



Некоммерческое  
акционерное  
общество

**АЛМАТИНСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ЭНЕРГЕТИКИ И  
СВЯЗИ**

Кафедра системы  
управления  
аэрокосмической  
техникой

## **БАЛЛИСТИКА**

Конспект лекций  
для студентов специальности  
5В074600 – Космическая техника и технологии

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛИ: Б.Д. Хисаров, К.С. Жилисбаева, Д.Т. Тулекенова. Баллистика. Конспект лекций для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии. – Алматы: АУЭС, 2014. – 36 с.

Конспект лекций предназначен для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии составлен на основании рабочей учебной программы, в том числе 15 часов лекций, 15 практических занятий.

В конспекте кратко проводятся основные положения, излагаемые в лекционном курсе «Баллистика».

Ил.15, табл.1, библиогр. – 10 назв.

Рецензент: ст.преп. каф. ТКС С.В. Самоделкина

Печатается по дополнительному плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014 г.

## Содержание

Введение.....	4
1 Лекция № 1. Системы координат .....	5
1.1 Астрономические системы координат .....	5
1.2 Географические координаты .....	6
1.3 Прямоугольные системы координат .....	7
1.4 Переход от одной системы координат к другой.....	7
2 Лекция № 2. Физические характеристики гравитационных полей .....	9
2.1 Ньютоновский закон тяготения .....	9
2.2 Гравитационный потенциал Земли .....	10
2.3 Сфера действия небесного тела .....	11
2.4 Силы, действующие на космический аппарат .....	12
3 Лекция № 3. Математическая модель невозмущенного движения КА .....	13
3.1 Уравнения невозмущенного движения КА .....	13
3.2 Интегралы уравнений невозмущенного движения КА .....	14
4 Лекция № 4. Орбита КА .....	17
4.1 Уравнения орбиты и ее параметры .....	17
4.2 Виды орбит .....	18
4.3 Элементы орбиты .....	20
5 Лекция № 5. Скорость КА .....	21
5.1 Разложение скорости КА на радиальное и трансверсальное составляющие.....	21
5.2 Правило рычага .....	22
5.3 Зависимость скорости КА от других параметров .....	22
5.4 Круговая и параболическая скорости .....	23
5.5 Третий закон Кеплера .....	24
6 Лекция № 6. Продолжительность перелета КА .....	25
6.1 Время перелета от перицентра до произвольной точки .....	25
6.2 Уравнение Кеплера .....	27
6.3 Методы решения уравнения Кеплера .....	28
7 Лекция № 7. Определения невозмущенной орбиты по заданным условиям движения .....	29
7.1 Определение орбиты по положению и скорости КА в начальный момент .....	29
7.2 Определение орбиты по двум фиксированным положениям и фокальному параметру .....	30
7.3 Дополнительные формулы для определения параметров орбит. Эллиптическая орбита .....	33
Приложение А .....	34
Список литературы .....	35

## **Введение**

В настоящее время в Республике Казахстан развивается космическая отрасль, способствующая вхождению Казахстана в число наиболее конкурентоспособных стран мира. Для достижения этой цели необходимо развивать научно-техническую базу и подготовку кадров. В связи с этим в ряде университетов введена специальность 5В074600 – Космическая техника и технологии, в основной обязательный модуль рабочего учебного плана которой включена дисциплина «Баллистика».

Рабочая программа дисциплины «Баллистика» включает большой объем теоретического и практического материала. Однако ограниченность аудиторных часов не позволяет в полной мере изложить необходимую информацию, поэтому большая часть материала изучается студентами в рамках самостоятельной работы (СРСР).

Конспект лекций предназначен для анализа и подробного изучения наиболее важных и необходимых разделов баллистики, приобретение навыков применения методов и практических основ курса при решении задач баллистики, анализ полученных результатов.

Цель предлагаемого конспект лекций – содействовать закреплению полученных знаний, сознательному их усвоению и осмысленному применению при решении практических задач, развитию навыков самостоятельной работы.

Следует отметить, что существует большое разнообразие названий теории движения космических аппаратов (КА), используемых специалистами из разных стран: механика космического полета, прикладная небесная механика, небесная баллистика, космическая баллистика, баллистика, космодинамика, астродинамика, теория движения искусственных небесных тел и т.д.

## 1 Лекция № 1. Системы координат

**Содержание лекции:** астрономические системы координат; географические координаты; прямоугольные системы координат; переход от одной системы координат к другой.

**Цель лекции:** выбрать систему координат, в которой аналитические выражения для описания движения и само решение задачи будут наиболее простыми.

### 1.1 Астрономические системы координат

Небесная сфера. В астрономии и космодинамике используют вспомогательную сферу произвольного радиуса (в целях упрощения геометрических соотношений его полагают равным единице) с центром в некоторой точке пространства, принятой за начало координат. Эта сфера называется *небесной сферой*. В зависимости от решаемой задачи центр небесной сферы может быть помещен [5]:

- в место на поверхности планеты, где находится наблюдатель (*топоцентрическая небесная сфера*);
- в центр Земли (*геоцентрическая небесная сфера*);
- в центр Солнца (*гелиоцентрическая небесная сфера*);
- в центр той или иной планеты (*планетоцентрическая небесная сфера*);
- в любую др. точку пространства.

Введем основные линии и точки небесной сферы (рисунок 1.1).

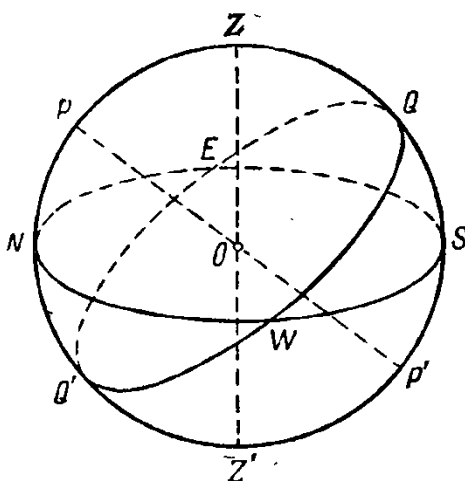


Рисунок 1.1 – Линии и точки небесной сферы

*Отвесная (вертикальная) линия* – прямая  $ZZ'$ , проходящая через центр небесной сферы, пересекает ее в точках  $Z$  и  $Z'$ , которые, соответственно, называются *зенитом* и *надиром*.

## 1.2 Географические координаты

Воображаемая линия, вокруг которой происходит суточное вращение Земли, называется *земной осью*. Ось вращения Земли пересекается с земным сфероидом в *северном и южном полюсах* (рисунок 1.6).

Плоскость, проходящая через центр масс Земли и перпендикулярная оси ее вращения, называется *экваториальной плоскостью*, а линия ее пересечения с поверхностью земного эллипсоида называется *земным экватором*. По Международному Соглашению с 1884 г. за начальный (нулевой) меридиан принят *Гринвичский меридиан*, проходивший через ось главного телескопа прежней Гринвичской обсерватории (существовала 278 лет 1675÷1953 гг.) в предместье г. Лондона (Англия). Гринвичский меридиан делит земной шар на восточное и западное полушария.

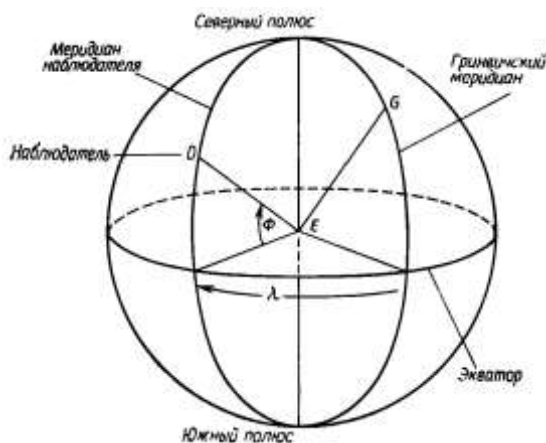
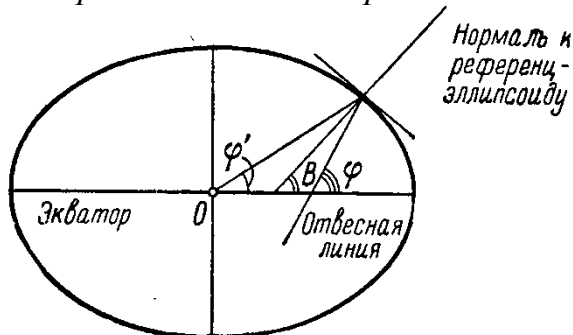


Рисунок 1.6 – Линии земного сфероида

*Астрономическая долгота  $\lambda$*  – это двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов данного места и Гринвича. Прямая линия, по которой направлена сила тяжести в данной точке Земли, называется *отвесной* или *вертикальной линией* (рисунок 1.7). Плоскость, проходящая через отвесную линию данной точки земной поверхности, называется *плоскостью астрономического меридиана*.



### 1.3 Прямоугольные системы координат

При межпланетных полетах в пределах Солнечной системы используются прямоугольные системы координат с началом в центре Солнца (или в центре масс Солнечной системы).

Прямоугольная геоэквиаториальная система координат. Эта система координат с началом в центре Солнца, фиксированная на заданную эпоху (J2000), основной плоскостью  $OXY$  является плоскость земного экватора. Ось  $OZ$  направлена в полюс Мира, ось  $OX$  лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку весеннего равноденствия в фиксированную эпоху (время), для J2000 – 1 января 2000 г. (соответствует юлианской дате JD 245 1545.0). Ось  $OY$  дополняет систему до правой.

Прямоугольная эклиптическая система координат. Эта система координат отличается от геоэквиаториальной тем, что основной плоскостью  $OXY$  является плоскость эклиптики.

При изучении движения искусственного спутника Земли используют две геоцентрические прямоугольные системы координат.

Геоцентрическая инерциальная система координат. Основной плоскостью  $OXY$  является плоскость земного экватора. Ось  $OZ$  направлена в полюс Мира (практически совпадает с осью вращения Земли), ось  $OX$  лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку весеннего равноденствия – это направление Земля – Солнце в день 22 марта (направление на созвездие Овна). Ось  $OY$  дополняет систему до правой.

Гринвичская система координат. Эта система координат отличается от геоцентрической инерциальной тем, что ось  $OX$  лежит в плоскости гринвичского меридиана и направлена по линии пересечения гринвичского меридиана с плоскостью земного экватора.

### 1.4 Переход от одной системы координат к другой

Одни преобразования легче проводить с использованием формул сферической тригонометрии, другие – векторных методов.

Связь эклиптической и второй экваториальной систем координат. Выделенный голубым цветом сферический треугольник (рисунок 1.5) называется *вторым астрономическим треугольником* и используется для перевода координат из второй экваториальной системы в эклиптическую и обратно с помощью формул сферической тригонометрии. Здесь приняты следующие обозначения:  $\alpha$  – прямое восхождение,  $\beta$  – эклиптическая широта,  $\delta$  – склонение,  $\lambda$  – эклиптическая долгота,  $\varepsilon$  – угол наклона эклиптики к небесному экватору.

*Формулы преобразования координат* имеют вид:

– экваториальных координат в горизонтальные

$$\left. \begin{aligned} \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ \sin z \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t, \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

– горизонтальных координат в экваториальные

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A, \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

– экваториальных координат в эклиптические

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha, \\ \sin \beta &= \sin \delta \sin \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Аналогичные формулы преобразования от эклиптических координат к экваториальным и т. д. можно получить, рассматривая соответствующий сферический треугольник и применяя формулы сферической тригонометрии.

Связь между геоцентрическими прямоугольными и геодезическими координатами. Геоцентрические прямоугольные координаты  $x, y, z$  точки земной поверхности вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= (C + H) \cos B \cos L, \\ y &= (C + H) \cos B \sin L, \\ z &= (S + H) \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e_3^2 \sin^2 B}}, \quad S = (1 - e_3^2)C. \quad (1.6)$$



## 2 Лекция № 2. Физические характеристики гравитационных полей

**Содержание лекции:** Ньютоновский закон тяготения; гравитационный потенциал Земли; сфера действия небесного тела; силы, действующие на космический аппарат.

**Цель лекции:** изучить поле тяготения, которое будет оказывать определяющее влияние на движение КА.

### 2.1 Ньютоновский закон тяготения

Фундамент, на котором построена небесная механика и баллистика – это закон всемирного тяготения, согласно которому две материальные точки с массами  $m$  и  $M$  тяготеют друг к другу с силой

$$F = \frac{fmM}{r^2}, \quad (2.1)$$

где  $r$  – расстояние между точками;  $f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / \text{г} \cdot \text{сек}^2$  – универсальная постоянная тяготения, одна и та же для всей Вселенной.

В солнечной системе Солнце и большие планеты являются сфероидами с относительно малыми степенями сжатия, а их взаимные расстояния велики по сравнению с их размерами. Следовательно, притяжение между Солнцем и планетами без спутников можно считать почти таким же, как если бы эти тела были материальными точками. По сравнению с Солнцем массы больших планет малы, поэтому всегда, за исключением случая тела, близкого к главной планете, притяжение Солнца подавляющим образом превосходит притяжения больших планет и других небесных тел солнечной системы.

### 2.2 Гравитационный потенциал Земли

Международным астрономическим союзом (МАС) в качестве стандартной записи потенциала притяжения Земли рекомендована следующая формула:

$$U = f \frac{M}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_s}{r} \right)^2 P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{R_s}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right]. \quad (2.2)$$

Здесь  $\lambda$  – долгота притягиваемой материальной точки, отсчитываемая от гринвичского меридиана;  $\varphi$  – широта точки, отсчитываемая от плоскости экватора;  $M$  – масса Земли;  $R_s$  – средний экваториальный радиус Земли;  $J_n$ ,  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс

внутри нее;  $P_n$ ,  $P_n^{(k)}$  – полином Лежандра и присоединенная функция Лежандра, вычисляемые по известным аналитическим зависимостям.

Первое слагаемое в выражении (2.2) является потенциалом сил притяжения шара (2.3), остальные члены разложения характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры, их называют *зональными, секториальными и тессеральными гармониками*.

Второе слагаемое, содержащее  $P_n(\sin \varphi)$ , называется *зональной гармоникой порядка  $n$* , при  $n=2$  (она обусловлена сплюснутостью Земли у полюсов).

Третье слагаемое включает *секториальные гармоник* порядка  $n$  и *тессеральные гармоник* порядка  $n$  и *индекса  $k$* , которые характеризуют отличие Земли от тела динамически симметрию относительно оси вращения. Зональные (при нечетных  $n$ ) и тессеральные (при нечетной разности  $n-k$ ) гармоник определяют асимметрию Земли относительно экватора.

Земля представляет собой неоднородное тело вращения со сложной, конфигурацией поверхности. В первом приближении Землю рассматривают как однородную сферу с радиусом  $R=6371$ км и ускорением свободного падения на поверхности  $g_0=9.81$ м/с<sup>2</sup>. В этом случае притягивающее тело в зависимости от постановки задачи можно аппроксимировать материальной точкой.

Потенциал ньютоновского поля тяготения в первом приближении определяется по формуле

$$U = f \frac{M}{r} = \frac{\mu}{r}, \quad (2.3)$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли ( $\mu = 398600.4$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>), равный произведению постоянной тяготения  $f$  на массу Земли  $M$ ;  $r$  – расстояние от центра сферической Земли до точки, в которой рассчитывается потенциал.

Ускорением свободного падения  $\vec{g}$  направлено по радиус-вектору к центру Земли и определяется по формуле

$$g = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.4)$$

Значение  $g$  на высоте  $h$  полета КА вычисляется по формуле:

$$g(h) = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2, \quad (2.5)$$

где  $R_0$  – средний радиус Земли;  $g_0$  – ускорение на поверхности Земли ( $h=0$ ).

В следующем приближении Землю рассматривают как эллипсоид вращения и называют *земным эллипсоидом* со сжатием

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \quad (2.6)$$

где  $a$  – большая полуось;  $b$  – малая полуось.

Эллипсоид, наилучшим образом описывающий какой-либо район земной поверхности, называют референц-эллипсоидом (образец эллипсоида). До 1964 г. каждая страна руководствовалась данными «своего» земного эллипсоида. Данные о некоторых из них приведены в приложении (таблица 1.1).

На территории бывшего СССР для всех работ принят референц-эллипсоид Красовского Ф.Н. (см. таблицы 1.1 в приложении) с параметрами:

- большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м;
- малая полуось  $b = 6\,356\,863,019$  м;
- первое (полярное) сжатие  $\alpha = 1/298,3 = 0,0033523299$ ;
- второе сжатие  $\alpha' = 0,0033634749$ ;
- эксцентриситет  $e = 0.081813333$ .

### 2.3 Сфера действия небесного тела

Вопрос о том, на каком расстоянии от данного небесного тела его поле тяготения будет оказывать определяющее влияние на движение КА, решается исходя от размеров сферы действия данного небесного тела. Сферы действия планет Солнечной системы определяются относительно Солнца, а сфера действия Луны – по отношению к Земле.

Сферой действия планеты относительно Солнца называется область, в пределах которой возмущающее воздействие Солнца на планетоцентрическое движение меньше возмущающего воздействия планеты на гелиоцентрическое движение КА.

Радиус сферы действия малого небесного тела относительно большого определяется формулой

$$r_d = Z \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (2.7)$$

где  $M$  и  $m$  – масса большого и малого тел;  $Z$  – расстояние между ними.

Значения радиусов сфер действия планет Солнечной системы приведены в приложении (Таблица 1). Радиус сферы действия Луны относительно Земли  $r_{\text{л}} = 66280$  км. *Сферой влияния планеты относительно Солнца* называют сферу, центр которой имеет радиус

$$r_{\text{в}} = 1,15r \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.8)$$

При расчете траекторий полета КА выгодным является использование сферы влияния, чем сферы действия. В этом случае ошибки в параметрах траектории КА при переходе от одного притягивающего центра к другому становятся наименьшими.

#### 2.4 Силы, действующие на космический аппарат

На спутник действуют разнообразные силы: помимо притяжения Земли, гравитационные силы тяготения небесных тел (Солнца, Луны, планет и др.), аэродинамические силы, сила светового давления, электромагнитные силы, вращение земной атмосферы, солнечная радиация и др., которые в разной степени влияют на его движение. Эффект этого влияния зависит от типа ИСЗ и условий его движения:

- до высот над поверхностью Земли 200-300 км преобладают аэродинамические моменты;
- на высотах 300-500 км гравитационные, аэродинамические и магнитные моменты сравнимы по величине;
- на высотах больших 500 км, преобладают гравитационные моменты;
- на высотах больших 700 км гравитационные и магнитные моменты сравнимы с аэродинамическими или их превосходят;
- на рассмотренном диапазоне высот (до 3000 км) моменты сил светового давления на один-два порядка меньше гравитационных;
- на высотах больших 35000-40000 км моменты сил светового давления будут больше гравитационных;
- магнитные моменты везде сравнимы с гравитационными;
- моменты от ударов микрометеоритов всегда пренебрежимо мал.

Моменты гравитационных сил являются одним из важнейших факторов, влияющих на вращение искусственных и естественных небесных тел.

Возмущающие силы оказывают влияние на характер движения центра масс ИСЗ, а создаваемые ими моменты – на характер его движения относительно центра масс. Хотя эти возмущения очень малы и при изучении движения в атмосферных условиях, как правило, не учитываются, при длительных космических полетах их влияние является весьма существенным.

### 3 Лекция № 3. Математическая модель невозмущенного движения КА

**Содержание лекции:** уравнения невозмущенного движения КА; интегралы уравнений невозмущенного движения КА.

**Цель лекции:** рассматривать простейшую математическую модель, в которой движение КА (как пассивно гравитирующей материальной точки), происходит под действием только одной центральной силы гравитационного притяжения.

#### 3.1 Уравнения невозмущенного движения КА

Пусть  $m_0$  и  $m$  массы притягивающихся точек. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке с массой  $m_0$ , а положение точки с массой  $m$  определим радиус-вектором  $\vec{r}$  (рисунок 3.1). Точку с массой  $m_0$  называют *притягивающим центром* или *центральной телом*.

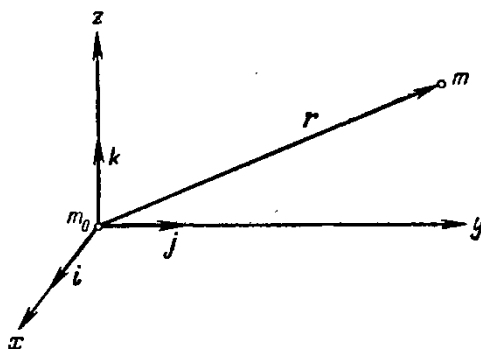


Рисунок 3.1 – Прямоугольная система координат

Относительное движение точки с массой  $m$  описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{K \vec{r}}{r^3} = 0, \quad (3.1)$$

где  $K = f(m_0 + m)$ , а через  $f$  обозначена постоянная тяготения. В случае ограниченной задачи двух тел  $K$  равно гравитационному параметру притягивающего центра  $K = f m_0$ .

Векторному уравнению (3.1) соответствует система трех скалярных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} + K \frac{x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + K \frac{y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + K \frac{z}{r^3} &= 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Уравнения (3.2) называются основными уравнениями задачи двух тел.

### 3.2 Интегралы уравнений невозмущенного движения КА

Векторное дифференциальное уравнение (3.1) допускает следующие первые интегралы.

**Интеграл энергии.**

$$V^2 = \frac{2K}{r} + h,\tag{3.3}$$

где  $v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ , а  $h$  называется *константой энергии*.

При  $r \rightarrow \infty$ ,  $h \geq 0$  следует, что  $v^2 \rightarrow v_\infty^2 = h$ . Число  $v_\infty$  называется *величиной скорости на бесконечности*.

Из начальных условий  $t = t_0$ ,  $r = r_0$ ,  $v = v_0$  можно найти константу энергии

$$h = v_0^2 - \frac{2K}{r_0}.\tag{3.4}$$

**Интеграл площадей.**

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{\sigma},\tag{3.5}$$

где  $\vec{\sigma}$  – векторная *константа площадей* или *постоянная площадей*.

Если

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{V} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \\ \vec{\sigma} &= \sigma_1\vec{i} + \sigma_2\vec{j} + \sigma_3\vec{k}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

тогда интеграл площадей (3.5) переписывается в скалярном виде

$$\begin{aligned}y\dot{z} - \dot{z}y &= \sigma_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= \sigma_2,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\dot{x}y - y\dot{x} = \sigma_3.$$

Из векторного равенства

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{r} = 0 \quad (3.8)$$

следует, что в любой момент времени радиус-вектор  $\vec{r}$  точки с массой  $m$  перпендикулярен к вектору  $\vec{\sigma}$ . Уравнение плоскости орбиты имеет вид

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0 \quad (3.9)$$

и называется *неизменяемой плоскостью Лапласа*.

Если плоскость орбиты принята в качестве основной координатной плоскости  $z = 0$  (рисунок 3.2), то интеграл площадей принимает вид

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \quad (3.10)$$

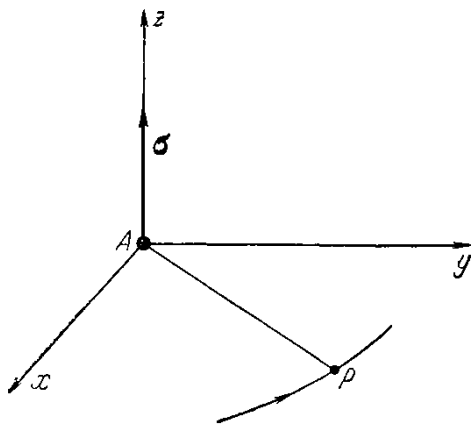


Рисунок 3.2 – Плоскость орбиты

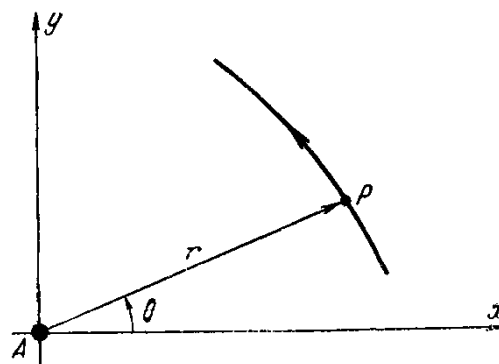


Рисунок 3.3 – Полярные координаты

Вводя в плоскости орбиты полярные координаты с полюсом в притягивающем центре (рисунок 3.3), интеграл площадей можно переписать следующим образом:

$$r^2 \dot{\theta} = \sigma. \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) дает математическую формулировку *второго закона Кеплера*: *секторная скорость материальной точки есть величина постоянная*.

### **Интеграл Лапласа.**

Равенство

$$\vec{\sigma} \times \vec{V} + \frac{K\vec{r}}{r} = -\vec{\lambda} \quad (3.12)$$

называется *векторным интегралом Лапласа*. Здесь векторная постоянная  $\vec{\lambda}$  называется *вектором Лапласа*.

Если  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , тогда, проектируя (3.12) в проекциях на оси координат, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \sigma_3 \dot{y} - \sigma_2 \dot{z} &= \lambda_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \sigma_1 \dot{z} - \sigma_3 \dot{x} &= \lambda_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \sigma_2 \dot{x} - \sigma_1 \dot{y} &= \lambda_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первые интегралы (3.3)-(3.5) связаны между собой следующими соотношениями:

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma} = 0, \quad (3.14)$$

$$\lambda^2 = K^2 + h\sigma^2. \quad (3.15)$$

Т.к. вектор  $\vec{\sigma}$  ортогонален плоскости орбиты, то из (3.13) следует, что перпендикулярный к нему вектор Лапласа всегда лежит в плоскости этой орбиты.

Если  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , тогда из (3.14) имеем

$$\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 = 0, \quad (3.16)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = K^2 + h(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что постоянная площадей и вектор Лапласа никогда не могут быть равны нулю одновременно.

Из семи первых интегралов уравнений (3.2) только пять являются независимыми, следовательно, они не образуют общего решения системы дифференциальных уравнений (3.2), т.к. для решения этих дифференциальных уравнений необходимо иметь шесть независимых первых интегралов. Шестой интеграл можно найти с помощью квадратуры.



## 4 Лекция № 4. Орбита КА

**Содержание лекции:** уравнения орбиты и ее параметры; элементы орбиты; виды орбит.

**Цель лекции:** изучить способы определения видов орбит, определить элементы орбит.

### 4.1 Уравнения орбиты и ее параметры

Из векторного интеграла Лапласа и векторного интеграла площадей следует *первый закон Кеплера* [6].

В полярных координатах с полюсом в притягивающем центре (рисунок 4.3) уравнение орбиты, точки с массой  $m$  будет иметь вид

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) дает математическое содержание *первого закона Кеплера*.

Направление полярной оси, называемой *линией апсид*, будет определяться вектором Лапласа  $\vec{\lambda}$ . Ближайшая к фокусу точка  $\Pi$  орбиты называется *перигеумом* (рисунок 4.1). Угол  $\theta$  отсчитывается от линии апсид и называется *истинной аномалией*. Постоянные  $e$  и  $p$ , соответственно, называют *эксцентриситетом* и *фокальным параметром* орбиты.

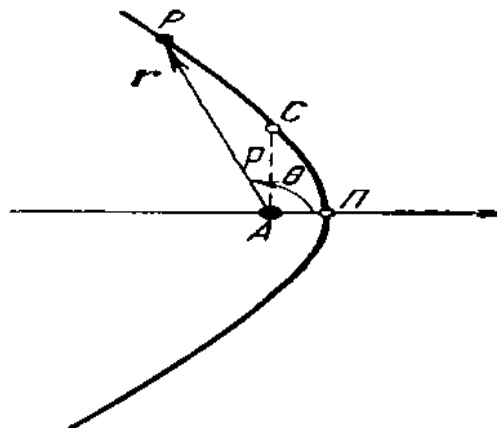


Рисунок 4.1 – Орбита и ее параметры

Формула для вычисления эксцентриситета:

$$e = \sqrt{1 + h \frac{C^2}{\mu^2}}. \quad (4.2)$$

#### 4.2 Виды орбит

Фокальный параметр определяет размеры, а эксцентриситет – форму орбиты:

- круговая (траектория – окружность), при  $e = 0$  (рисунок 4.2);
- эллиптическая (траектория – эллипс), при  $0 \leq e < 1$  (рисунок 4.2);
- параболическая, (траектория – парабола) при  $e = 1$  (рисунок 4.3);
- гиперболическая, (траектория – левая ветвь гиперболы) при  $e > 1$  (рисунок 4.3).

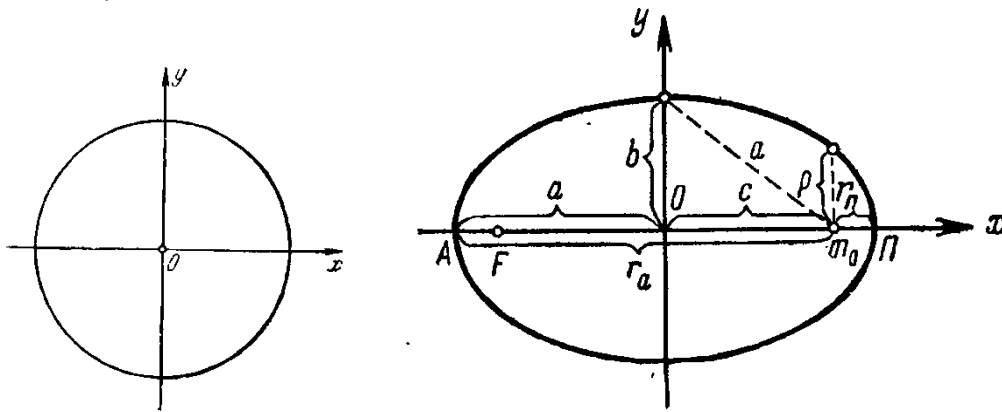


Рисунок 4.2 – Круговая и эллиптическая орбиты

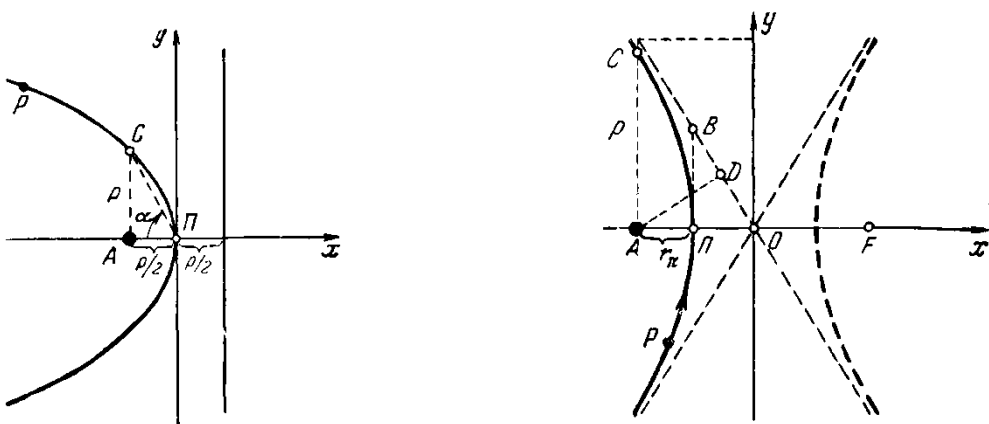


Рисунок 4.3 – Параболическая и гиперболическая орбиты

Если орбита – эллипс, то на ней будет иметься точка, наиболее удаленная от фокуса, занятого притягивающим центром (рисунок 4.2). Эта точка называется *апоцентром*.

Значения величины радиус-вектора в перицентре  $r_\pi$  и апоцентре  $r_a$  можно вычислить по формулам

$$r_a = \frac{p}{1-e}, \quad r_\pi = \frac{p}{1+e}. \quad (4.3)$$

Величина

$$\frac{1}{2}(r_a + r_\pi) = a \quad (4.4)$$

называется *средним расстоянием до притягивающего центра*.

Из формулы (4.4) следует, что траектория КА будет:

- эллиптической, при  $h < 0$ ;
- параболической, при  $h = 0$ ;
- гиперболической, при  $h > 0$ .

Также из формулы (4.7) можно определить, что траектория КА:

- эллипс, при  $V_0^2 < \frac{2g_0R_0^2}{R}$ ;
- парабола, при  $V_0^2 = \frac{2g_0R_0^2}{R}$ ;
- гипербола, при  $V_0^2 > \frac{2g_0R_0^2}{R}$ .

Если  $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$  – большая полуось эллипса, его малая полуось и половина расстояния между фокусами, а  $a_\Gamma, b_\Gamma, c_\Gamma$  – действительная полуось, мнимая полуось и половина расстояния между фокусами гиперболы. Тогда

- $a = a_\varepsilon, \quad b = b_\varepsilon, \quad c = c_\varepsilon$ , если орбита – эллипс;
- $a = -a_\Gamma, \quad b = -ib_\Gamma, \quad c = -c_\Gamma$ , если орбита – гипербола.

Величины  $a$  и  $b$  называются, соответственно, *большой и малой полуосями* конического сечения. Величина  $a$  будет положительной для эллипса и отрицательной для гиперболы. Уравнение орбиты в декартовых координатах имеет вид:

- в случае эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (4.5)$$

- в случае гиперболы

$$(4.6) \quad \frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1.$$

Единые уравнения эллипса и гиперболы имеет вид

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x &= a \cos Z, \\ y &= b \sin Z \end{aligned}$$

при двух различных предположениях относительно  $a, b, Z$ :

1)  $a \geq b > 0$ ,  $Z$  пробегает вещественные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ ;

2)  $a < 0$ ,  $b = i|b|$ ,  $Z = iH$ ,  $H$  пробегает вещественные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В (4.12) величина  $a$  называется *главной полуосью*.

Следующие формулы справедливы для обоих типов орбит:

$$(4.8) \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad r_\pi = a(1 - e) = a - c.$$

### 4.3 Элементы орбиты

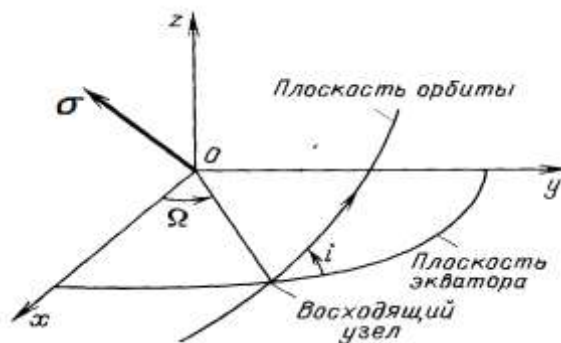


Рисунок 4.4 – Ориентация плоскости орбиты

В экваториальной прямоугольной системе координат, ось  $Ox$  которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $Oy$  лежит в экваториальной плоскости (рисунок 4.4), вектор  $\vec{\sigma}$  определяется по формуле:

$$\sigma_1 = \sigma \sin i \sin \Omega, \quad \sigma_2 = -\sigma \sin i \cos \Omega, \quad \sigma_3 = \sigma \cos i, \quad \cos i = \frac{\sigma_3}{\sigma},$$

$$i = \arccos \frac{\sigma_3}{\sigma}, \quad \sin \Omega = \frac{\sigma_1}{\sigma \sin i}, \quad \Omega = \arcsin \frac{\sigma_1}{\sigma \sin i}. \quad (4.9)$$

Угол  $i$  между плоскостью Лапласа (орбиты) и экваториальной плоскостью называется *углом наклона орбиты к экватору или наклоном орбиты*. Линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора называется *линией узлов*. Угол  $\Omega$  между осью  $x$  и линией узлов называется *долготой восходящего узла*. *Восходящим узлом* называют точку пересечения траектории спутника с плоскостью экватора при переходе из южного полушария в северное. При переходе из северного полушария в южное точка пересечения орбиты с плоскости называется *нисходящим узлом*.

Величины  $p, e, i, \Omega, \beta$  и  $\tau$  называются *элементами орбиты*. Элементы орбиты однозначно определяют положение КА в пространстве. Положение плоскости орбиты определяются двумя углами  $i$  и  $\Omega$ . Форма и размеры орбиты определяются эксцентриситетом  $e$  и фокальным параметром  $p$ .

## 5 Лекция № 5. Скорость КА

**Содержание лекции:** разложение скорости КА на радиальное и трансверсальное составляющие; правило рычага; зависимость скорости КА от других параметров; круговая и параболическая скорости; третий закон Кеплера.

**Цель лекции:** изучить способы определения виды орбит, определить элементов орбит.

### 5.1 Разложение скорости КА на радиальное и трансверсальное составляющие

Если известны величины  $K$ ,  $p$ ,  $e$  и в какой-то момент известна истинная аномалия, то можно вычислить скорость КА.

Модуль скорости КА, движущейся по кеплеровской орбите, определяется формулой

$$V = \sqrt{\frac{K}{p}(1 + 2e \cos \theta + e^2)}. \quad (5.1)$$

Радиальная  $V_r$  и трансверсальная (поперечная)  $V_p$  компоненты скорости (рисунок 5.1), соответственно, равны

$$V_r = \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin \theta, \quad (5.2)$$

$$V_p = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 + e \cos \theta). \quad (5.3)$$

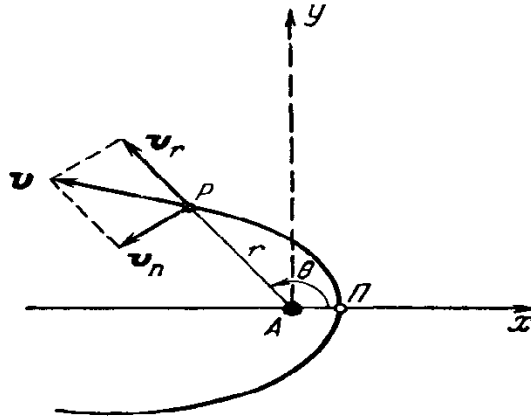


Рисунок 5.1 – Разложение скорости на составляющие

Если угол между вектором скорости  $\vec{V}$  движущейся точки и ее радиус-вектором  $\vec{r}$  равен  $\beta$ , то

$$rV \sin \beta = \sigma, \quad (5.4)$$

где  $\sigma$  – постоянная площадей.

## 5.2 Правило рычага

В перицентре ( $\theta = 0$ ) скорость КА направлена перпендикулярно к его радиус-вектору и имеет *наибольшее значение*:

$$V_{\max} = V_{\pi} = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 + e). \quad (5.5)$$

В апоцентре (если орбита – эллипс) скорость КА направлена также перпендикулярно к его радиус-вектору и имеет *наименьшее значение*:

$$V_{\min} = V_a = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 - e). \quad (5.6)$$

Из этих соотношений следует *правило рычага*:

$$\frac{V_{\pi}}{V_a} = \frac{r_a}{r_{\pi}} \quad (5.7)$$

## 5.3 Зависимость скорости КА от других параметров

Скорость КА можно выразить из интеграла энергии в виде

$$V^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

(5.8)

$$V^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e}{r_\pi}\right),$$

(5.9)

$$V_\infty^2 = \frac{K}{|a|}.$$

(5.10)

Из (5.8) следует, что при больших  $r$  КА практически движется *прямолинейно*.

#### 5.4 Круговая и параболическая скорости

Скорость в данной точке пространства, которую следует сообщить КА, чтобы он стал обращаться вокруг притягивающего центра по круговой орбите, называют *круговой скоростью*  $V_{kp}$ :

$$V_{kp} = \sqrt{\frac{K}{r}}.$$

(5.11)

Круговая скорость у поверхности притягивающего тела называется *первой космической скоростью*  $V_{kp} = V_I$ .

Пусть  $r_1$  – расстояние КА до «пустого» фокуса (его иногда называют «антифокусом»), тогда

$$V = V_{kp} \sqrt{\frac{r_1}{a}},$$

(5.12)

или

$$V = V_{kp} \sqrt{\frac{r_1}{|a|}}. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) верна и для гиперболы.

Если  $H$  – высота КА над поверхностью Земли, то местная круговая скорость на высоте  $H$  определяется по формуле

$$V_{kp}^2 = \frac{g_0 R_0^2}{R_0 + H}. \quad (5.14)$$

Если известны радиус орбиты и круговая скорость КА

$$\omega_{kp} = \frac{V_{kp}}{r_{kp}} = \sqrt{\frac{K}{r_{kp}^3}}, \quad (5.15)$$

то период обращения КА определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{kp}} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} r_{kp}^{3/2}. \quad (5.16)$$

Скорость в данной точке пространства, которую следует сообщить КА, чтобы он мог удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от притягивающего центра, называют *параболической скоростью*  $V_{nap}$  или *второй космической скоростью*:

$$V_{nap} = \sqrt{\frac{2K}{r}} \quad (5.17)$$

Параболическая скорость у поверхности притягивающего тела называется *второй космической скоростью*  $V_{nap} = V_{II}$ .

Справедлива формула:

$$V_{nap} = \sqrt{2} V_{kp} \quad (5.18)$$

Из интеграла энергии имеем следующие зависимости:

$$V^2 = V_{nap}^2 + h; \quad (5.19)$$



$$V^2 = V_{\text{пар}}^2 + V_{\infty}^2; \quad (5.20)$$

$$V_r^2(r) - \frac{2K}{r} = V_{\infty}^2; \quad (5.21)$$

$$V_r^2(r) = V_{\text{пар}}^2(r) + V_{\infty}^2, \quad (5.22)$$

где  $v_r(r)$  – местная гиперболическая скорость или гиперболическая скорость на данном расстоянии,  $v_{\text{пар}}(r)$  – местная параболическая скорость или параболическая скорость на данном расстоянии. Величину  $v_{\infty}$  иногда называют гиперболическим избытком скорости.

### 5.5 Третий закон Кеплера

В случае эллиптической орбиты период обращения КА можно найти по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2}. \quad (5.23)$$

Формулу (5.23) можно переписать в виде, выражающем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}. \quad (5.24)$$

В случае пассивно гравитирующего небесного тела  $K = fm$ , случае активно гравитирующего –  $K = f(m_0 + m)$ .

Если два пассивно гравитирующих тела, обращаются вокруг одного и того же притягивающего центра, имеет место *уточненный третий закон Кеплера*, найденный И. Ньютоном:

$$\frac{T_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)}{T_2^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_0}\right)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (5.25)$$

где  $m_1, m_2$  – массы двух активно гравитирующих тел;  $m_0$  – масса притягивающего тела;  $a_1, a_2$  – большие полуоси орбит двух активно гравитирующих тел, а  $T_1, T_2$  – их периоды обращений.

## 6 Лекция № 6. Продолжительность перелета КА

**Содержание:** время перелета от перицентра до произвольной точки; уравнения Кеплера; методы решения уравнения Кеплера.

**Цель:** вычислить перелет от перицентра до произвольной точки, изучить уравнения Кеплера.

### 6.1 Время перелета от перицентра до произвольной точки

Время движения по кеплеровской орбите от ее перицентра до положения, характеризующегося значением  $\theta$  истинной аномалии, можно вычислить по формуле:

$$t - \tau = \sqrt{\frac{p^3}{K_0}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}, \quad (6.1)$$

где  $\tau$  – момент прохождения через перицентр.

Окончательный вид этого интеграла будет разным в зависимости от вида орбиты, т.е. от значений эксцентриситета:  $e < 1$ ,  $e = 1$ ,  $e > 1$ .

Эллиптическая орбита.

Введем в плоскости орбиты прямоугольную систему координат с началом в центре эллипса, направив ось абсцисс  $Ox$  вдоль линии апсид, а ось ординат  $y$  перпендикулярно ей, так чтобы система координат была правой.

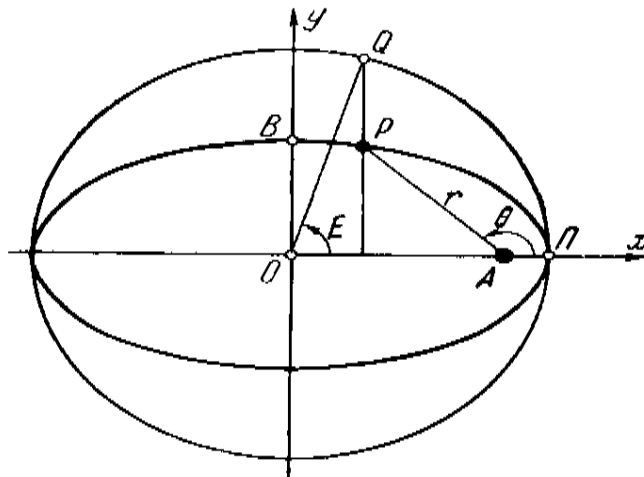


Рисунок 6.1 – Эксцентрисическая аномалия

В этой системе координат эллиптическая орбита может быть задана в параметрической форме с помощью уравнений

$$x = a(\cos E - e),$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (6.2)$$

где  $E$  – вспомогательная угловая величина, называемая *эксцентрической аномалией* движущейся точки.

Модуль радиус-вектора связан с эксцентрической аномалией соотношением

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (6.3)$$

Из (6.1) и (6.3) следует, что связь между эксцентрической аномалией  $E$ , которая соответствует данному значению истинной аномалии  $\theta$ , и временем движения от перицентра до точки орбиты с указанным значением  $\theta$  определяется *уравнением Кеплера*

$$E - e \sin E = M, \quad (6.4)$$

где

$$M = n(t - \tau). \quad (6.5)$$

$M$  называют *средней аномалией*, соответствующей данному значению  $\tau$ . Среднюю аномалию можно представить в момент  $t$  в виде:

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (6.6)$$

Здесь через  $M_0$  обозначена средняя аномалия в эпоху  $t_0$ :

$$M_0 = n(t_0 - \tau). \quad (6.7)$$

## 6.2 Уравнение Кеплера

Связь между истинной и эксцентрической аномалиями дается формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (6.8)$$

Гиперболическая орбита. Для случая гиперболического движения имеют место аналогичные формулы. Чтобы получить их, достаточно в формулах (2) —(4) заменить  $E$  на  $iH$ . После упрощений можно получить

$$x = |a|(e - chH), \quad (6.9)$$

$$y = |a|\sqrt{e^2 - 1}shH, \quad (6.10)$$

$$r = a(1 - echH), \quad (6.11)$$

$$eshH - H = n(t - \tau), \quad (6.12)$$

$$n = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}}, \quad (6.13)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}. \quad (6.14)$$

Параболическая орбита. В этом случае связь между истинной аномалией и временем принимает вид

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{p^3}}(t - \tau). \quad (6.15)$$

Это уравнение называется уравнением Баркера. Оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{3}(r + p)\sqrt{\frac{2r - p}{K}} = t - \tau. \quad (6.16)$$

Приближенные формулы. Приведем еще ряд формул, удобных при выполнении грубых оценок величин  $E$ ,  $r$  и др.

### 6.3 Методы решения уравнения Кеплера

Если время перелета спутника между двумя точками с известными величинами истинной аномалии вычисляется достаточно просто, то обратная задача, т. е. определение положения спутника в заданный момент времени, требует решения трансцендентного уравнения Кеплера или его аналогов для гиперболической и параболической орбит.

Сначала покажем, что для любого значения  $e$  из диапазона  $0 < e < 1$  уравнение Кеплера имеет одно и только одно решение. Будем считать, что средняя аномалия  $M$ , определяющая угол поворота радиуса-вектора спутника при движении с постоянной угловой скоростью может принимать любые значения в соответствии с изменением времени  $t$ . Используя уравнение Кеплера (6.4).

При движении материальной точки по почти круговой орбите, т. е. по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом, квадратом которого допустимо пренебречь, время движения от перицентра до точки орбиты с истинной аномалией  $V$  можно вычислять по следующей приближенной формуле:

$$t - \tau \approx \frac{T}{2\pi} (\vartheta - e \sin \vartheta), \quad (6.17)$$

где  $T$  — период обращения.

С той же степенью точности можно получить следующие формулы для вычисления  $E$ ,  $\vartheta$ ,  $r$  и др.:

$$E \approx M + e \sin M, \quad (6.18)$$

$$r \approx a(1 - e \cos M), \quad (6.19)$$

$$\vartheta \approx M + 2e \sin M, \quad (6.20)$$

$$V_r \approx nae \sin M, \quad (6.21)$$

$$V_p \approx na(1 + e \cos M). \quad (6.22)$$

Метод неподвижной точки. Если эксцентриситет кеплеровской эллиптической орбиты настолько мал, что его квадратом можно пренебречь (случай почти круговой орбиты), то для вычисления эксцентрической аномалии  $E$  (а также различных функций от  $E$ ) по данному значению средней аномалии  $M$  можно воспользоваться весьма простыми приближенными формулами, вытекающими из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (6.23)$$

## 7 Лекция № 7. Определения невозмущенной орбиты по заданным условиям движения

**Содержание:** определение орбиты по положению и скорости КА в начальный момент; определение орбиты по двум фиксированным положениям и фокальному параметру; дополнительные формулы для определения параметров орбит, эллиптическая орбита.

**Цель:** определить положение орбиты и скорости КА.

### 7.1 Определение орбиты по положению и скорости КА в начальный момент

Пусть в некоторый момент времени заданы координаты КА и проекции его скорости в экваториальной системе координат:  $t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ . Невозмущенная орбита определяется шестью элементами:  $e, P$  (или  $a$ ),  $i, \Omega, \beta, \tau$  (или  $M_0$ ). Большая полуось определяется по формуле:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{V_0^2}{K}, \quad (7.1)$$

$$\text{где } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Элементы  $p, i, \Omega$  найдем из системы:

$$\begin{aligned} \sqrt{Kp} \sin i \sin \Omega &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ \sqrt{Kp} \sin i \cos \Omega &= x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0, \\ \sqrt{Kp} \cos i &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Эксцентриситет можно определить из системы:

$$\begin{aligned} e \sin \theta_0 &= \sqrt{\frac{p}{K}} \dot{r}_0; \\ e \cos \theta_0 &= \frac{p - r_0}{r_0}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $\theta_0$  – истинная аномалия КА в момент  $t_0$ ,  $\dot{r}_0 = (x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0)/r_0$   
 Аргумент перицентра  $\beta$  найдем из

$$\beta = u_0 - \theta_0, \quad (7.4)$$

где  $u_0$  – аргумент широты (угол между радиус-вектором КА и направлением из центра координат в восходящий угол  $\Omega$ ) определяются из соотношений

$$r_0 \sin u_0 = z_0 \cos \epsilon, \quad (7.5)$$

$$r_0 \cos u_0 = x_0 \cos \Omega + y_0 \sin \Omega. \quad (7.6)$$

Время  $\tau$  прохождения КА находим через перицентр:

$$\tau = t_0 - \frac{M_0}{n}, \quad (7.7)$$

где  $M_0 = E_0 - e \sin E_0$  – средняя аномалия;

$n = \sqrt{Ka^{-3/2}}$  – среднее суточное движение;

$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$  – эксцентрическая аномалия.

## 7.2 Определение орбиты по двум фиксированным положениям и фокальному параметру

Пусть известны фокальный параметр орбиты  $P$  и два последовательных положения КА в моменты времени  $t_1 < t_2$ , т.е. радиус-векторы

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \\ \vec{r}_2 &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

заданы.

Если  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – истинная аномалия КА, соответственно, в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , при этом разность истинных аномалий  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  лежит в пределах  $0^\circ$  и

$90^\circ$ , то существует единственное решение, а при  $\Delta\theta > 90^\circ$  имеется несколько решений.

Определим разность истинных аномалий и модули векторов  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  из следующих формул:

$$r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad (v = 0, 1, 2); \quad \sigma = \frac{x_1 x_2 = y_1 y_2 = z_1 z_2}{r_1^2};$$

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1;$$

$$y_0 = y_2 - \sigma y_1;$$

$$z_0 = z_2 - \sigma z_1;$$

$$\sin \Delta\theta = \frac{r_0}{r_2}; \quad \cos \Delta\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}.$$

(7.9)

Элементы  $i, \Omega$  определим, рассматривая векторное произведение  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ :

$$|r_1 r_2| = r_1 r_2 \sin \Delta\theta;$$

$$|r_1 r_2| \sin i \sin \Omega = y_1 z_2 - z_1 y_2;$$

$$|r_1 r_2| \sin i \cos \Omega = x_1 z_2 - z_1 x_2;$$

(7.10)

$$|r_1 r_2| \cos i = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Эксцентриситет  $e$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  вычислим по формулам:

$$e \sin \theta_1 = q_1 \operatorname{ctg} \Delta\theta - q_2 \operatorname{cosec} \Delta\theta;$$

$$e \cos \theta_1 = q_1;$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta.$$

(7.11)

где

$$q_v = \frac{p}{r_v} - 1 \quad (v = 1, 2).$$

(7.12)



Большую полуось определим из уравнения орбиты

$$p = a(1 - e^2). \quad (7.13)$$

Аргумент перицентра  $\beta$  вычисляют для одного и того же момента времени  $t_1$

$$\beta = u_1 - \theta_1, \quad (7.14)$$

где  $u_1$  – аргумент широты (угол между радиус-вектором КА и направлением из центра координат в восходящий угол  $\Omega$ ) определяются из соотношений

$$r_1 \sin u_1 = z_1 \cos eci, \quad (7.15)$$

$$r_1 \cos u_1 = x_1 \cos \Omega + y_1 \sin \Omega. \quad (7.16)$$

Время прохождения  $\tau$  через перицентр (или среднюю аномалию) найдем, аналогично предыдущему случаю.

Контроль правильности вычислений проводят с помощью соотношений:

$$\cos^2 \Delta\theta + \sin^2 \Delta\theta = 1$$

или при малых  $\Delta\theta$

$$(r_0 r_1) = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}.$$

Если определены все элементы орбиты, тогда можно найти компоненты вектора скорости в любой точке орбиты:

$$\dot{x} = V_x = V_r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i) - V_u (\cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i);$$

$$\dot{y} = V_y = V_r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i) - V_u (\sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos u \cos i);$$

$$\dot{z} = V_z = V_r \sin u \sin i + V_u \cos u \sin i,$$

(7.17)

где

$$V_r = \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin \theta, \quad V_u = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 + e \cos \theta), \quad u = \beta + \theta. \quad (7.18)$$

Здесь  $\theta$  – истинная аномалия для расчетной точки.

### 7.3 Дополнительные формулы для определения параметров орбит. Эллиптическая орбита

Основными параметрами эллиптической орбиты являются большая и малая полуоси (рисунок 5.2). Для определения параметров эллиптической орбиты можно воспользоваться формулами:

$$a = \frac{p}{1-e^2}; \quad p = a(1-e^2) = \frac{2r_a r_\pi}{r_a + r_\pi}; \quad r_\pi = a - c = a(1-e);$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_\pi}{r_a + r_\pi}; \quad 1+e = \frac{p}{r_\pi}; \quad 1-e = \frac{p}{r_a};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{ap} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}};$$

$$V_\pi^2 = \frac{2K}{r_\pi} + h = \frac{2Kr_a}{r_\pi(r_a + r_\pi)}; \quad h = -\frac{2K}{r_\pi + r_a} = -\frac{K}{a};$$

$$V_\pi = \sqrt{\frac{K}{p}}(1+e) = \sqrt{\frac{Kp}{r_\pi^2}} = \sqrt{\frac{K}{r_\pi}} \sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_\pi}} = V_{kp}(r_\pi) \sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_\pi}}.$$

(7.19)

## Приложение А

### Справочный материал

Таблица 1 – Радиусы сфер действия планет Солнечной системы

№ п/п	Планета	Радиус сферы действия, млн. км
1	Меркурий	0,11
2	Венера	0,62
3	Земля	0,93
4	Марс	0,58
5	Юпитер	48,5
6	Сатурн	54,8
7	Уран	51,71
8	Нептун	86,9
9	Плутон	36,0

### Список литературы

1. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов: Учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2004. – 544 с.

2. Мамон П.А., Кульвиц А.В. Теория полета КА: Курс лекций. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2007. – 160 с.
3. Киладзе Р.И., Сочилина А.С. Теория движения геостационарных спутников. – СПб.: ООО «ВВМ», 2008. – 132 с.
4. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет: Учеб.пособие. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 672 с.
5. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов: Учебник для вузов. – М.:Изд-во БИНОМ, 2014. – 125 с.

Дополнительный план 2014г., поз. 30

Булат Джантемирович Хисаров  
Карлыга Сансызбаевна Жилисбаева  
Дана Толеубековна Тулекенова

## БАЛЛИСТИКА

Конспект лекций  
для студентов специальности  
5В074600 – Космическая техника и технологии

Редактор Н.М. Голева  
Специалист по стандартизации Н.Қ. Молдабекова

Подписано в печать \_\_. \_\_. \_\_.  
Тираж 50 экз.  
Объем 2,9 уч.-изд.л.

Формат 60x84 1/16  
Бумага типографская №  
Заказ \_\_\_\_ Цена 1450 тенге

Копировально-множительное бюро  
некоммерческого акционерного общества  
«Алматинский университет энергетики и связи»  
050013, Алматы, ул. Байтұрсынұлы, 126