Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра системы управления аэрокосмической техникой

БАЛЛИСТИКА

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ
для студентов специальности
5В074600 – Космическая техника и технологии

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛИ: Б.Д. Хисаров, К.С. Жилисбаева, Д.Т. Тулекенова. Баллистика. Методические указания по выполнению расчетно-графических работ по дисциплине для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии. – Алматы: АУЭС, 2014. – 23 с.

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ предназначены для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии, составлены на основании рабочей программы в помощь студентам при решении задач по баллистике и состоят из РГР №1 и РГР №2.

В каждом разделе приводятся методические указания к решению задач и задачи для самостоятельного решения.

Рецензент: ст.преп. каф. ТКС С.В. Самоделкина

Печатается по дополнительному плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014 г.

Содержание

Введение

Методические указания по выполнению расчетно–графических работ предназначены для анализа и подробного изучения наиболее важных и необходимых разделов баллистики, приобретение навыков применения методов и практических основ курса при решении задач.

Цель предлагаемого методического указания по выполнению расчетно –графических работ–содействовать закреплению полученных знаний, сознательному их усвоению и осмысленному применению при решении практических задач, развитию навыков самостоятельной работы.

В каждом разделе приведены необходимые методические указания к решению задач, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

1 Расчетно-графическая работа № 1. Координаты тела в невозмущенном кеплеровском движении. Теория Ньютонского потенциала. Первые интегралы задачи двух тел

1.1 Методические указания к решению задач

Пример 1. Автоматическая межпланетная станция АМС в некоторый момент времени t_0 находилась на гелиоцентрическом расстоянии, равном $3\cdot10^8$ км, и имела истинную аномалию $\upsilon=45^0$. Известны следующие эклиптические элементы орбиты АМС: $e=0,7$, $\Omega=150^0$, $\omega=90^0$, $i=60^0$. Вычислите компоненты радиуса-вектора и вектора скорости АМС в эклиптической системе координат в указанный момент времени.

Решение: компоненты радиуса-вектора r определим по формуле перехода от орбитальных координат (ξ, η, ζ) произвольной точки (необязательно лежащей в плоскости орбиты) к ее прямоугольным координатам (x, y, z) выполняют по формулам:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} \xi \\ \zeta \\ \eta \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} r\cdot Cos\,\upsilon \\ r\cdot Sin\,\upsilon \\ 0 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица B имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & Q_z \end{vmatrix} \qquad (2)$$

а проективные коэффициенты R_x, R_y, R_z равны:

$$R_x = Sin\,\Omega\, Sin\, i; \qquad (3)$$

$$R_y = -\,Cos\,\Omega\, Sin\, i;$$

$$R_z = Cos\, i.$$

Проективные множители P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z задаются формулами:

$$P_x = Cos\,\Omega\, Cos\,\omega - Sin\,\Omega\, Sin\,\omega\, Cos\, i;$$

$$P_y = Sin\,\Omega\, Cos\,\omega + Cos\,\Omega\, Sin\,\omega\, Cos\, i;$$

$$P_z = \mathrm{Sin}\, i\, \mathrm{Sin}\, \omega; \qquad (4)$$
$$Q_x = -\mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, \omega - \mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, \omega\, \mathrm{Cos}\, i;$$
$$Q_y = -\mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, \omega + \mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, \omega\, \mathrm{Cos}\, i;$$
$$Q_z = \mathrm{Sin}\, i\, \mathrm{Cos}\, \omega.$$

Для этого, прежде всего, необходимо вычислить компоненты матрицы В по (2) и (4):

$$P_x = \mathrm{Cos}\, 150^0\, \mathrm{Cos}\, 90^0 - \mathrm{Sin}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 90^0\, \mathrm{Cos}\, 60^0 = -0{,}25;$$
$$P_y = \mathrm{Sin}\, 150^0\, \mathrm{Cos}\, 90^0 + \mathrm{Cos}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 90^0\, \mathrm{Cos}\, 60^0 = -0{,}433;$$
$$P_z = \mathrm{Sin}\, 60^0\, \mathrm{Sin}\, 90^0 = 0{,}866;$$
$$Q_x = -\mathrm{Cos}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 90^0 - \mathrm{Sin}\, 150^0\, \mathrm{Cos}\, 90^0\, \mathrm{Cos}\, 60^0 = 0{,}866;$$
$$Q_y = -\mathrm{Sin}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 90^0 + \mathrm{Cos}\, 150^0\, \mathrm{Cos}\, 90^0\, \mathrm{Cos}\, 60^0 = -0{,}500;$$
$$Q_z = \mathrm{Sin}\, 60^0\, \mathrm{Cos}\, 90^0 = 0;$$
$$R_x = \mathrm{Sin}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 60^0 = 0{,}433;$$
$$R_y = -\mathrm{Cos}\, 150^0\, \mathrm{Sin}\, 60^0 = -0{,}750;$$
$$R_z = \mathrm{Cos}\, 60^0 = 0{,}500.$$

Для контроля вычислений используем соотношения:

$$P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2} = Q_x^{\,2} + Q_y^{\,2} + Q_z^{\,2} = 1;$$
$$P_x \cdot Q_x + P_y \cdot Q_y + Pz \cdot Qz = 0;$$
$$-0{,}25^2 + -0{,}433^2 + 0{,}866^2 = 0{,}866^2 + -0{,}500^2 + 0^2 = 0{,}9999 \approx 1;$$
$$-0{,}25 \cdot 0{,}866 + (-0{,}433)\cdot(-0{,}500) + 0{,}866 \cdot 0 = 0.$$

Вычисляем значение определителя матрицы В любым известным способом:

$$B = \begin{vmatrix} -0{,}25 & 0{,}866 & 0{,}433 \\ -0{,}433 & -0{,}500 & -0{,}750 \\ 0{,}866 & 0 & 0{,}500 \end{vmatrix} = -0{,}125.$$

Находим компоненты радиуса-вектора

$$x = -0{,}125 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \mathrm{Cos}\, 45^0 = -0{,}266 \cdot 10^8 \text{ км},$$
$$y = -0{,}125 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \mathrm{Sin}\, 45^0 = -0{,}266 \cdot 10^8 \text{ км},$$

$$z = 0.$$

Теперь можно найти компоненты вектора скорости V как производную компонент радиус-вектора (3):

$$V = B\left\{ \begin{vmatrix} -\operatorname{Sin} \upsilon \\ \operatorname{Cos} \upsilon \\ 0 \end{vmatrix} r\cdot\partial\upsilon/\partial r + \begin{vmatrix} \operatorname{Cos} \upsilon \\ \operatorname{Sin} \upsilon \\ 0 \end{vmatrix} \partial r/\partial\upsilon \right\}$$

тогда с учетом формул радиальных V_r и поперечных $V_п$ компонент скорости соответственно равен (где $V_r = e\cdot\operatorname{Sin} \upsilon\cdot\sqrt{(K/p)}$; $V_п = (1 + e\cdot\operatorname{Cos} \upsilon)\cdot\sqrt{(K/p)}$):

$$V = B\left\{ \begin{matrix} -(\sqrt{(K\cdot p)}\cdot\operatorname{Sin} \upsilon/r) + \sqrt{(K/p)}\cdot e\cdot\operatorname{Sin} \upsilon\cdot\operatorname{Cos} \upsilon \\ (\sqrt{(K\cdot p)}\cdot\operatorname{Cos} \upsilon)/r + \sqrt{(K/p)}\cdot e\cdot\operatorname{Sin}^2 \upsilon \\ 0 \end{matrix} \right\}.$$

Гравитационный параметр Солнца равен $K_C=132{,}51\cdot10^9$ км^3/с^2, а фокальный параметр p орбиты найдем, используя формулу (11):

$$p = r_0\cdot(1 + e\cdot\operatorname{Cos} \upsilon_0)/(1 - e^2) = 3\cdot10^8\cdot(1 + 0{,}7\cdot\operatorname{Cos} 45^0)/(1 – 0{,}7^2) = 8{,}79\cdot10^8 \text{ км}.$$

Вычислим компоненты вектора скорости

$V_x = -(\sqrt{(132{,}51\cdot10^9\cdot8{,}79\cdot10^8})\cdot\operatorname{Sin} 45^0/3\cdot10^8 +\sqrt{(132{,}51\cdot10^9/8{,}79\cdot10^8)}\cdot0{,}7\cdot\operatorname{Sin} 45^0\cdot\operatorname{Cos} 45^0 =2{,}653$ км/с;

$V_y = \sqrt{(132{,}51\cdot10^9\cdot8{,}79\cdot10^8})\cdot\operatorname{Cos} 45^0/3\cdot10^8 +\sqrt{(132{,}51\cdot10^9/8{,}79\cdot10^8)}\cdot 0{,}7\cdot\operatorname{Sin}^2 45^0 = 3{,}731$ км/с;

$V_z = 0.$

Пример 2. Найти скорость, с которой нужно вывести спутник Земли на круговую орбиту на высоту 1600 км над поверхностью Земли. Радиус Земли принять 6400 км, ускорение у поверхности Земли 9,8 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: на высоте H над поверхностью Земли на спутник действует сила тяготения:

$$F = \frac{g\cdot M\cdot m}{2(R_З + H)}. \qquad (1)$$

Так как спутник вращается по круговой орбите радиуса $R_З + H$, то сила F сообщает ему центростремительное ускорение:

$$a_{ц.с} = \frac{v^2}{R_З + H} \quad . \tag{2}$$

По второму закону Ньютона:

$$\frac{g \cdot M \cdot m}{2(R_З + H)} = m \cdot a_{ц.с} \tag{3}$$

откуда

$$a_{ц.с} = \sqrt{\frac{g \cdot M}{R_З + H}} \, . \tag{4}$$

У поверхности Земли сила тяжести

$$F = \frac{g \cdot M \cdot m}{R_З^{\ 2}} \tag{5}$$

сообщает телу массой m ускорение g .

Отсюда

$$g \cdot M = g \cdot R_З^{\ 2} \, . \tag{6}$$

Окончательно,

$$v = R_З \sqrt{\frac{g}{R_З + H}} = 7{,}1 \text{ км/с.} \tag{7}$$

Пример 3. Найти гравитационное ускорение, сообщаемое Юпитером своему второму галилеевому спутнику Европе, находящемуся от планеты на среднем расстоянии $670{,}9 \cdot 10^3$ км. Масса Юпитера в 318 раз больше земной массы, а средний радиус Земли равен 6371 км.

Решение: по формулу (1) находим искомое ускорение, g_0 = 9,81 м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Тогда

$$g_r = g_0 \frac{M}{r^2} .$$

Причем r выражено в радиусах Земли, а масса M — в массах Земли. Поскольку средний радиус Земли R_0 = 6371 км, то искомое гравитационное ускорение

$$g_r = 9{,}81\frac{318}{(\frac{670{,}9\cdot 10^3}{6371})^2} = 0{,}281 м/с\ .$$

Пример 4**.** С каким периодом должен вращаться космический корабль диаметром 6м., чтобы космонавт чувствовал себя как в поле тяготения Луны, находясь на ее поверхности. Известны отношения масс, радиусов Земли и Луны (81 и 11/3 соответственно). Ускорение свободного падения на поверхности Земли считать известным.

Решение: во вращающемся космическом корабле возникает сила F, прижимающая космонавта в направлении от оси вращения к стенке корабля.

Эта сила-есть результат ускоренного движения системы и связана с центростремительным ускорением знаком минус F =-ma, где m - масса космонавта, a - центростремительное ускорение, равное w^2r. Через диаметр выражение для F примет вид

$$F = \frac{(m\omega^2 D)}{2}.$$

В том случае, если космонавт находится в поле силы тяжести спутника Земли, последняя может быть представлена через ускорение свободного падения на поверхности Луны g'. $F=mg'$. Связывая два соотношения для силы F, будем иметь

$$\frac{m\omega^2 D)}{2} = mg',\ \text{откуда}\ g' = \frac{4\pi^2 D}{T^2 2}.$$

В условии задачи известны отношения масс, радиусов планеты и спутника, а потому ускорение свободного падения на поверхности Луны найдется из отношения следующих выражений:

$$g = \frac{GM_З}{R_З^{\ 2}};\quad g' = \frac{GM_Л}{R_Л^{\ 2}};$$

$$g' = \frac{GM_Л g}{R_Л^{\ 2}} : \frac{GM_З}{R_З^{2}} = \frac{R_З^{\ 2} M_Л g}{R_Л^{\ 2} M_З};$$

$$\frac{4\pi^2 D}{T^2 2} = \frac{R_З^{\ 2} M_Л}{R_Л^{\ 2} M_З} g \Rightarrow T = \frac{R_Л^2 \pi}{R_З^2}\sqrt{\frac{2DM_З}{M_Л g}}.$$

После подстановки данных

$$T = \frac{3{,}14 R_Л 3}{11 R_З}\sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 81}{9{,}8}} \approx 114{,}66(с) \approx 1{,}9(мин).$$

Пример 5. Космический зонд на геоцентрическом расстоянии 320000 км имел скорость 2,31 км/с. Какую скорость имел зонд на расстоянии 230 км от поверхности Земли?

Решение: рассматриваем движение зонда в поле тяготения Земли, поэтому гравитационный параметр К будет равен

$$\mu_З = f \cdot m_З = 398{,}60 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2 .$$

Из интеграла энергии (2.4) вычислим h постоянную энергии

$$h = V^2 - 2\mu/r = 2{,}31^2 - 2 \cdot 398{,}60 \cdot 10^3/320 \cdot 10^3 = 2{,}85 \text{ км}^2/\text{с}^2.$$

Используя интеграл энергии и вычисленное значение h постоянной энергии, вычислим скорость зонда на геоцентрическом расстоянии r, которое равно сумме радиуса Земли и заданного расстояния 230 км от поверхности Земли

$$r = 230 \text{ км} + R_З = 230 + 6371 = 6601 = 6{,}601 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Тогда

$$V^2 = 2K/r + h = 2 \cdot 398{,}60 \cdot 10^3/6{,}601 \cdot 10^3 + 2{,}85 = 123{,}6 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$V = 11{,}12 \text{ км/с}.$$

1.2 Расчетные задания

1. Известны элементы орбиты ИСЗ относительно геоцентрической экваториальной системы координат: a=7000 км, e=0,2, i=60^0, Ω=90°, ω=45°. По этим данным вычислите декартовые экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите также экваториальные сферические координаты перигея орбиты ИСЗ радиус-вектор r, прямое восхождение α и склонение δ.

2. Космический корабль движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, имеющей следующие эклиптические элементы: a=3 а.е., e=0,4, i=60^0, Ω=120°, ω=90°, t_0=1992, янв. $5{,}12^h23^m$ UT. Какими были в эклиптической системе отсчета прямоугольные координаты корабля за 30 суток перед его прохождением через перигелий орбиты.

3. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a=4 \cdot R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,3, i=65^0, Ω=40°, ω=50°, t_0=1992, янв. $4{,}4^h20^m$ UT. Какие прямоугольные координаты имел спутник в экваториальной системе отсчета в момент 1992, янв. $4{,}9^h20^m$ UT.

4. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a = 4 \cdot R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,2, i=65^0, Ω=60°, ω=120°, t_0=1992, июнь $3{,}12^h10^m$ UT. Вычислите, когда спутник в последний раз перед указанным моментом прошел через восходящий узел своей орбиты и когда он после этого момента впервые прошел через нисходящий узел орбиты.

5. Космический корабль движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, имеющей следующие эклиптические элементы: a=3 а.е., e=0,6, $i=30^0$, Ω=180°, ω=60°, t_0=1995, февр. $5{,}12^h23^m$ UT. Какими были в эклиптической системе отсчета прямоугольные координаты корабля за 30 суток перед его прохождением через перигелий орбиты.

6. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a=4{\cdot}R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,8, $i=70^0$, Ω=50°, ω=60°, t_0=1895, янв. $5{,}3^h30^m$ UT. Какие прямоугольные координаты имел спутник в экваториальной системе отсчета в момент 1895, янв. $5{,}3^h30^m$ UT.

7. Известны элементы орбиты ИСЗ относительно геоцентрической экваториальной системы координат: a=8000 км, e=0,6, $i=50^0$, Ω=80°, ω=60°. По этим данным вычислите декартовые экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите также экваториальные сферические координаты перигея орбиты ИСЗ радиус-вектор r, прямое восхождение α и склонение δ.

8. Космический корабль движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, имеющей следующие эклиптические элементы: a=2 а.е., e=0,6, $i=90^0$, Ω=140°, ω=60°, t_0=1992, янв. $5{,}12^h23^m$ UT. Какими были в эклиптической системе отсчета прямоугольные координаты корабля за 30 суток перед его прохождением через перигелий орбиты.

9. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a=4{\cdot}R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,7, $i=60^0$, Ω=60°, ω=70°, t_0=1897, янв. $3{,}4^h20^m$ UT. Какие прямоугольные координаты имел спутник в экваториальной системе отсчета в момент 1897, янв. $3{,}9^h20^m$ UT.

10. Известны элементы орбиты ИСЗ относительно геоцентрической экваториальной системы координат: a=9000 км, e=0,7, $i=60^0$, Ω=70°, ω=90°. По этим данным вычислите декартовые экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите также экваториальные сферические координаты перигея орбиты ИСЗ радиус-вектор r, прямое восхождение α и склонение δ.

11. Определить ускорение свободного падения на поверхности планет Марса и Венеры, а также астероида Цереры. Массы и радиусы в сравнении с земными: у Марса — 0,107 и 0,533, у Венеры — 0,815 и 0,950, у Цереры — $28{,}9 \cdot 10^{-5}$ и 0,0784.

12. Масса Луны в 81,3 раза, а диаметр в 3,67 раза меньше земных. Во сколько раз вес астронавтов был меньше на Луне, чем на Земле?

13. Чему равно ускорение свободного падения на поверхности Солнца и Сатурна, радиусы которых больше земного в 109,1 и 9,08 раза, а средняя плотность в сравнении с земной составляет 0,255 и 0,127?

14. Какое ускорение свободного падения было бы на поверхности Земли и Марса, если бы при неизменной массе их диаметры увеличились вдвое и втрое? Сведения о Марсе см. в задаче 1.

15. Как изменилось бы ускорение свободного падения на поверхности планеты при увеличении ее массы в m раз, а средней плотности в n раз и, в частности, при m=n?

16. Космический аппарат на расстоянии 415 км от поверхности Марса имеет скорость 6,8 км/с. Найдите постоянную энергии, если отношение масс Солнца и Марса составляет $3090 \cdot 10^3$, а радиус Марса равен 3407 км. (При решении используйте соотношение $\frac{\mu_З}{\mu_Ю} = \frac{M_З}{M_Ю}$).

17. Каким стало бы ускорение свободного падения на поверхности Солнца, если бы при той же массе оно увеличилось в диаметре до размеров земной орбиты? Масса Солнца в 333 тыс. раз больше земной, а его диаметр равен 1392000 км.

2 Расчетно-графическая работа № 2. Скорость КА. Орбита КА. Продолжительность перелета КА

2.2 Методические указания к решению задач

Положение тела на эллиптической орбите.

В астрономии, так и в астродинамике часто встречаются следующие 2 задачи:

1) определить положение и скорость тела по заданным элементам и времени;

2) определить элементы орбиты по заданным положению, скорости и времени.

Пример второй задачи: с Земли на орбиту вокруг солнца запускается космический аппарат, причем известны его положение и скорость в момент запуска; требуется определить элементы эллиптической орбиты a, e и τ. Пример первой задачи: требуется найти положение тела спустя некоторое время после того, как оно было запущено на орбиту вокруг Солнца(элементы орбиты известны).

Ниже приводятся формулы, которые используются при решении этих задач:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}; \tag{1}$$

$$r = a(1-e\cos E); \tag{2}$$

$$tg(\frac{f}{2}) = (\frac{1+e}{1-e})^{\frac{1}{2}} \cdot tg(\frac{E}{2}); \tag{3}$$

$$M = E - e\sin E; \tag{4}$$

$$M = n(t - \tau); \tag{5}$$

$$h^2 = \mu a(1 - e^2); \tag{6}$$

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right); \tag{7}$$

$$T = \frac{2\pi}{n}; \tag{8}$$

$$n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{-3}{2}}; \tag{9}$$

$$\sin\varphi = \left[\frac{a(1-e^2)}{r(2a-r)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Заметим, что в этих формулах a, e и τ – три элемента эллиптической орбиты. Предполагается, что μ известно. Если заданы эти элементы и время, то положение и скорость тела на орбите могут быть найдены следующим образом:

1) Из уравнения (9) находим n: $n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{-3}{2}}$.
2) Подставляя n в (5), определяем M: $M = \mu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{-3}{2}}(t - \tau)$.
3) Решая уравнение Кеплера (4), находим E: $M = E - e\sin E$.
4) Из (4) получаем r: $r = a(1 - e\cos E)$.
5) Значение r можно проверить, вычислив его независимо при помощи (1) и (3):

$$tg\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot tg\left(\frac{E}{2}\right);$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos f}.$$

6) Из уравнения (7) вычисляем V:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

$$V = \sqrt{\mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}.$$

7) Из (10) вычисляем φ :

$$\sin\varphi = \left[\frac{a(1-e^2)}{r(2a-r)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В другой задаче, когда предполагается, что заданы величины r, φ, t, и μ, последовательность действий следующая:

1) Из уравнения (5) вычисляем a:

$$V^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}),$$

2) Из (10) получаем e:

$$\sin\varphi = \left[\frac{a(1-e^2)}{r(2a-r)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3) Из (2) получаем E:

$$r = a(1 - e\cos E).$$

4) Для вычисления ƒ используем выражение (1):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}.$$

5) Проверяем ƒ, вычислив его независимо при помощи уравнения (3):

$$tg(\frac{f}{2}) = (\frac{1+e}{1-e})^{\frac{1}{2}} \cdot tg(\frac{E}{2}).$$

6) Находим M из уравнения (2):

$$M = E - e\sin E.$$

7) Находим τ из (3):

$$M = n(t-\tau);$$

$$\tau = \frac{M - nt}{n}.$$

Пример 2. Высота ИСЗ в перигее составляет 680 км, а в апогее 2120 км. Найдите минимальную и максимальную скорость движения спутника по орбите.

Решение: материальная точка, движущаяся по кеплеровской орбите, имеет максимальную скорость в перицентре орбиты

$$V^2_{мах} = (1 + e^2 + 2\cdot e\cdot Cos\ 0^0)\cdot K/p = (1 + e^2 + 2\cdot e)\cdot K/p = (1 + e)^2\cdot K/p,$$

$$V_{мах} = (1 + e)\cdot\sqrt{}K/p.$$

Минимальную скорость материальная точка имеет в апоцентре своей орбиты

$$V^2_{мин} = (1 + e^2 + 2\cdot e\cdot Cos\ 180^0)\cdot K/p = (1 + e^2 - 2\cdot e)\cdot K/p = (1 - e)^2\cdot K/p,$$

$$V_{мин} = (1 - e)\cdot\sqrt{}K/p.$$

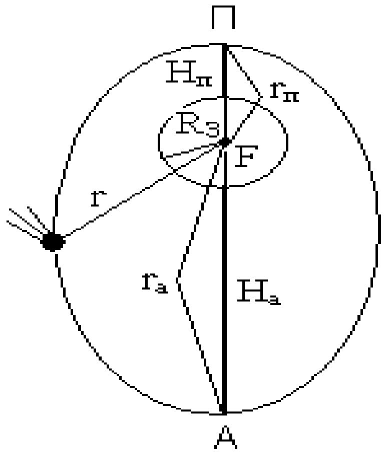

Рисунок 1- Элементы орбиты ИСЗ

где $Н_п$, $Н_а$ – высота спутника от поверхности планеты в перицентре и апоцентре.

Чтобы найти фокальный параметр p и эксцентриситет e орбиты, определим значение большой полуоси как:

$$a = (r_п + r_a)/2,$$

где геоцентрическое расстояние в перицентре и апоцентре

$$r_п = R_З + H_п = 6371 + 680 = 7051\ км,\ \ r_a = R_З + H_a = 6371 + 2120 = 8491\ км,$$

$$a = (7051 + 8491)/2 = 7771\ км;$$

параметры орбиты

$$e = 1 - (r_n/a\ ) = 0{,}093p = a(1 – e^2) = 17311\cdot 0{,}652 = 7703{,}8\ км.$$

Находим максимальную и минимальную скорости ИСЗ:

$$V_{мах} = (1 + 0,093)\cdot\sqrt{}398,60\cdot10^3/7,703\cdot10^3 = 7,26 \text{ км/с};$$

$$V_{мин} = (1 - 0,093)\cdot\sqrt{}398,60\cdot10^3/7,703\cdot10^3 = 6,52 \text{ км/с}.$$

Пример 3. Спутник притягивающего центра находится в точке орбиты с истинной аномалиейv.Известна, кроме того, круговая скорость $V_{кр}$ в этой точке и эксцентриситет орбиты *е*. Какую скорость имеет спутник в рассматриваемый момент?

Решение:

$$v_{kp} = \sqrt{\frac{k}{r}};\ \ v_{kp}^2 = \frac{k}{r},\quad r = \frac{P}{1 + ecos\theta},$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{P}}(1 + ecos\theta),\quad v = \sqrt{\frac{k}{p} * (1 + e^2 + 2ecos\theta)},$$

$$r = \frac{k}{v_{kp}^2}\frac{k}{v_{kp}^2} = \frac{P}{1+ecos\theta},$$

$$v = v_{kp}\sqrt{\frac{1 + e^2 + 2ecos\theta}{1 + ecos\theta}} = v_{kp}\sqrt{\frac{1 + e(e + cos\theta)}{1 + ecos\theta}}.$$

Пример 4. Спутник Венеры находится на орбите в точке, истинная аномалия которой равна $112,4^0$. Известна круговая скорость спутника для этого момента 8,3 км/с. Найдите скорость спутника по орбите в заданный момент. Эксцентриситет орбиты равен 0,23, а гравитационный параметр Венеры составляет $32,6\cdot10^3$ км^3/с^2.

Решение: находим скорость спутника, для этого необходимо найти величину радиус- вектора r и большой полуоси *a* орбиты спутника. Величину r найдем через круговую скорость:

$$r = K/\ V^2_{кр} = 32,6\cdot10^3/8,3^2 = 473 \text{ км}.$$

Значение большой полуоси определим

$$r = a(1 – e^2)\ /(1 + e\cdot\cos \upsilon),$$

тогда

$$a = r\cdot(1 + e\cdot\mathrm{Cos}\ \upsilon)/(1 - e^2) = 470\cdot(1 + 0{,}23\cdot\mathrm{Cos}\ 112{,}4^0)/(1 - 0{,}23^2) = 511{,}19/0{,}947 = 539{,}8\ \text{км}.$$

Вычислим скорость спутника в заданной точке орбиты

$$V^2 = K(2/r - 1/a) = 32{,}6\cdot10^3(2/470 - 1/539{,}8) = 77{,}45\ \text{км}^2/\text{с}^2,$$

$$V = \sqrt{77{,}45} = 8{,}8\ \text{км/с}.$$

Пример 5. ИСЗ имеет следующие параметры орбиты: эксцентриситет равен 0,5, а большая полуось – 10^5 км. Требуется рассчитать значения эксцентрической и истинной аномалий и высоту ИСЗ над поверхностью Земли через 50 мин после прохождения спутником перигея.

Решение: задача решается через уравнение Кеплера (6.22). Поэтому вычислим, прежде всего, значение средней аномалии M, в которой t – это время, истекшее после прохождения спутником перигея t_0, в нашем случае разница $t - t_0$ = 50 мин = 3000 с и вычисляем среднюю угловую скорость:

$$n = \sqrt{K/a^3} = (1/a)\cdot\sqrt{K/a} = 1/10^5\cdot\sqrt{(398{,}60\cdot10^3/10^5)} = 1{,}99\cdot10^{-5}\ \text{рад}\cdot\text{с}^{-1};$$

$$M = n\cdot(t - t_0) = 1{,}99\cdot10^{-5}\cdot3000 = 0{,}0597 \approx 0{,}06\ \text{рад}.$$

Значение эксцентрической аномалии E находим, решая уравнение Кеплера методом последовательных приближений с точностью 0,01 (48):

$$E_0 = 0;$$
$$E_1 = M = 0{,}06\ \text{рад};$$
$$E_2 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}090\ \text{рад};$$
$$E_3 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}090 + 0{,}06 = 0{,}105\ \text{рад};$$
$$E_4 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}105 + 0{,}06 = 0{,}112\ \text{рад};$$
$$E_5 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}112 + 0{,}06 = 0{,}116\ \text{рад};$$
$$E_6 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}116 + 0{,}06 = 0{,}119\ \text{рад};$$
$$E_7 = 0{,}5\cdot Sin\ 0{,}119 + 0{,}06 = 0{,}119\ \text{рад};$$
$$E = 0{,}119\ \text{рад} = 6{,}82^0.$$

Истинная аномалия υ связана с эксцентрической аномалией E:

$$tg\ \upsilon/2 = tg\ (0{,}119/2)\cdot\sqrt{(1 + 0{,}5)/(1 - 0{,}5)} = 0{,}103;$$

$$\upsilon = 0{,}205 \text{ рад} = 11{,}8^0.$$

Чтобы определить высоту ИСЗ над поверхностью Земли в заданный момент времени, найдем геоцентрическое расстояние r в этот момент времени

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \text{Cos } E) = 10^5 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \text{Cos } 0{,}119) = 50354 \text{ км}.$$

Тогда высоту H над поверхностью Земли спутника в заданный момент времени найдем, вычитая из величины r значение радиуса Земли 6371 км

$$H = 50354 - 6371 = 43983 \text{ км}.$$

Пример 5. КА при выходе на эллиптическую орбиту относительно Земли в перигее на высоте 230 км имел скорость 10,9 км/с. Найдите время полета КА до орбиты Луны, если геоцентрический радиус лунной орбиты равен 384400 км .

Решение: время перелета от перицентра орбиты до любой другой точки определяется как $(t - t_0)$. Прежде всего, необходимо предварительно вычислить параметры орбиты КА a и e, n. Геоцентрическое расстояние $r_п$ КА в перицентре находим с учетом радиуса Земли как $r_п = 6371+230 = 6601$ км. Значение большой полуоси a определим из интеграла энергии

$$a = r_п/(2 - r_п \cdot V^2/K) = 6601/(2 - 6601 \cdot 10{,}9^2/398{,}60 \cdot 10^3) = 206281 \text{ км}.$$

Вычислим эксцентриситет орбиты

$$e = 1 - r_п / a = 1 - 6601/206281 = 0{,}968.$$

Значение среднего суточного движения n будет равно

$$n = \sqrt{}K/a^3 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Значение эксцентрической аномалии E находим для точки выхода КА на лунную орбиту, то есть для момента, когда геоцентрическое значение r радиуса-вектора спутника равно 384400 км. Определим значение E:

$$\text{Cos } E = (a - r)/(a \cdot e) = (206281 - 384400)/(206281 \cdot 0{,}968) = - 0{,}892;$$

$$\text{Cos } E = - 0{,}892;$$

$$E = 153{,}1^0 = 2{,}673 \text{ рад};$$

$$\sin E = 0{,}452.$$

Тогда имеем время перелета КА до лунной орбиты

$$(t - t_0) = (E - e\cdot\sin E)/n = (2{,}673 - 0{,}968\cdot 0{,}452)/\ 2\cdot 10^{-6} = 1{,}12\cdot 10^{6}\ \text{с} = 13\ \text{суток}.$$

2.2 Расчетные задания

1. Среднее расстояние Нептуна от Солнца составляет 30,1 а.е., а среднее расстояние Плутона от Солнца равно 39,5 а.е. Эксцентриситеты орбит Нептуна и Плутона соответственно равны 0,009 и 0,25. Какая из этих двух планет ближе подходит к Солнцу?

2. Над каким полушарием - северным или южным - больше времени находился первый искусственный спутник Земли в течение первых его оборотов вокруг Земли (перигей находился над некоторой точкой северного полушария).

3. Перигелийное и афелийное расстояния орбиты кометы соответственно равны 1,4 а.е. и 33,5 а.е. Определите размер и форму орбиты кометы относительно Солнца.

4. Космический аппарат движется по гиперболической орбите. Угол между асимптотами орбиты равен $\alpha = 60°$. Найдите эксцентриситет орбиты.

5. Спутник Юпитера движется по орбите с фокальным параметром 25000 км. Определите значение постоянной площадей и ее размерность (используйте соотношения, полученные в примере 2).

6. Большая полуось орбиты Земли в движении вокруг Солнца равна $149{,}6\cdot 10^{6}$ км. Вычислите наименьшее и наибольшее гелиоцентрическое расстояние Земли, если эксцентриситет ее орбиты составляет 0,01679.

7. Постоянная живых сил движущегося вокруг Сатурна спутника равна -0,5 км^2/с^2. Вычислите большую полуось кеплеровской орбиты спутника планеты, если гравитационный параметр Сатурна составляет $37{,}86\cdot 10^{6}$ км^3/с^2.

8. Космическое тело находится на гелиоцентрическом расстоянии $149{,}6\cdot 10^{6}$ *км.* Вычислите круговую и параболическую скорости относительно Солнца на указанном расстоянии.

9. Спутник притягивающего центра находится в точке орбиты с истинной аномалией v. Известна, кроме того, круговая скорость $V_{кр}$ в этой точке и эксцентриситет орбиты *e.* Какую скорость имеет спутник в рассматриваемый момент?

10. Большая полуось орбиты кометы равна 5,5 а.е., а ее эксцентриситет 0,86. Как близко комета подходит к Солнцу и какую при этом имеет гелиоцентрическую скорость?

11. Высота ИСЗ в перигее составляет 680 км, а в апогее 2120 км. Найдите минимальную и максимальную скорость движения спутника по орбите.

12. Большая полуось орбиты кометы равна 5,5 а.е., а ее эксцентриситет 0,86. Как близко комета подходит к Солнцу и какую при этом имеет гелиоцентрическую скорость?

13. Найдите круговую, параболическую, максимальную и минимальную гелиоцентрические скорости движения Земли.

14. Если космическая ракета на высоте 230 км над земной поверхностью получит в направлении, перпендикулярном ее геоцентрическому радиусу-вектору, скорость 10 км/с, то апогей орбиты ракеты окажется примерно на геоцентрическом расстоянии 370000 км. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

15. ИСЗ в 10 часов в апогее имеет высоту 1636 км и скорость 7,7 км/с. Найдите на каком расстоянии от центра Земли будет находиться ИСЗ в 22 часа того же дня.

16. Автоматическая станция обращается вокруг Земли по орбите, максимальное расстояние которой от центра Земли составляет 700000 км, а минимальное – 90000 км. На каком геоцентрическом расстоянии будет находиться станция через двое суток после прохождения перигея орбиты.

17. ИСЗ имел перигей на расстоянии 6600 км от центра Земли. Спутник прошел перигей орбиты в 4 часа по московскому времени. В 5 часов 20 мин было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента эксцентрическую аномалию спутника, его истинную аномалию и высоту над поверхностью Земли.

18. ИСЗ имел максимальную высоту 1927 км, а минимальную – 877 км. Найдите расстояние ИСЗ от центра Земли и его среднюю суточную скорость для момента, когда истинная аномалия ИСЗ равна 154°.

Приложение А

Справочный материал

	Планета	Радиус сферы действия, млн. км
1	Меркурий	0,11
2	Венера	0,62
3	Земля	0,93
4	Марс	0,58
5	Юпитер	48,5
6	Сатурн	54,8
7	Уран	51,71
8	Нептун	86,9
9	Плутон	36,0

Таблица 1 – Радиусы сфер действия планет Солнечной системы

Список литературы

1. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов: Учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2004. – 544 с.

2. Мамон П.А., Кульвиц А.В. Теория полета КА: Курс лекций. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2007. – 160 с.

3. Киладзе Р.И., Сочилина А.С. Теория движения геостационарных спутников. – СПб.: ООО «ВВМ», 2008. – 132 с.

4. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет: Учеб.пособие. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 672 с.

5. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов: Учебник для вузов. – М.:Изд-во БИНОМ, 2014. – 125 с.

Дополнительный план 2014г., поз. 27

Булат Джантемирович Хисаров
Карлыга Сансызбаевна Жилисбаева
Дана Толеубековна Тулекенова

БАЛЛИСТИКА

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ
для студентов специальности
5В074600 – Космическая техника и технологии

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.Қ. Молдабекова

Подписано в печать__. __. __.
Формат 60х84 1/ 16
Тираж 50 экз.
Бумага типографская №
Объем 1,4 уч.-изд.л.
Заказ ___ Цена 700 тенге

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»

050013, Алматы, ул. Байтұрсынұлы, 126