-ақ жүзеге асырылады. Сигнал бойынша сумматор және түйінді ауыстыруға түрлендірілген бөліктің жанында қосымша буын пайда болады – суммалаушы немесе салыстырушы.

10 Дәріс № 10. Тұйықталған және тұйықталмаған автоматты басқару жүйесінің теңдеуі

Дәрістің мазмұны:

- қарсы-параллель қосылу;
- тұйықталған басқару жүйелерінің беріліс функциялары;
- тұйықталған жүйелерді эквивалентті түрлендіру;
- тұйықталған жүйелердің эквивалентті беріліс функцияларын табу жолдары.

Дәрістің мақсаты:

- элементтердің қарсы-параллель қосылуын оқып білу;
- тұйықталған жүйелердің эквивалентті беріліс функцияларын табу әдісін меңгеру және оқып білу.

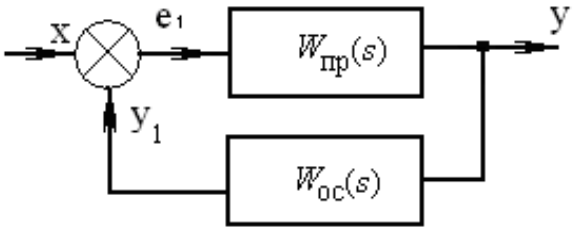
10. 1 Қарсы-параллель қосылу

Кері байланыс деп сигналдың шығыстан кіріске берілуін айтады. Мұндағы кері байланыс сигналы алгебралық түрде сыртқы сигналмен қосылады.

Егер буынның шығыс сигналы қандай да бір басқа буын арқылы кірісіне берілсе, онда буынды кері байланысты деп санайды. Егер кері байланыс сигналы y_1 кіріс әсерден x алынатын болса, яғни $e_1 = x - y_1$ кезінде, онда кері байланысты теріс деп атайды. Егер кері байланыс сигналы y_1 кіріс әсермен қосылса, яғни $e_1 = x + y_1$ кезінде, онда кері байланыс оң болады.

Оң кері байланысты қосылудың беріліс функциясының түрі:

$$W_c = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_{ПР}\ (s)}{1 - W_{ПР}(s) \cdot W_{ОС}(s)}. \qquad (10.1)$$



25 сурет – Екі буынның қарсы-параллель қосылуы

Теріс кері байланысты кезінде беріліс функцияның түрі:

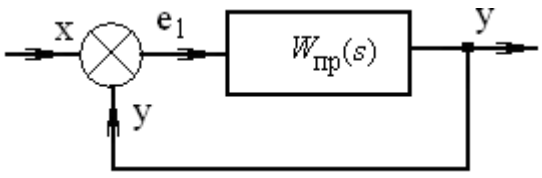
$$W_c = \frac{y(s)}{y_0(s)} = \frac{W_{ПР}\ (s)}{1 + W_{ПР}(s) \cdot W_{ОС}(s)}. \qquad (10.2)$$

Алымы тура тізбектің беріліс функциясына, бөлімі тұйықталмаған тізбектің беріліс функциясын қосу бірге тең.

Іс жүзінде көбінесе теріс кері байланысты жүйелер кең таралған, мысалы, автоматты реттеудің барлық бірконтурлы жүйелері, тіпті тура (түзу) тізбекті аймақ, ал керісіне – реттеуіш орналасқан.

Егер жүйенің кері байланысында буын болмаған жағдайда шығыс сигналын кірісіне тура кері байланыс сигналы ретінде берсек, онда бұл жағдайда беріліс функция (26 сурет):

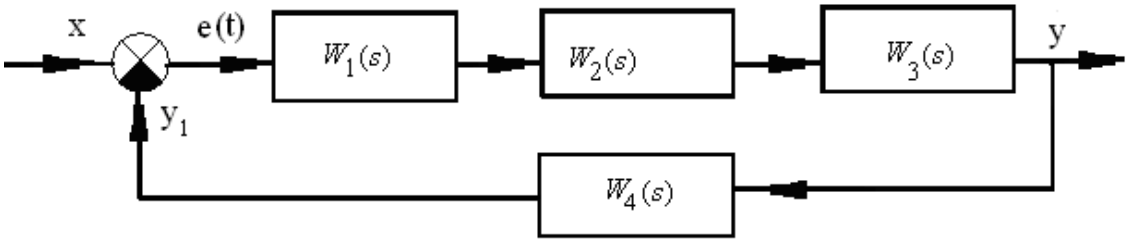
$$W(s) = \frac{W_{ПР}(s)}{1 + W_{ПР}(s)},\ W_{ОС}(s) = 1,\ \text{сондай-ақ}\ y_{ОС} = y.$$



26 сурет – Қатаң кері байланысты жүйе

10.2 Тұйықталған жүйелердің беріліс функциясы

Тұйықталған жүйе деп бірконтурлы жүйені айтады, егер қандай да бір нүктеде оны ажыратса, онда тек тізбектей қосылған буындардан немесе тізбектерден тұрады. Параллель және кері байланыстар болмайды.



27 сурет – Тұйықталған автоматты жүйе

Құрылымдық сұлбалардың эквивалентті түрлендіру ережесін қолданып тұйықталған жүйенің беріліс функциясын анықтауға мүмкіндік бар. Берілген кіріс әсер $x(t)$ мен шығыс шамаға $y(t)$ кезінде тұйықталған жүйенің беріліс функциясы тең: егер теріс кері байланыс болса, тұйықталмаған тізбектің беріліс функциясы бөлінген $[1+W(s)]$, егер оң кері байланыс болса бөлінген $[1-W(s)]$:

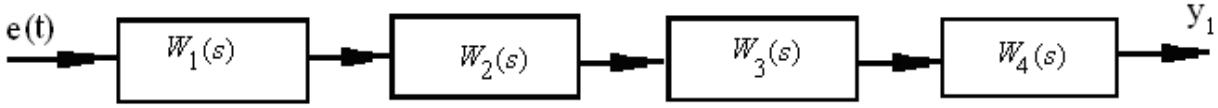
$$W(s)=\frac{W_{ПР}(s)}{1\pm W(s)}=\frac{W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)}{1\pm W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)\cdot W_4(s)}, \qquad (10.3)$$

мұндағы

$W(s)=W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)\cdot W_4(s)$ - тұйықталмаған тізбектің беріліс функциясы.

«+» белгісі теріс кері байланысқа, ал «–» белгісі оң кері байланысқа сәйкес келеді.

Тұйықталмаған тізбек:



28 сурет – Тұйықталмаған жүйе

Тұйықталған жүйенің шығыс шамасының $y(t)$ берілген әсерден $x(t)$ тәуелділігін анықтайтын беріліс функциясы берілген әсер каналы бойынша беріліс функциясы болып табылады немесе жүйенің негізгі беріліс функциясы деп аталады.

Контурдың беріліс функциясы жүйенің сипаттамалық полиномын анықтау үшін жеткілікті, $1+W(p)$ сияқты анықталуы мүмкін. Сондықтан бұл жүйенің полюстерін анықтау үшін жеткілікті. Тұйықталған жүйенің сипаттамалық полиномы тұйықталмаған жүйенің беріліс функциясының алымы мен бөлімінің қосындысымен анықталады.

11 Дәріс № 11. Орнықтылықтың алгебралық критерийлері. Гурвиц критерийі

Дәрістің мазмұны:

- орнықтылықтың түсініктері;
- орнықтылықтың алгебралық критерийлері, Гурвиц критерийі.

Дәрістің мақсаты:

- орнықтылықтың алгебралық критерийлерін оқып білу;
- жүйе орнықтылығына сипаттамалық теңдеу түбірлерінің әсер етуін оқып үйрену.

11.1 Орнықтылықтың жалпы түсініктері

Кел келген автоматты реттеу жүйелердің маңызды қасиеттерінің бірі оның орнықтылығы болып табылады. Автоматты реттеу жүйесі жұмысқа қабілеттілігін сақтау үшін жүйе орнықты болуы қажет. Сондықтан орнықтылықты талдау басқару теориясының негізгі тапсырмаларының бірі болып табылады.

Егер автоматты реттеу жүйесі сыртқы күштер әсер еткеннен кейін озінің бастапқы (тең) күйіне қайтып келсе орнықты жүйе болады. Егер жүйеге сыртқы күштер әсер еткеннен соң, өзінің күйіне қайта келмесе, онда жүйе орнықсыз болады.

Кез келген автоматты реттеу жүйесі орнықты болу керек. Бұл барлық реттеу жүйелеріне негізгі талап болады.

Жүйелерді үш типке бөледі:

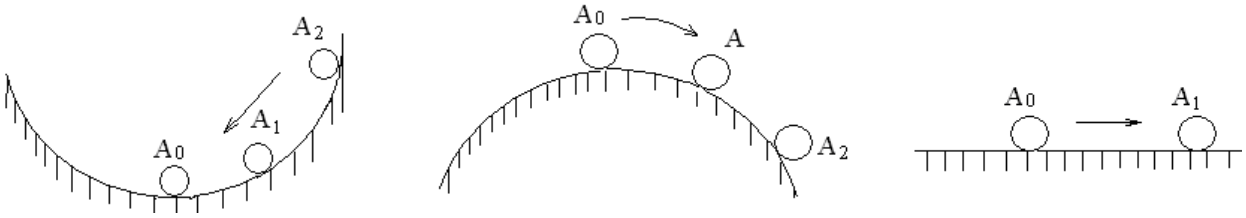
а) орнықты жүйелер – сыртқы әсерлерді алып тастаған соң өзінің бастапқы күйіне қайта келетін жүйе;

б) нейтралды жүйелер (бейтарап) – сыртқы әсерлерді алып тастаған соң өзінің бастапқы күйінен басқа тепе-теңдік жағдайына оралады;

в) орнықсыз жүйелер – сыртқы әсерлерді алып тастаған соң өзінің бастапқы күйінен келмейтін жүйе.

Тепе-теңдік орнықтылығын байқау үшін тереңдікте жатқан шарды алуға болады. Орнықты күйінен шарды ауытқыту кезінде ол тура сол орнына (үйкеліс күші болмағанда) немесе орнықтылықтың кейбір соңғы аймағына (үйкеліс күші болғанда) келуге ұмтылады. Осындай шардың күйі орнықты (29 сурет) болады. A_0 - нүктесіне сәйкес келетін тепе-теңдіктің ауытқымайтын жағдайында және A_2 - нүктесіне сәйкес келетін тепе-теңдіктен ауытқитын

жағдайдағы түсінікті енгізейік. Сыртқы күш әсер ету тоқтаған соң шар A_0 немесе A_1 нүктелеріне келеді. Орнықтылық шарты: егер тепе-теңдіктің қарсы әсер күйінен тепе-теңдіктің қарсы әсерсіз күй қамтыған кейбір аймақтарына өтсе, орнықты болады.



29 сурет – Күйенің орнықтылығын анықтау

Жалпы жағдайда, сызықты емес жүйені қарастыра отыра, орнықтылықтың «аз», «көп», «толық» ұғымдары енеді.

Жүйе «аз» орнықты болады, егер орнықтылық аймақтың болуынан ғана құрылса, бірақ қандай да бір оның шегін анықтамайды.

Жүйе «көп» орнықты, егер орнықтылық аймағының шегі анықталса, яғни бастапқы ауытқу аймағы анықталады. Сондай-ақ жүйе бастапқы күйіне келеді және нақты бастапқы ауытқулар осы аймаққа сәйкес келетіні анықталады.

Жүйе «толық» орнықты, егер жүйе кез келген бастапқы ауытқулар кезінде қайта басқапқы күйіне келсе.

11.2 Орнықтылықтың алгебралық критерийлері

Орнықтылық шарттарын алу үшін дифференциал теңдеулерді пайдалану қолайлы.

Автоматты басқарудың сызықты жүйесі жалпы жағдайда тұрақты коэффициентті сызықты дифференциал теңдеулермен анықталады:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y(t) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m\right) x(t), \qquad (11.1)$$

мұндағы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – тұрақты коэффициенттер.

Теңдеуді шешуде еркін және қалыптасқан құраушылардың қосындысы түрінде қарастыруға болады.

$$y(t) = y_к(t) + y_e(t), \qquad (11.2)$$

мұндағы $y_к(t)$ – өтпелі процестің қалыптасқан құраушысы, орнықтылыққа әсер етпейді, сыртқы әсер түрінен тәуелді және біртекті емес дифференциалды теңдеудің дербес шешімімен анықталады. $y_e(t)$ - еркін құраушы, теңдеудің оң жағынсыз табылған, біртекті дифференциалды теңдеудің жалпы шешімі:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right) y_e(t) = 0 \ .$$

Орнықтылық көзқарасы бойынша тек еркін құраушы қызықты болып отыр.

Орнықтылықтың математикалық анықтамасы келесі түрде қалыптасады, жүйе орнықты болады, егер уақыт ағысы бойынша өтпелі процестің еркін құраушылары нөлге ұмтылса, яғни $t \to \infty$ кезінде $y_e(t) \to 0$ болады. Ал шығыс функция сыртқы әсермен анықталатын қалыптасқан құраушыға ұмтылады.

Егер еркін құраушы шексіз өсетін болса, яғни $t \to \infty$ кезінде $y_e(t) \to \infty$ болғанда жүйе орнықсыз.

Еркін құраушылардың сипатының өзгерісі сипаттамалық теңдеудің $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0$ түбірлерінің түрінен тәуелді.

1. Сипаттамалық теңдеу нақты теріс түбірлерге p_i ие болса, онда еркін құраушыларды былай жазуға болады:

$$y_{ep}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + ... + C_n e^{p_n t}, \qquad (11.3)$$

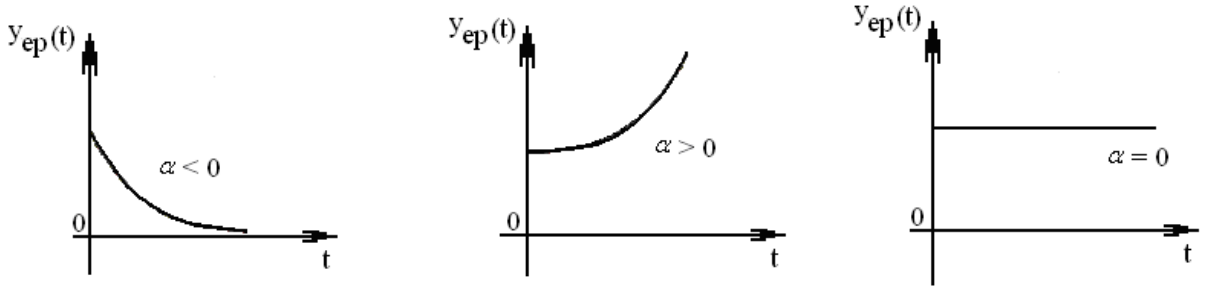
мұндағы C_i - бастапқы шарттардан тәуелді, интегралдау тұрақтылары;

p_i – сипаттамалық теңдеудің түбірлері.

1) егер барлық түбірлері теріс болса, онда әр құраушы $t \to \infty$ кезінде $C_i e^{p_i t} \to 0$ болады, яғни $t \to \infty$ кезінде $y_e(t) \to 0$ болады. Бұл жағдайда жүйе орнықты (30, а сурет);

2) егер ең болмаса бір түбірі p_i - оң болса, онда жүйе орнықсыз (30, б сурет);

3) сипаттамалық теңдеу бір нөлдік түбірге, ал қалғандары нақты және теріс түбірлерге ие болады. Жүйе орнықтылық шегінде болады (30, в сурет).



а б в

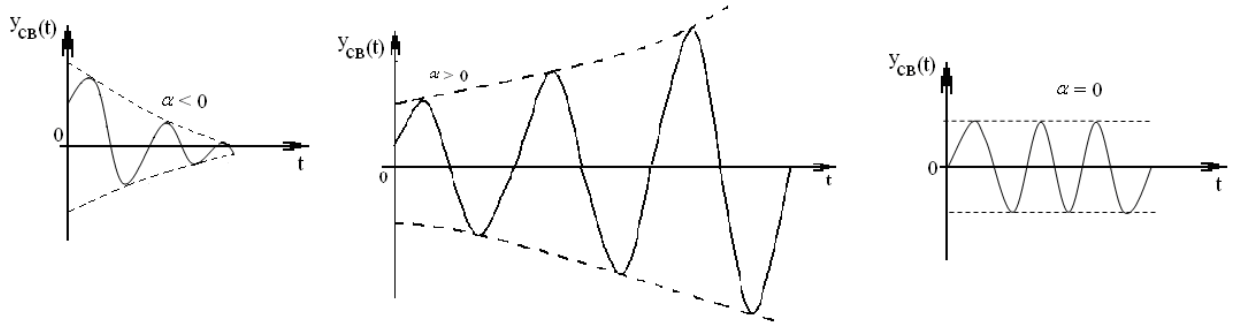
30 сурет – Нақты түбір кезіндегі сипаттамалық теңдеудің еркін құраушылар түрі

2. Сипаттамалық теңдеу екі түйіндес комплексті түбірлерге ие болады: $p_к = \alpha + j\beta$; $p_{к+1} = \alpha - j\beta$, онда еркін құраушының түрі келесідей: $y_e(t) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$. Егер комплексті-түйіндес түбірдің нақты бөлігі теріс таңбалы болса, онда еркін құраушылар $t \to \infty$ кезінде $Ae^{-\alpha t} \to 0$

амплитудалы өшетін тербелістерге ие болады. Бұл орнықты жүйе болып табылады (31, а сурет).

Егер $\alpha_k > 0$ болса, онда амплитудасы өсетін тербеліс орын алады (31, б сурет).

Егер $\alpha_k = 0$ болса, онда өшпейтін тербеліс орын алады (31, в сурет). Жүйе орнықтылық шегінде.

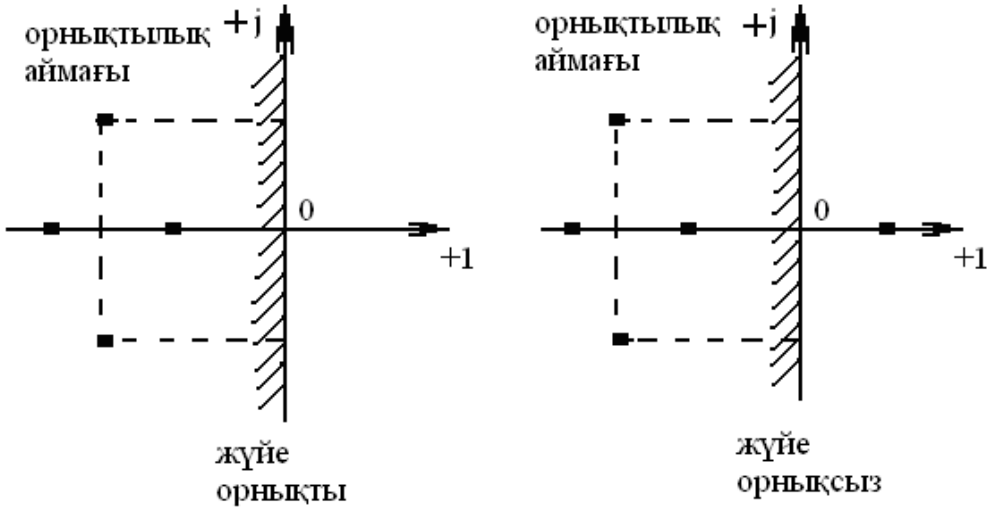


а б в

31 сурет – Сипаттамалық теңдеудің комплексті-түйіндес кезіндегі еркін құраушылардың түрі

Еркін құраушылардың өшуі және өшпеуі сипаттамалық теңдеулердің түбірлерінен тәуелді: нақты түбірлерінің таңбаларынан және комплексті түбірлерінің нақты бөлігі таңбаларынан.

Жүйе асимптотикалы орнықты болу үшін сипаттамалық теңдеулердің барлық түбірлері теріс нақты бөлікке ие болса жеткілікті әрі қажет, яғни сол жақта жартылай жазықтықта жатады (32 сурет). Әдетте, теріс нақты бөлікті түбірлерді сол жақты деп атайды, себебі олар комплексті жазықтықта жорамал өстен солға қарай, ал оң нақты бөлікті түбірлер – оңға қарай орналасқан.



32 сурет – Комплексті жазықтықта сипаттамалық теңдеулер түбірлерінің орналасуы

Егер бір түбір оң нақты бөлікке ие болса, онда жүйе орнықсыз.

Бұл қорытынды тек сызықты жүйелер үшін дұрыс. Бірақ шындығында, көптеген жүйелер сызықты емес, сондықтан нақты жүйелер үшін сызықталған теңдеулер бойынша жасалған жүйенің орнықтылық жайлы қорытындысы қаншалықты дұрыс болар екен.

Бұл сұраққа А.М.Ляпунов теоремасы жауап бере алады.

Теорема 1. Егер сызықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің барлық түбірлері теріс нақты бөлікке ие болса, онда бұл жүйе орнықты. Сондай-ақ жүйенің екінші және жоғары ретті мүшелерін сызықтау кезінде де жүйенің орнықтылығын өзгерте алмайды.

Теорема 2. Егер сызықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің ең болмаса бір түбірі оң нақты бөлікке ие болса, онда бұл жүйе орнықсыз. Сондай-ақ жүйенің екінші және жоғары ретті мүшелерін сызықтау кезінде де жүйеге орнықтылық бере алмайды.

Бірінші және екінші дәрежедегі сипаттамалық теңдеулердің түбірлерін есептеу жеңіл. Үшінші және жоғары дәрежелі түбірлер үшін жалпы өрнек өте үлкен және практикада жарамды бола бермейді. Сондықтан басты мән жүйе түбірлерді есептеусіз орнықтылығын анықтауға мүмкіндік беретін критерий қажет. Бұл дәрежелер орнықтылықтың критерийлері деп аталады.

Олар алгебралық және жиіліктік болып бөлінеді. Алгебралық критерийге Раус, Гурвиц, Льенар-Шипар критерийлері кіреді. Жиіліктік критерийлерге Михайлов, Найквист критерийлері жатады

11.3 Гурвиц критерийі

Сызықты жүйенің орнықтылығын зерттеу үшін оның сипаттамалық полиномының түбірін табу жеткілікті. Егер барлық түбірлері теріс нақты бөлікке (өстен солға қарай, жартылай жазықтықтың сол жағында жатады) ие болса, онда полином орнықты болады. Бұл сызықты жүйе орнықтылығына сәйкес келеді. Полиномдар ең болмағанда бір оң нақты бөлікке (оң жартылай жазықтықта) ие болса, орнықсыз деп аталады.

АБТ ерте даму кезеңінде полином орнықтылығын оның түбірін есептеусіз анықтау маңызды тапсырма болды. Сондықтан жүйе орнықтылығын оның түбірлерін есептеусіз-ақ анықтауға мүмкіндік беретін маңызды ережеге келеді. Бұл ережелер орнықтылық критерийі деп аталады. Орнықтылық критерийі көмегімен жүйе орнықты ма немесе жоқ па, орнықтылыққа қалай әсер етеді және басқа да параметрлер мен жүйедегі құрылымдық өзгерістерді түсіндіреді. Орнықтылық критерийі алгебралық және жиіліктік болып бөлінеді.

Орнықтылықтың алгебралық критерийі жүйенің орнықтылығы жайлы сипаттамалық теңдеудің коэффициенті бойынша талдауға мүмкіндік береді

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_0 = 0 .$$

Орнықтылық үшін бәрінен бұрын барлық коэффициенттер a_i оң болу керек. Бұл орнықтылық полиномының қажетті шарты: $a_0 > 0, a_1 > 0, ...a_n > 0$.

Бірінші және екінші ретті жүйелер үшін орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарты оң коэффициенттер кезінде сипаттамалық теңдеудің түбірлері сол жақта болуы, яғни олар комплексті жазықтықтың сол жартылай жазықтығында орналасқан.

Алайда $n > 2$ кезінде полином комплексті - түйіндес түбірлерге ие болса, бұл шарт жеткіліксіз болады. Үшінші және жоғары ретті жүйелер үшін сипаттамалық теңдеулердің коэффициенттерінің оң болуы орнықтылықтың қажетті, бірақ жеткіліксіз шарты болып табылады. Бұл жағдайда сипаттамалық теңдеудің нақты түбірлері сол жағында, ал комплексті түбірлері оң болуы мүмкін, яғни комплексті жазықтықтың оң жартылай жазықтығында жатады.

Гурвиц критерийі сипаттамалық теңдеудің коэффициенттері бойынша оның түбірлерін есептеусіз-ақ жүйенің орнықтылығы жайлы тұжырым жасауға мүмкіндік береді.

Гурвиц критерийі полином коэффициенттерінен құралған $n \times n$ өлшемді матрицаны қолданады.

Гурвиц матрицасы келесі түрде тұрғызылады: индекстердің a_1-дан a_n-дейін өсу ретімен сипаттамалық теңдеулердің барлық коэффициенттері анықтауыштың басты диагоналы бойынша солдан оңға жазылады. Басты диагоналдан жоғары бағаналар тізбектей өсетін индекстермен сипаттамалық теңдеудің коэффициенттерімен, ал төменгі бағаналар – тізбектей өшетін (төмендейтін) индекстермен толығады. N-нен (n – сипаттамалық теңдеудің дәрежесі) үлкен және нөлден кіші индексті коэффициенттер орнына нөл қойылады.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \underline{a_1} & a_3 & \underline{a_5} & a_7 & \ldots & 0 \\ \underline{a_0} & \underline{a_2} & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ \underline{0} & \underline{a_1} & \underline{a_3} & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \qquad (11.4)$$

Төменгі ретті Гурвиц анықтауышын алу үшін Гурвицтің басты анықтауыштарында диагоналдық минорларды көрсетеміз.

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0 \ldots; \qquad \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$$

Анықтауыш нөмірі Гурвиц матрицасының диагоналы бойынша коэффициенттер нөмірімен анықталады.

Гурвиц критерийі кез келген ретті жүйенің орнықтылық шартын анықтауға мүмкіндік береді: сызықты жүйенің сипаттамалық теңдеуінің түбірлері теріс нақты бөлікке ие болуы үшін, жүйе орнықты болу үшін сипаттамалық теңдеудің барлық коэффициенттері оң болғанда Гурвиц матрицасының барлық диагоналды минорлары оң болуы қажетті әрі жеткілікті.

Орнықтылықтың алгебралық критерийін қарастырайық. Гурвицтің орнықтылық критерийі сипаттамалық теңдеудің коэффициенттері бойынша сызықты жүйенің орнықтылығын анықтауға мүмкіндік береді.

Сипаттамалық теңдеудің барлық коэффициенттерінің оң болуы I және II ретті жүйелердің орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

Мысалы. 1. Бірінші ретті сипаттамалық теңдеу

$$a_0 p + a_1 = 0.$$

Орнықтылық шарты: екі коэффициенттері оң таңбалы $a_0 > 0,\ a_1 > 0,$ бір түбірі p теріс $p = -\frac{a_1}{a_2}$. Жүйе орнықты.

2. Екінші ретті сипаттамалық теңдеу: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0,$

Теңдеудің түбірі: $$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} = -\alpha \pm j\beta.$$

Орнықтылық шарты $a_0 > 0,\ a_1 > 0, a_2 > 0.$ Жүйе орнықты болу үшін коэффициенттері оң таңбалы болуы керек.

3. Үшінші ретті сипаттамалық теңдеу

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарты: $a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,$ $a_3 > 0.$

Гурвиц матрицасы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$$

4. Төртінші ретті сипаттамалық теңдеу:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарты: $a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,$ $a_3 > 0,\ a_4 > 0.$

Гурвиц матрицасы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_1^{\,2} a_4 > 0.$$

$a_n > 0$ кезінде $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, онда жүйенің орнықтылығын тексеру үшін Δ_1-ден Δ_{n-1} дейінгі Гурвиц анықтауышын табу жеткілікті.

$n \geq 5$ кезінде анықтауыштарды ашу өте күрделі болады. Сондықтан Гурвиц критерийін $n \leq 4$ болған кезде қолданылады. $n \geq 5$ кезінде Льенар-Шипар орнықтылық критерийін қолдануға болады, болмаса Гурвиц критерийін қолдану кезінде ЭЕМ пайдалана отыра сандық әдіске өту керек.

Сипаттамалық теңдеудің барлық коэффициенттері $a_0 > 0,\ a_1 > 0, \ldots\ a_n > 0$ оң болған жағдайда барлық тақ индексті анықтауыштары $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5 \ldots$ оң. Жұп анықтауыштар $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 \ldots$анықтауыштары оң болғанда жұп индекстері де оң таңбалы болады және керісінше.

Осылайша сызықты жүйе орнықты болу үшін келесі теңсіздік орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\left.\begin{matrix} a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, .. \end{matrix}\right\} \quad \text{немесе} \quad \left.\begin{matrix} a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, .. \end{matrix}\right\}. \qquad (11.5)$$

Соңғы түрлену Льенар-Шипардың орнықтылық критерийі деп аталады. Бұл Гурвиц критерийіне қарағанда анықтауыштың аз санын ашуды талап етеді.

12 Дәріс № 12. Жүйелердің орнықтылығының жиіліктік критерийлері. Орнықтылықтың Михайлов және Найквист критерийлері

Дәрістің мазмұны:

- Михайловтың жиіліктік критерийі;
- Михайлов годографын тұрғызу;
- Найквист критерийі.

Дәрістің мақсаты:

- Михайлов және Найквист жиіліктік критерийін оқып білу;
- Михайлов және Найквист критерийі бойынша орнықтылықты анықтау әдісін меңгеру және оқып үйрену.

12.1 Михайлов критерийі

Сызықты жүйенің сипаттамалық теңдеуі

$$N(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (12.1)$$

Егер $N(p)$ полиномда $p = j\omega$ орнына таза жорамал мәнді қойсақ, онда комплексті полином:

$$N(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + ... + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = |N(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$
$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - ... \\ Y(\omega) &= \omega\left(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - ...\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (12.2)$$

мұндағы

$X(\omega)$ - Михайловтың нақты функциясы;

$Y(\omega)$ - Михайловтың жорамал функциясы.

Егер ω бұрыш жиілігі өзгерсе, онда $N(j\omega)$ векторының бағыты және ұзындығы өзгеріп, ол өзінің ұшымен комплексті жазықтықта кейбір қисық сызықты (годографты) сызып көрсетеді. Бұл қисық сызық годограф немесе Михайлов қисық сызығы деп аталады.

Бұрышты жиілігі 0 ден басталып $+\infty$ шексіздікке өзгерсе, $N(j\omega)$ вектордың нәтижелік бұрылу бұрышы теңдеумен табылады:

$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta Arg\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}(n-2m). \qquad (12.3)$$

Орнықты сызықты жүйелерде $m = 0$ оң түбірлер саны нольге тең болуы тиіс. Онда

$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} n. \qquad (12.4)$$

Бұл шарт орнықтылықтың қажетті шарты болып табылады. Оның орындалуы сызықты жүйенің орнықтылығына жеткіліксіз. Жүйе орнықты болу үшін сипаттайтын теңдеудің барлық түбірлері n комплексті жазықтықта жорамал өсінің сол жағында жатуы тиіс, яғни олардың ішінде нөлге тең түбірлер болмауы тиіс.

Соңғы шартты былайша жазуға болады: кез келген ω жиілік жағдайында $N(j\omega) \neq 0$.

Сызықты жүйе орнықты болу үшін қажетті және жеткілікті шарт: бұрыштық жиілікті ω 0 басталып $+\infty$ дейін өзгерген жағдайда $N(j\omega)$ вектордың ұштық нүктесі нөлге тең болмай, сағаттың тіліне қарама-қарсы

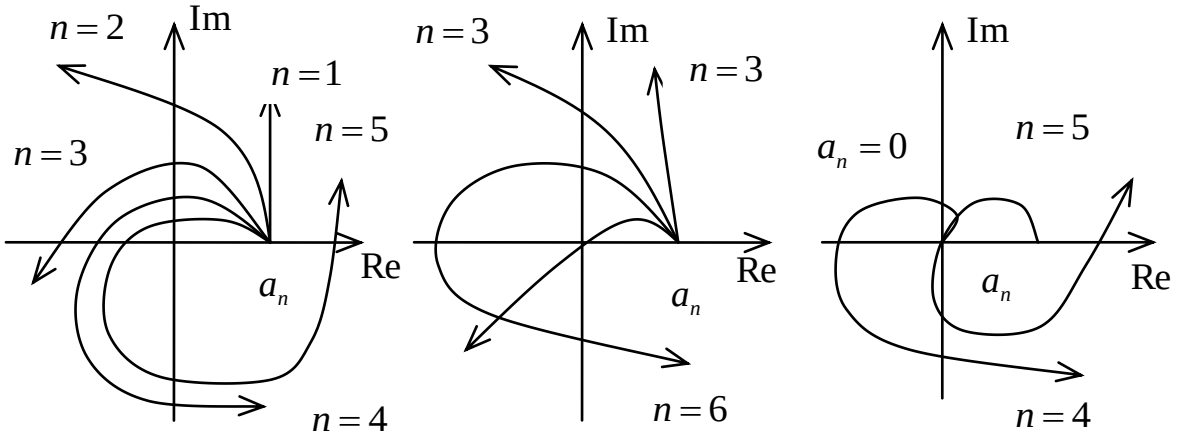
координат басын $n\frac{\pi}{2}$ бұрышына қамтуы тиіс, мұндағы n - сипаттамалық теңдеудің дәрежесі.

33 а – суретте біріншіден $(n=1)$ бесінші $(n=5)$ ретке дейінгі теңдеумен сипатталатын орнықты жүйелер үшін Михайлов годографтары көрсетілген. Барлық жағдайларда a_n коэффициентін салыстыруға қолайлы болу үшін мәнін бірдей қылып алынған. 33 б – суретте орнықсыз жүйелер үшін Михайловтың типтік қисығы көрсетілген. 33 в – суретте орнықтылық шегіндегі жүйелер үшін Михайловтың типтік қисығы көрсетілген.

Михайлов критерийінің артықшылықтары:

а) кез келген ретті жүйенің орнықтылығын анықтауға (талдауға) жарамды;

б) көрнекілігі, яғни годографтың түрі бойынша жүйенің орнықтылығын анықтаумен қоса орнықтылықты қамтамасыз ету жолдарын қарастыруға болады.



а б в

33 сурет – Михайлов годографының әр түрлі мысалдары

12.2 Орнықтылықтың Найквист критерийі

Бұл жиілікті орнықтылық критерийі 1932 жылы америка ғалымы Г.Найквист ашқан. Тұйықталмаған жүйенің АФС түрі бойынша тұйықталған жүйенің орнықтылығын анықтауға мүмкіндік береді.

Демек, тұйықталмаған жүйенің беріліс функциясы төмендегідей болсын

$$W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{c_0 p^n + cp^{n-1} + \ldots + c_n}, \quad m \le n. \tag{12.5}$$

Теңдеуге $p=j\omega$ қойып, тұйықталмаған жүйенің жиіліктік беріліс функциясын табамыз.

$$W(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{c_0(j\omega)^n+c_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+c_n}=$$

$$=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (12.6)$$

Енді ω бұрыш жиілігін $-\infty$ бастап $+\infty$ дейін өзгертейік, онда $W(j\omega)$ вектордың бағыты және ұзындығы өзгеріп, комплексті жазықтықта ұшы кейбір қисық сызықты сызып көрсетеді, ол тұйықталмаған жүйенің амплитуда фаза жиілік сипаттамасы (АФС) деп аталады (34 сурет).

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы:

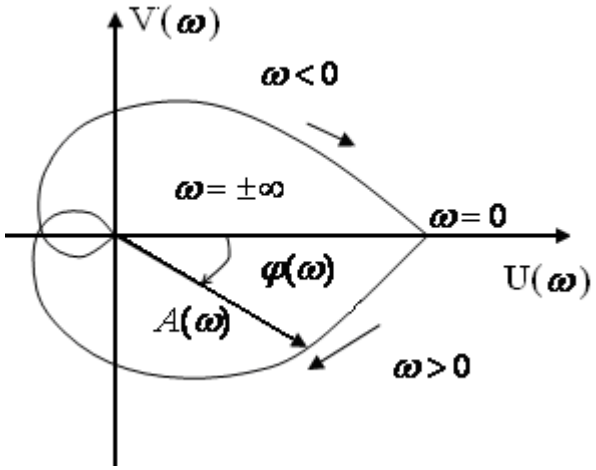
$$W_3(p)=\frac{W_{np}(p)}{1+W(p)}. \qquad (12.7)$$

Осыдан кейін көмекші функцияны қарастырамыз

$$W_1(p)=1+W(p)=\frac{R(p)+Q(p)}{Q(p)}=\frac{D(p)}{Q(p)}, \qquad (12.8)$$

мұндағы $D(p)=Q(p)+R(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ - тұйықталған жүйенің сипаттамалық полиномы;

$Q(p)=c_0p^n+c_1p^{n-1}+\ldots+c_n$ - тұйықталмаған жүйенің сипаттамалық полиномы.



34 сурет – Тұйықталмаған жүйенің годографы

(12.8) теңдеуге $p=j\omega$ қойып, табатынымыз

$$W_1(j\omega)=1+W(j\omega)=\frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \qquad (12.9)$$

Бұрыш жиілігін ω 0 бастап ∞ дейін өзгерту кезінде аргумент принципін қолданып $W_1(j\omega)$ векторының бұрылу бұрышын табуға болады

$$\Delta Arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta Arg D(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} - \Delta Arg Q(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}(n-2m) - \frac{\pi}{2}(n-2l) = \pi(l-m). \quad (12.10)$$

Тұйықталған жүйе орнықты болу үшін қажетті әрі жеткілікті шарт: сипаттамалық теңдеудің барлық түбірлері сол жағында жатуы тиіс, яғни $m=0$. Осыдан орнықты жүйенің $W_1(j\omega)$ векторы координат басын қамтиды және бұрылу бұрышы келесі мәнге тең болады

$$\Delta Arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l = 2\frac{\pi}{2}l \ , \quad (12.11)$$

мұндағы l - тұйықталмаған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің оң түбірлер саны.

Осыдан, егер тұйықталмаған жүйе орнықсыз және l оң түбірлерге ие болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болады, егер жиілікті 0 бастап ∞ дейін өзгерткен кезде $W_1(j\omega)$ көмекші функцияның АФС координат басын оң бағытпен бұрылып $\frac{l}{2}$ рет қамтиды.

$W_1(j\omega)$ вектордың координат басын қамтитын айналым саны вектордың $(-1, j0)$ нүктесін қамтитын айналым санына тең екенін оңай байқауға болады.

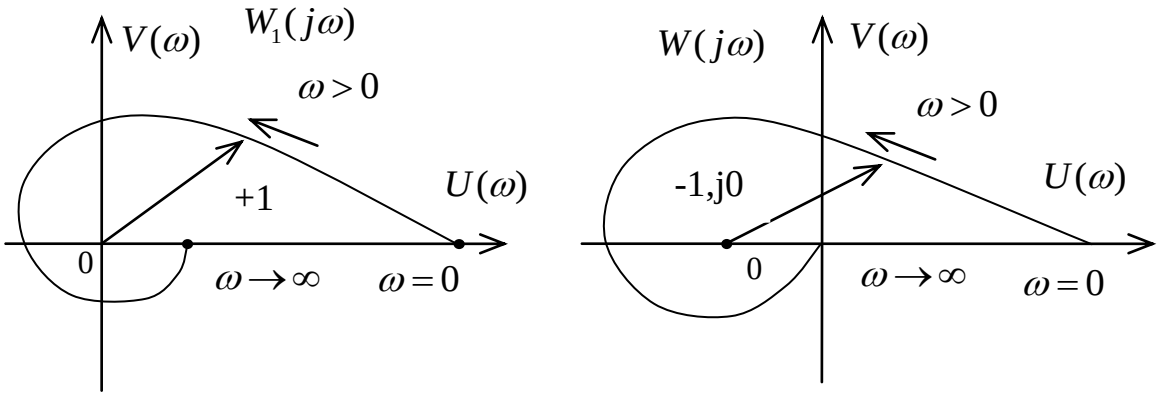
Айтылғанды негізге ала отыра, Найквисттың орнықтылық критерийін қалыптастыруға болады:

Егер тұйықталмаған жүйе орнықсыз болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болу үшін ω бұрыш жиілігі 0 - ден бастап ∞ дейін өзгерткен кезде тұйықталмаған жүйенің $W(j\omega)$ АФС $(-1, j0)$ нүктесін оң бағытта $\frac{l}{2}$ рет қамтуы тиіс. Мұндағы l - тұйықталмаған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің оң түбірлер саны.

Тұйықталған орнықты жүйеге сәйкес келетін АФС $W_1(j\omega)$ 35 а - суретте келтірілген, ал тұйықталмаған күйде орнықсыз болатын және оң түбірлер саны $l=2$ ие болатын $W(j\omega)$ АФС 35 б - суретте көрсетілген. Әдетте, шынайы кездесетін жүйелерде $W(j\omega)\big|_{\omega=\infty}=0$ тең, сондықтан $W_1(j\omega)\big|_{\omega=\infty}=1$ тең болады.

Егер жүйе тұйықталмаған күйде орнықты болса, онда оң түбірлер саны $l=0$ тең болады, ал вектордың $W_1(j\omega)$ аргументінің өсуі нөлге тең болады:

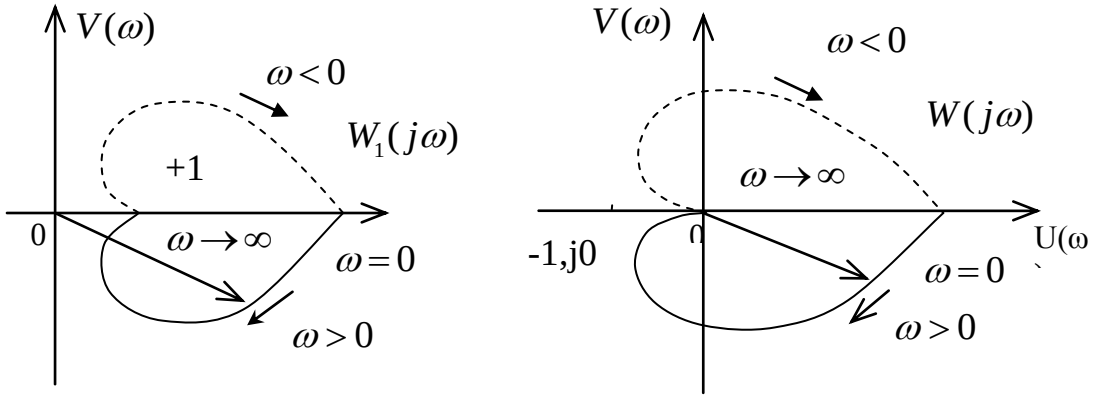
$$\Delta Arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l = 0.$$



а б

35 сурет – Тұйықталмаған және тұйықталған жүйелердің годографтары

Онда тұйықталған жүйелердің орнықтылығы үшін қажетті және жеткілікті шарты мынандай болады. Тұйықталған жүйе орнықты болған жағдайда $W_1(j\omega)$ векторының АФС координат басын қамтуы қажет емес (36 а сурет), ал $W(j\omega)$ АФС координат $(-1, j0)$ нүктесін қамтуы тиіс емес (36 б сурет).



а б

36 сурет – Тұйықталмаған және тұйықталған жүйелердің годографтары

Осыдан, іске асырылатын жүйелердің жиі кездесетін жағдайлары үшін Найквист критерийінің анықтамасын қалыптастырамыз: егер тұйықталмаған жүйе орнықты болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болады, егер тұйықталмаған жүйенің $W(j\omega)$ АФЖС $(-1, j0)$ нүктесін қамтымауы тиіс.

13 Дәріс № 13. Типтік режимдегі реттеу процесінің сапасы. Калыпты режимдегі реттеу сапасын бағалау

Дәрістің мақсаты:

- реттеу процестің сапасы;
- реттеу сапасын бағалау;
- сапаның негізгі көрсеткіштері.

Дәрістің мақсаты:

- реттеу сапаның негізгі көрсеткіштерін оқып білу.

13.1 Типтік режимдегі реттеу процесінің сапасы

Автоматты басқару жүйесі жарамды болу үшін орнықтылықтың қажетті, бірақ жеткіліксіз шарты орындалуы тиіс. Жеткілікті шарттар ретінде жүйенің қалыптасқан және өтпелі режимдерді сипаттайтын талаптар алынады. Былай айтқанда, жүйе реттеу процесінің берілген сапа көрсеткіштерін қанағаттандыруы тиіс.

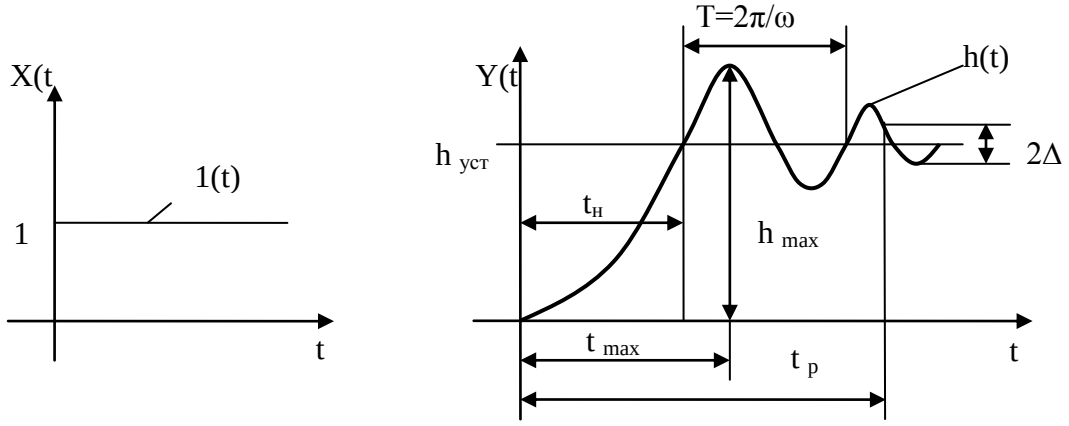
Қалыптасқан режимде реттеу сапасын сипаттайтын негізгі көрсеткіш болып жүйенің дәлдігі болып табылады. Жүйенің дәлдігі деп өтпелі процес аяқталған соң, реттелетін шаманың берілген шамаден ауытқуын айтады.

Өтпелі процесс кезіндегі реттеу сапасын сипаттайтын көрсеткіштерін қарастырамыз. Бұл көрсеткіштер жүйенің тесттік (бірлік сатылы, бірлік импульсті) сигналдар әсерлері реакциясы бойынша бағаланады.

Сатылы функция кеңінен қолданылады

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ кезінде } t \geq 0 \\ 0 \text{ кезінде } t < 0. \end{cases}$$

Нәтижесінде жүйенің шығысында өтпелі сипаттама табылады, типтік түрі 37- суретте көрсетілген. Осы сурет бойынша жүйенің реттеу сапасының негізгі тура бағалауын анықтаймыз.



37 сурет – Бірлік сатылы әсер кезіндегі тербелмелі өтпелі процесс

Реттеу сапасының негізгі көрсеткіштері:

1) Реттеу уақыты – $t_р$. Бұл өптелі процестің ұзақтылығы. Ол жүйеге әсер берілген уақыт мезетінен басталып жаңадан қалыптасқан шаманың реттелетін шаманың ауытқуының мәні $\Delta = (1 \div 5)\%$ берілген аралығында болған жағдайда аяқталады.

$$h(t) - h_{қал} < \Delta . \qquad (13.1)$$

2) Асыра реттеу σ - ол реттелетін шаманың орнықтыланған жағдайдан

максималды ауытқуын көрсетеді. Бұл көрсеткіш салыстырмалы өлшеммен немесе пайызбен бағаланады.

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{орн}}{h_{орн}} \times (100\%), \ \sigma=10\div30\%. \qquad (13.2)$$

3) Тербелістер жиілігі $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

4) Бірінші максимумды жету уақыты – $t_{\max}$.

5) Өтпелі процестің өсу аралығы – t_i .

6) Реттеу уақыт аралығында тербеліс саны – n (t_p уақыт аралығы) әдетте (1÷2), кейбір жағдайда (3÷4) тең болады. Ал, кейде n=0 болуы мүмкін.

Өтпелі процестің қисығы есептеу жолымен және тәжірибеде алынуы мүмкін. Өтпелі процестің қисығын табу күрделі болған жағдайда сапаны бағалаудың жанама әдісі, ал тура бағалау – АБЖ зерттеу сатысының соңында қолданылады.

Өтпелі процестің сызбасын тұрғызуды талап етпейтін сапаны бағалаудың жанама әдісі үш топқа бөлінеді: түбірлі, интегралды, жиіліктік әдістері.

Жоғарыдан байқағанымыздай, сипаттамалық теңдеулер түбір түрлері жүйенің өптелі процесс сипатын анықтайды, сондықтан өтпелі процестерді қарамай-ақ, сипаттамалық теңдеудің түбірлеріне белгілі бір шектеу қоя отыра, өтпелі процестің сапасы бойынша талаптарды қалыптастыруға болады.

Егер АБЖ келесі дифференциалдық теңдеу түрімен жазылса:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right) Y(p) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m\right) X(p). \qquad (13.3)$$

Теңдеудің шешімін былай жаза аламыз:

$$y(t) = y_к(t) + y_е(t), \qquad (13.4)$$

$y_к(t)$ – өтпелі процестің қалыптасқан құраушылары;

$y_е(t)$ – еркін құраушы;

$$y_е(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots + C_n e^{p_n t}, \qquad (13.5)$$

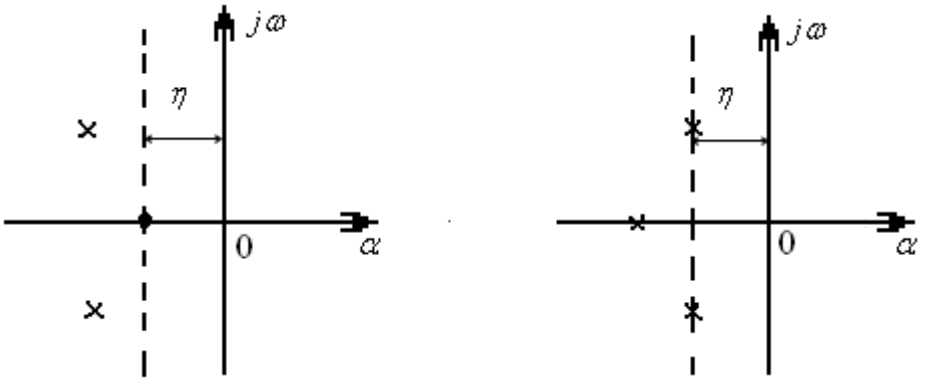
мұндағы $p_1, \cdots, p_n$ - сипаттамалық теңдеу түбірлері, олар төмендегі теңдеуден табылады

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (13.6)$$

Өптелі процестің жылдамдығын (жылдам әрекет) бағалау үшін η орнықтылық дәрежесі ұғымы пайдаланылады.

Орнықтылық дәрежесі жорамал өсіне жақын сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің нақты бөлігінің абсолютті мәнімен түсіндіріледі (38 сурет). 38 а

- суретте комплексті өске жақын орналасқан нақты түбір, ал 38 б - суретте комплексті түйіндес түбір көрсетілген.



а б

38 сурет – Сипаттамалық теңдеу түбірлерінің орналасуы

Неғұрлым η үлкен болса, соғұрлым АБЖ жылдамдығы жоғары болады.

Жорамал өске жақын орналасқан сипаттамалық теңдеу түбірлері өтпелі процесте баяу өшетін құраушыларды береді.

$$y_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t}. \qquad (13.7)$$

Байқағанымыздай, ŋ үлкен болған сайын сәйкесінше құраушы да тез өшеді. ŋ құраушысы өшкенде өтпелі процесті аяқталды деп есептесек болады.

Монотонды (қалыпты) процестер үшін (тербеліссіз) – түбірлер нақты болған кезде:

$$t_\delta \approx \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\Delta} \qquad \Delta = (0{,}01 \div 0{,}05). \qquad (13.8)$$

Тербелмелі процестер үшін жоғарыдан бағалау беріледі:

$$t_\delta \le \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\Delta}. \qquad (13.9)$$

Орнықтылық дәрежесін сипаттамалық теңдеудің түбірін есептемей-ақ табу басты мәселе болып табылады. Бұл үшін сипаттамалық теңдеуде λ=z-η ауыстырылады.

Аралас сипаттамалық теңдеуді аламыз:

$$a_0(z-\eta)^n + a_1(z-\eta)^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (13.10)$$

Геометрияда бұл η арақашықтықта жорамал өсті сол жаққа ауыстыруды білдіреді. Сондай-ақ, орнықтылық шегіне сәйкес келетін бір немесе екі түбір жорамал өске түседі.

Енді осы теңдеуге кез келген орнықтылық критерийінен η мәнін анықтауға болады.

АРЖ-да өтпелі процес тербелмелі болады, егер сипаттамалық теңдеу – $\alpha \pm j\omega$ түріндегі комплексті түбірлерге ие болса. Онда теңдеуді шешуде құраушысы мынадай болады: $Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$.

АРЖ-дің тербелістерге бейімділігі түбірдің ω (тербелістің бұрыштық жиілігі) жорамал бөлігінің α (өшу коэффициенті) нақты бөлігіне қатынасымен сипатталады, $\mu = \dfrac{\omega}{\alpha}$ – тербелмелік көрсеткіші.

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (13.11)$$

Тербелмелілік басқа да өшу коэффициенттерімен байланысты.

$$\xi = \frac{C_1 - C_2}{C_1}, \qquad (13.12)$$

мұндағы $C_1 = Ce^{-\alpha t_1}$,

$C_2 = Ce^{-\alpha t_2}$. $t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$, онда

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\omega}\right)} = C_1 e^{-\alpha\frac{2\pi}{\omega}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}},$$

$$\xi = 1 - \frac{C_2}{C_1} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Формулалар өшу көрсеткішімен тербелмелілік көрсеткіштерін байланыстырады.

АРЖ-де өшу көрсеткіші бір периодта $\xi = 90 \div 98\%$ немесе салыстырмалы бірлікте $0{,}9 \div 0{,}98$ болуы тиіс.

Формуладан алатынымыз:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{1-\xi}}. \qquad (13.13)$$

Мысалы: а) егер $\xi = 0.9,$ то $\mu = \dfrac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{1-0.9}} = \dfrac{2\pi}{\ln 10} \approx 2.7;$

б) егер $\xi = 0.98,$ то $\mu \approx 1.6$.

Бұл нақты жүйелер үшін $(1.6 \le \mu \le 2.7)$.

14 Дәріс № 14. Сызықты емес автоматты басқару жүйесінің негізгі теориялары

Дәрістің мазмұны:

- сызықты емес басқару жүйелерінің ерекшеліктері;
- қарапайым сызықты емес элементтер;
- фазалы жазықтықтарда сызықты емес жүйелерді зерттеу.

Дәрістің мақсаты:

- сызықты жүйелердің ерекшеліктерін оқып білу;
- сызықты емес жүйелерді талдау әдістерін меңгеру.

14.1 Сызықты емес жүйелердің ерекшеліктері

Автоматты басқарудың сызықты емес (бейсызық) жүйесі – ең болмаса бір буыны сызықты емес теңдеумен сипатталатын жүйе. Статикалық және динамикалық сызықты емес жүйелер болып бөлінеді. Бірінші сызықты емес алгебралық теңдеумен, екінші сызықты емес дифференциалдық теңдеумен сипатталады.

Сызықты емес жүйенің жалпы құрылымдық сұлбасын екі бөліктің қосылу түрінде қарастырамыз: сызықты бөлігі СБ – тұрақты коэффициентті қарапайым сызықты дифференциалдық теңдеулермен жазылатын жүйе және бейсызық (сызықты емес) бөлігі – сызықты емес элементтерден тұратын жүйе.

Сызықты емес элемент инерциясыз, оның кіріс шамалары және шығыс шамалары бір - бірімен алгебралық сызықты емес теңдеулермен байланысты. Сызықты емес элементтердің сипаттамасы әр түрлі болуы мүмкін. Сызықты емес элементтерді екі түрге бөледі: жеткілікті сызықты емес және жеткіліксіз сызықты емес. Сызықты емес жеткіліксіз болып есептеледі, егер оны сызықты элементпен алмастырғанда жүйенің принципиалды ерекшеліктері өзгермесе және сызықталған жүйелердің процестері нақты жүйелердің процестерінен айырмашылық болмаған жағдайда. Егер алмастыру мүмкін емес және сызықталған жүйелерде айырмашылық үлкен болса, онда жеткілікті сызықты емес болады.

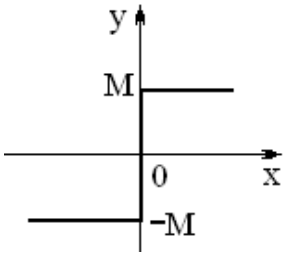
Жеткілікті сызықты емес жүйелердің басты ерекшелігі олар үшін суперпозиция принципі орындалмайды, ал өтпелі процестердің сипаттамасы сыртқы әсер шамасынан және бастапқы ауытқудан тәуелді болады.

Қарапайым сызықты емес элементтер болып статикалық сызықты емес элементтер табылады. Оларда шығыс шамасы тек кіріс шамасынан тәуелді, яғни бұл тәуелділік бір мағыналы.

1. Идеалды релелік сипаттама (екі позициялы).

Математикалық түрде:

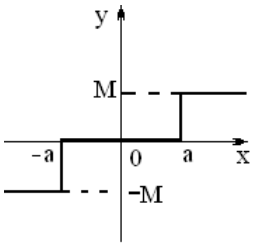
$$y = \begin{cases} -M, & кезінде \quad x < 0; \\ M, & кезінде \quad x > 0. \end{cases} \qquad (14.1)$$



39 сурет – Екі позициялы идеалды релелік сипаттама

2. Сезімсіздік аймағы бар үшпозициялы релелік сипаттама. Математикалық түрде:

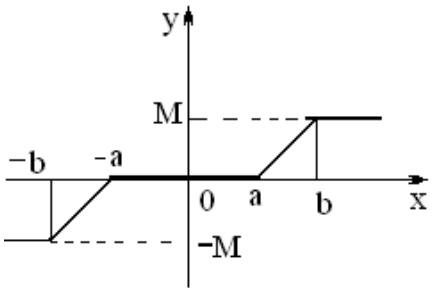
$$y = \begin{cases} -M, & кезінде \quad x < -a; \\ 0, & кезінде \quad -a \le y \le a; ң \\ M, & кезінде \quad x > a. \end{cases} \qquad (14.2)$$



40 сурет – Сезімсіздік аймағы бар үшпозициялы релелік сипаттама

3. Сезімсіздік аймағы бар және қанығу релелік сипаттама. Математикалық түрде:

$$y = \begin{cases} -M, & кезінде \quad y < -b; \\ k(y+a), & кезінде -b < y < -a; \\ 0, & кезінде -a < y < a; \\ k(y-a), & кезінде a < y < b; ң \\ M, & кезінде \quad y > b. \end{cases} \qquad (14.3)$$

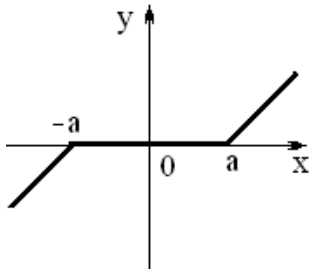


41 сурет – Сезімсіздік аймағы бар және қанығу релелік сипаттама

4. Сезімсіздік аймағы бар және қанығусыз релелік сипаттама.

Математикалық түрде:

$$y = \begin{cases} k(y-a), & кезінде \quad y \geq a; \\ 0, & кезінде \quad -a \leq y \leq a; ң \\ k(y+a), & кезінде \quad y \leq -a. \end{cases} \qquad (14.4)$$

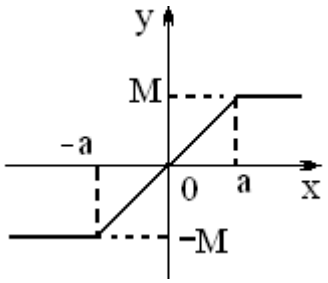


42 сурет – Сезімсіздік аймағы бар және қанығусыз релелік сипаттама

5. Қанығу релелік сипаттама

Математикалық түрде:

$$y = \begin{cases} -M, & кезінде \quad y \leq -a; \\ \dfrac{M}{a}x, & кезінде \quad -a \leq y \leq a; ң \\ M, & кезінде \quad y \geq a. \end{cases} \qquad (14.5)$$



43 сурет – Қанығу релелік сипаттама

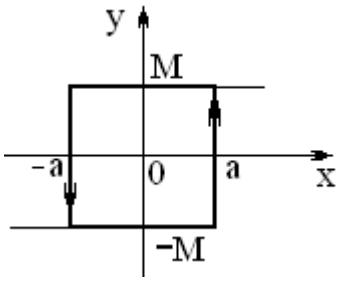
Динамикалық сызықты емес жүйелерде шығыс шамасы кіріс шамасынан тәуелді және оның туындысынан. Динамикалық сызықты емес жүйелердің сипаттамалары бір мағыналы емес. Суретте бір мағыналы емес типтік сызықты емес сипаттамалар келтірілген.

1. Гистерезисті релелік сипаттама.

Математикалық түрде $\dfrac{dy}{dt} > 0$ кезіндегі:

$$y = \begin{cases} M, & кезінде \quad y \geq a; \\ -M, & кезінде \quad y < a; \end{cases} \qquad (14.6)$$

$\frac{dy}{dt} < 0$ кезінде: $$y = \begin{cases} M, & \text{кезінде} \quad y \geq -a; \quad \text{ң} \\ -M, & \text{кезінде} \quad y < -a; \end{cases} \tag{14.7}$$



44 сурет – Гистерезисті релелік сипаттама

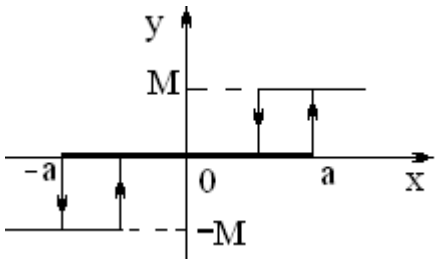
2. Сезімсіздік аймақтары бар және гистерезисті релелік сипаттама.

Математикалық түрде $\frac{dy}{dt} > 0$ кезіндегі:

$$y = \begin{cases} -M, & \text{кезінде} \quad y < -b; \\ 0, & \text{кезінде} \quad -b \leq y \leq a; \text{ң} \\ M, & \text{кезінде} \quad y > a. \end{cases} \tag{14.8}$$

$\frac{dy}{dt} < 0$ кезінде:

$$y = \begin{cases} -M, & \text{кезінде} \quad y \leq -a; \\ 0, & \text{кезінде} \quad -a \leq y \leq b; \text{ң} \\ M, & \text{кезінде} \quad y > b. \end{cases} \tag{14.9}$$



45 сурет – Сезіміздік аймақтары бар және гистерезисті релелік сипаттама

Сызықты емес жүйелерді зерттеудің негізгі есептері:

а) жүйенің тепе-теңдік күйін табу және олардың орнықтылығын зерттеу;

б) авто тербелісті анықтау және оларды орнықтылығын талдау;

в) әр түрлі бастапқы ауытқулар кезінде орныққан күйдегі өтпелі процестерді зерттеу.

Сызықты емес АБЖ-н зерттеу әдісі екі негізгі топқа бөлінеді: нақты және жуықтау әдістері. Нақты зерттеу әдісіне фазалы жазықтық әдісі және Ляпунов әдісі жатады.

14.2 Сызықты емес АБЖ фазалық жазықтықта зерттеу

Фазалық жазықтық әдісі орыс ғалымы А.А.Андроновпен ашылған. Әдіс екінші ретті сызықты және сызықты емес АБЖ зерттеуге арналған. Алайда бұл шектеу емес, себебі әрқашан да жүйенің ретін төмендетуге болады.

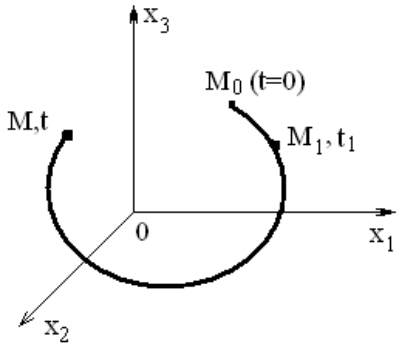
Жүйе n - ретті дифференциалдық теңдеуі мен сипатталады:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \dots,\ x_n(t)] \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \dots,\ x_n(t)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \dots,\ x_n(t)] \end{cases} \qquad (14.10)$$

Нақты жүйелерде физикалық мағынаға ие болатын $t=0$ кезінде бастапқы шарттар $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots x_{n0}$, f, u - қарсы және кіріс әсер, x_i - айнымалылар.

Бұл шығыс шама және оның туындысы болуы мүмкін. Егер $n=3$ болса, онда x_1, x_2, x_3 тікбұрышты координаттар ретінде қарастыруға болады.

Бастапқы шарттар $t=0$ кезіндегі координат нүктесін M_0 анықтайды. Басқарудың нақты процесінде әрбір уақыт мезетінде x_1, x_2, x_3 шамалар толықтай белгілі бір мәнге ие болады. Бұл кеңістікте М нүктесінің белгілі бір жағдайына толықтай сәйкес келеді. Нақты процесте уақыт ағысымен x_1, x_2, x_3 шамалар белгілі бір түрде өзгереді. Бұл белгілі бір траектория бойынша кеңістікте М нүктесінің ауысуына сәйкес келеді. М нүктесінің ауысу траекториясынан басқару процесіндегі жүйенің жағдайын көре аламыз. М нүктесі бейнелі нүктесі болып табылады, ал оның траекториясы фазалы траектория деп аталады. x_1, x_2, x_3 кеңістігі фазалы кеңістік деп аталады (46-сурет).



46 сурет – Фазалы траектория

Бастапқы шарттар фазалы траекторияның M_0 бастапқы нүктелерінің координатын анықтайды. Егер теңдеуде екі айнымалы болса, онда бейнелі нүкте кеңістікте емес, жазықтықта қозғалатын болады.

Фазалы кеңістік және фазалы траектория жүйеде жүретін процестердің геометриялық түрін көрсетеді. Фазалы траектория тек жүйенің қозғалысын көрсетеді. Кез келген уақыт мезетіндегі бейнелі нүктенің санды жағдайын анықтау үшін уақыт бойынша берілген теңдеудің шешімін табу қажет.

Уақытты шектеусіз ұлғайту кезінде орнықты сызықты жүйелердің фазалы траекториясы координат басына асимптотикалы жақындай беретін болады.

Сызықты емес жүйелер үшін фазалы траектория әр түрлі болуы мүмкін.

Екінші ретті теңдеумен жазылатын сызықты жүйені қарастыралық.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = 0\,. \tag{14.11}$$

Белгілеулер енгіземіз: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, онда теңдеу түрі мынадай болады:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -a_1\dot{x} - a_2x\,. \tag{14.12}$$

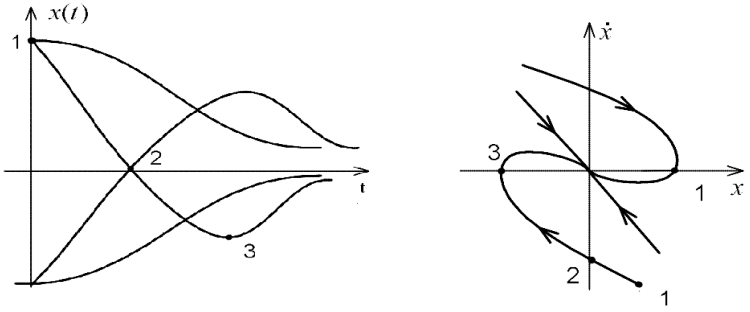
Уақытты t алып тастап, бірінші теңдеуді екінші теңдеуге бөлеміз:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -a_1 - a_2\frac{x}{\dot{x}}\,. \tag{14.13}$$

Теңдеудің шешімі фазалы жазықтықтағы қисықтар ұясын анықтайды, оларды жүйенің фазалы портреті деп атайды. Жүйенің портрет бейнесінің алты типтік жағдайы жүйенің сипаттамалық теңдеу түбірлерінен тәуелді болуы мүмкін.

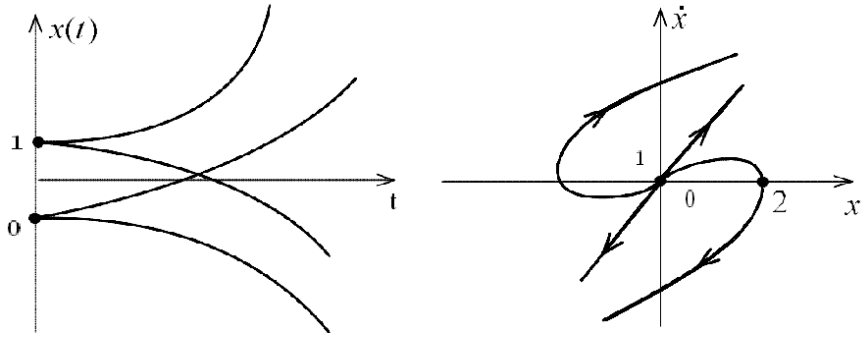
$$\begin{aligned} &p^2 + p\cdot a_1 + a_2 = 0,\\ &p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4\cdot a_2}{4}} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2}}{2}. \end{aligned} \tag{14.14}$$

1. $a_1^2 > 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$ кезінде сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты және теріс, жүйе орнықты, апериодты процесс болады. 47 - суретте сызықты емес жүйенің фазалы траекториясы және өтпелі процесс түрі көрсетілген.



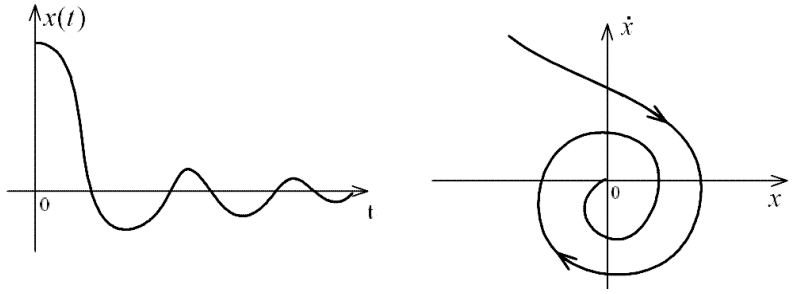
47 сурет – Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты теріс кезіндегі фазалы траекториясы және өтпелі процесс

2. $a_1^2 > 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ кезінде сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты, жүйе орнықсыз, таралатын (жинақсыз) процесс болады. Осыған сәйкесінше өтпелі процестер мен фазалы траекториялар 48 - суретте көрсетілген.



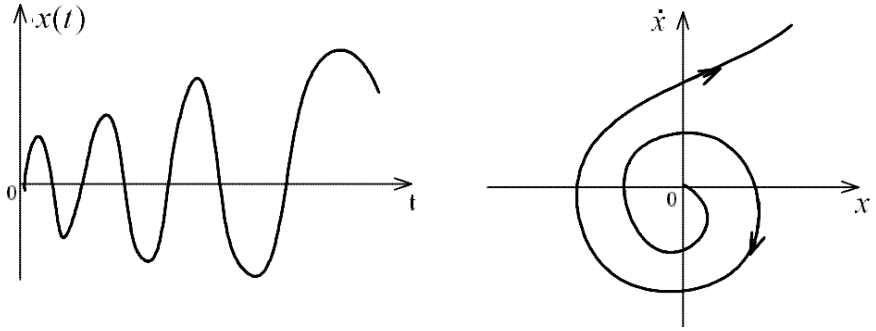
48 сурет – Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты оң кезіндегі өтпелі процестер мен фазалы траекториялар

3. $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$ кезінде сипаттамалық теңдеудің түбірлері комплексті, жүйе орнықты, тербелмелі таралатын процесс болады.
Сипаттамалы, вещественные части отрицательные при $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$, система устойчивая, процесс колебательный сходящийся.



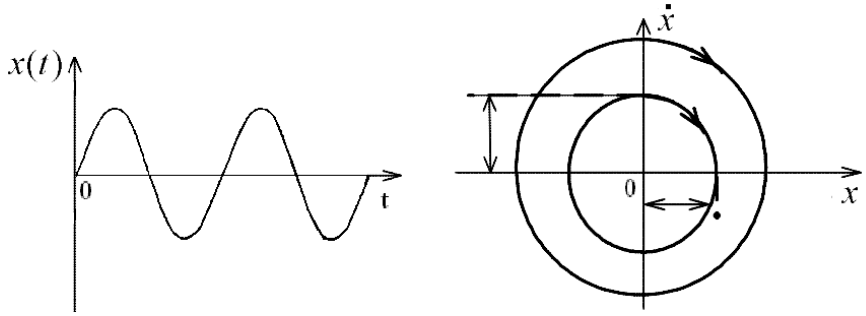
49 сурет – Сипаттамалық теңдеудің түбірлері комплексті кезіндегі өтпелі процестер мен фазалы траекториялар

4. сипаттамалық теңдеу түбірі комплексті, $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ кезінде нақты бөлігі оң, жүйе орнықсыз, тербелмелі таралатын процесс болады.



50 сурет – Сипаттамалық теңдеудің түбірлері комплексті кезіндегі өтпелі процестер мен фазалы траекториялар

5. $a_1 = 0, a_2 > 0$ сипаттамалық теңдеудің түбірі жорамал мәндер, жүйе тербелмелі орнықтылық шегінде, өшпейтін тербелмелі процесс болады.



51 сурет – Сипаттамалық теңдеудің түбірлері жорамал мәндер кезіндегі фазалы траекториялар мен өтпелі процестер

15 Дәріс № 15. Автоматты басқарудың сызықты жүйесінің синтезінің негіздері

Дәрістің мазмұны:
- автоматты жүйелердің синтездеу тапсырмалары;
- тура тізбекте түзетуші құрылғының синтезі;
- қалаулы ЛАС тұрғызу.

Дәрістің мақсаты:
- басқару жүйелерінің синтезінің негізін оқып білу;
- басқару жүйелерінде түзету әдістерін оқып меңгеру.

15.1 АБЖ синтезінің тапсырмасы

Автоматты басқару теориясында тапсырма екі түрге бөлінеді: тарсырмаларды талдау және синтез тапсырмалары. Талдау тапсырмаларына

толықтай жүйенің құрылымы, жүйенің берілген параметрлерін, оның статикалық және динамикалық қасиеттерін анықтау қажет.

Синтез тапсырмасына сапасына байланысты талаптарды қанағаттандыратын АБЖ тұрғызу талап етіледі.

Автоматты басқару жүйесінің синтезінде жүйенің құрылымы берілген болып есептеледі, жүйеге берілген талаптардан түзетуші құрылғыны синтездеу қажет, сұлбаны және параметрді таңдауы тиіс. Синтез тапсырмасы берілген негізгі сұлбада жүйенің қажетті динамикалық сипаттамасын тұтастай қамтамасыз ететін сұлбаның негізгі бөлігімен сәйкес келетін корректирлеуші құрылғының параметрлерін және түрін анықтаумен ғана шектеледі. Сондай-ақ, қажетті орнықтылық қорын, орнықтыланған режимдерде басқару нақтылығын және динамикалық режимдердегі басқару сапасын қамтамасыз етуі қажет.

Корректирлеуші құрылғының сұлбасын таңдауды коррекция түрлерінің әрқайсысына тән артықшылықтары мен кемшіліктеріне қарай алынады. Корректирлеуші құрылғы тізбектей, параллель немесе кері байланысты сұлба бойынша қосылуы мүмкін. Синтез есептерін шешу кезеңдері. Синтез есебінің негізгі сатылары:

1) басқару обьектісінің сипаттамасының есебін, басқару объектісінің математикалық моделін таңдау;

2) қанағаттандыру бойынша берілген басқару принципі кезінде орнықтылыққа берілген сұлбаны тексеру;

3) өтпелі процесс $h(t)$ сапасына талаптарына есеп: t_p жылдам қозғалыс, қайта реттеу пайызы σ, статикалық нақтылық s және т.б.;

4) тура және кері байланыста корректирлеуші құрылғылардың беріліс функцияларының параметрлерін анықтау;

5) өтпелі процесті түрғызу $h(t)$- автоматты басқару жүйесінің негізгі сипаттамасы; сапа көрсеткіштерін анықтау;

6) түзету:

- жүйенің басқарылмайтын бөлігінің БО математикалық моделі;
- АБЖ реттеу заңдары; басқару принциптерінің өзгеруі;

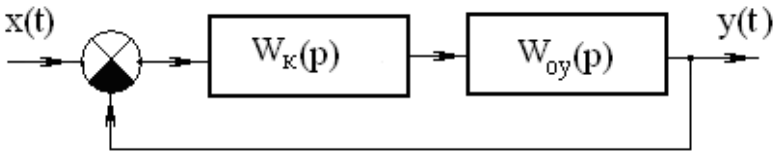
Алты қадамнан тұратын АБЖ синтезін есебін шешуде итерациялық (жуықтау) процедурасы алынды. Егер сәйкес болса, онда синтез есебі шешілді. Егер сәйкес келмесе, онда өтпелі процеске талаптар БА математикалық моделдің мүмкіндіктерімен сәйкес келмегені.

15.2 Тура тізбекті корректирлеуші құрылғыны синтездеу

Кез келген БА үшін басқару жүйесін жобалауда жүйені нақты, жылдам қозғалысты және үлкен орнықтылық қорын құрауы қажет. Сонымен бірге, бәрінен бұрын, сапа критерийлерімен анықталатын реттеу сапасын берілген талаптармен қанағаттандыратындай параметрлерді өзгертуге (жеке буындардың беріліс коэффициенттері, уақыт тұрақтысы) болатындай мүмкін болатын шектерде және рационалды түрде құралады. Осы жүйе аясында бұл

тапсырманы шешу мүмкіндігі болмаса жүйенің құрылымын өзгертуге тура келеді. Бұл мақсат үшін әдетте, басқару жүйесіне корректирлеуші құралдарды енгіземіз, олар жүйенің динамикасын керекті бағытқа өзгертеді. Корректирлеуші құралдарға белгілі бір беріліс функциясы бар буын жатады.

Синтез тапсырмасын орнату (қою). Басқарылатын аймақ, басқару принципі берілген келісім бойынша, жүйе қатаң теріс кері байланыспен қамтылған.



52 сурет – Корректирлеуші құрылғымен тұйықталған жүйе

Талаптардан шығатын БА сипаттамасы берілген кездегі жүйенің корректирлеуші буынын анықтау.

Талаптары:

- өтпелі функцияға (өтпелі процесс сапасына);
- орнықтыланған режимдегі қателікке.

Математикалық тапсырманың қойылуы: жүйенің құрылымы берілген, яғни басқару принципі; басқарылатын аймақтың ЛАСы $L_{OУ}(\omega) = \lg|W_{OУ}(j\omega)|$; өтпелі процесс талаптарынан шығатын қалаулы ЛАС $L_{Ж}(\omega) = \lg|W_{Ж}(j\omega)|$.

Қажет: корректирлеуші құрылғының $W_K(p)$ беріліс функциясын анықтау; $W_K(p)$ беріліс функциясының параметрлерін анықтау.

Тұйықталған жүйенің жиіліктік сипаттамасы келесі түрде болады:

$$W_З(j\omega) = \frac{W_K(j\omega)W_{OУ}(j\omega)}{1+W_K(j\omega)W_{OУ}(j\omega)}. \qquad (15.1)$$

Қалаулы беріліс функциясы арқылы тұйықталған жүйенің беріліс функциясын аламыз. Қалаулы беріліс функциясы $W_Ж(j\omega)$ тұйықталмаған жүйенің қасиеттерімен анықталады:

$$W_m(j\omega) = \frac{W_Ж(j\omega)}{1+W_Ж(j\omega)}. \qquad (15.2)$$

Егер осы өрнектің сол жақ бөлігі тең болса, онда теңдеудің оң жақ бөлігі де тең болады:

$$W_К(j\omega) = W_K(j\omega)\cdot W_{БА}(j\omega). \qquad (15.3)$$

Осы жерден корректирлеуші құрылғының беріліс функциясын аламыз:

$$W_K(j\omega) = \frac{W_К(j\omega)}{W_{БА}(j\omega)}. \qquad (15.4)$$

Соңғы өрнекті логарифмдеп, корректирлеуші құрылғының ЛАСын аламыз:

$$\lg|W_K(j\omega)| = \lg|W_K(j\omega)| - \lg|W_{БА}(j\omega)|. \qquad (15.5)$$

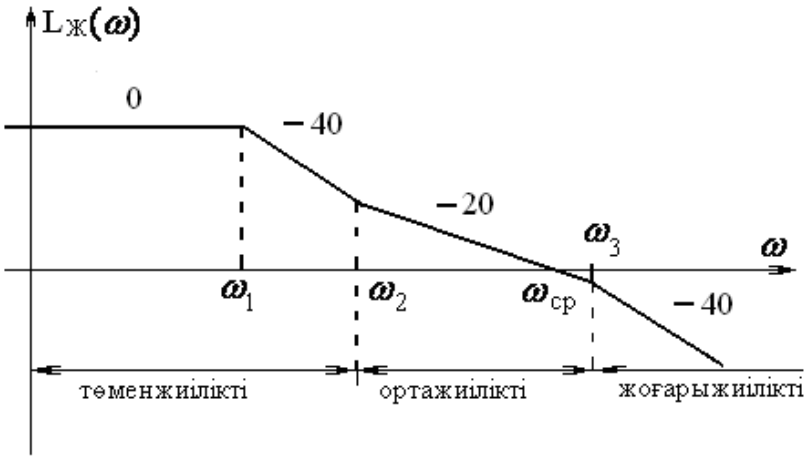
Сондай-ақ аппроксимирлаушы ЛАС ± 20 [дБ/дек] көлбеуілі кесіндімен тұрғызылады, онда жанасушы жиілікке дейінгі кесіндімен есептеу қажет. Осы өрнектен шығатыны корректирлеуші құрылғының аппроксимирлаушы ЛАС-ын алу үшін БА-ның қалаулы ЛАС-ан бастапқы ЛАС-н алу қажет, сонымен қатар жанасушы жиіліктерге дейін кесіндімен есептеу керек.

Егер ЛАС -20 [дБ/дек] көлбеулі жиіліктер осін қиса, онда жүйе орнықты; егер -40 [дБ/дек] болса, онда жүйе тербелмелі болуы мүмкін, тербелмелі шегінде бола ма соны тексеру қажет.

15.3 Қалаулы ЛАС-ны тұрғызу

Корректирлеуші құрылғыны синтездеу кезінде қалаулы ЛАС тұрғызу қажет. Қалаулы ЛАС деп қалаулы (қажетті) статикалық және динамикалық қасиеттерге ие тұйықталмаған жүйенің $L_K(\omega)$ асимптотикалық ЛАС-ын айтады. Қалаулы ЛАС үш негізгі асимтоталардан тұрады: төменжиілікті, ортажиілікті және жоғарыжиілікті (53 сурет).

Қалаулы ЛАС жүйеге (сапа көрсеткіштеріне берілген) негізделген талаптар бойынша тұрғызылған. Тұйықталмаған жүйенің ЛАС-ң төменжиілікті асимптотасы статикалық қасиеттерді анықтайды. ЛАС-ң ортажиілікті асимптотасы және оның төменжиілікті жанасуы жүйенің диамикалық қасиеттері - орнықтылық пен өтпелі сипаттамалардың сапа көрсеткішін анықтайды. Қалаулы ЛАС жоғары жиілікті асимптотасы жүйе қасиеттеріне аз әсер етеді. Сондықтан оны корректирлеуші құрылғы мүмкіндігінше қарапайым болу үшін таңдайды. Бұл бастапқы жүйенің ЛАС жоғарыжиілікті асимптотасының көлбеулерін қайталау кезінде жетеді, яғни қалаулы ЛАС $L_K(\omega)$ берілгенге параллель жүреді.



53 сурет – Қалаулы ЛАС

Қалаулы ЛАС-ның орта квадратты асимптотасын тұрғызу кесу ω_{CP} жиілігін таңдаудан басталады. Бұл үшін В.В. Солодовник номограммасын пайдаланамыз. Ол тұйықталған жүйенің нақты жиіліктік сипаттамасының максимумынан $P_{\max}$ реттеу уақытын және асыра реттеу тәуілділіктерін анықтайды.

Номограммада берілген мән бойынша σ асыра реттеу $P_{\max}$ мәнін анықтайды. Содан кейін номограмма бойынша c параметр мәнін анықтап, $P_{\max}$ бойынша t_p және ω_{CP} арасындағы қатынасты анықтайды.

Мысалы, асыра реттеу 30%, ал жүйенің жылдам қозғалысы $t_p = 0.6$ сек болсын делік. Онда 53 суретте көрсетілгендей $\sigma = 30\%$ бойынша $P_{\max} = 1.27$ анықтаймыз, содан соң $c = 3.5$ анықтаймыз. Ары қарай $t_p = \frac{c \cdot \pi}{\omega_{CP}} = \frac{3.5 \cdot \pi}{\omega_{CP}}$. Бұл жерде $\omega_{CP} = \frac{3.5 \cdot \pi}{t_p}$.

Осылайша реттеу уақыты берілген мәннен аспаған кезде қалаулы ЛАС кесу жиілігі есептеледі. Кесу жиілігі ω_{CP} неғұрлым көп болған сайын, реттеу уақыты соғрлым аз болады, ал жүйе жылдам қозғалады.

Қалаулы ЛАС орта жиілікті асиптотасы міндетті түрде -20 дб/дек көлбеуде $\omega_{кесу}$ нүктесі арқылы жүргізіледі. Үлкен көлбеу кезінде қажетті орнықтылық қорын және жіберілетін қайта реттеуді қамтамасыз ету қиын.

Орта жиілікті асимптотаның созылуы қажетті орнықтылық қорынан шығуынан орнығады. Осы болжамдардан төмен жиілікті асимптотамен жанасуынан оны таңдайды. Бұдан басқа, жанасушы асимптотаны $L_K(\omega)$ сипаттамасы берілген жүйенің ЛАС-нан аз ғана айырмашылық болуы және корректирлеуші құрылғы мүмкіндігінше қарапайым болатындай етіп таңдап алынады.

Әдебиеттер тізімі

Негізгі
1. Бекбаев А., Сулеев Д., Хисаров Б. Сызықты және бейсызықты автоматты реттеу жүйесінің теориясы. Оқулық – Алматы, 2012.- 310 б.
2. Бекбаев А., Сулеев Д., Хисаров Б. Автоматты реттеу теориясы. Оқулық – Алматы, 2005.- 267 б.
3. Бекбаев а., Сулеев Д., Скормин В.А., Ширяева О.И. Басқару теориясы. – Алматы, 2008.- 552 б.
4. Ротач В.Я. Теория автоматического управления: Учебник для вузов.- М., 2005.- 400 с.
5. Теория автоматического управления/под ред.В.Б.Яковлева.-М., 2009.-567 с.
6. Александровская А.Н. Автоматика.-М.: «Академия», 2011.
7. Малафеев С.И. Основы автоматики и системы автоматического управления. -М., «Академия», 2010.
8. Петрова А.М. Автоматическое управление.-М., 2010.

Қосымша
1. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления.-СПб., 2010.- 300 с.
2. Советов Б.Я. Теоретические основы автоматизированного управления.-М., 2006.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – СПб., 2004.- 752 с.
4. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб., Политехника, 2005. – 302 с.
5. Цыба Ю.А., Сагитов П.И. «Системы автоматического управления». Конспект лекций.- Алматы: АИЭС, 2006.- 70 с.
6. Сагитов П.И., Алексеев С.Б. «Системы автоматического управления». Методические указания к выполнению лабораторных работ.- Алматы: АИЭС, 2009.- 33 с.
7. Цыба Ю.А., Сагитов П.И. «Элементы теории автоматического управления»: Учебное пособие для ВУЗов. – Алматы: КАУ, 2006.- 130 с.

2014 ж. жиынтықтың жоспары, реті. 297

Пулат Исмайлович Сагитов
Тохтабуби Джумадиловна Иманбекова
Макпал Бексултановна Жаркымбекова

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ТЕОРИЯСЫ

5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттеріне арналған дәрістер жинағы

Редактор Ш.Ж. Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

_____ басуға қол қойылды
Таралымы 100 дана.
Көлемі 4,7 оқу – бас. әд.

Пішіні 60х84 1/16
№ 1 типографиялық қағаз
Тапсырыс 2350 т. Бағасы

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
Коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі – көбейткіш бюросы
050013, Алматы, А. Байтұрсынұлы көшесі, 126