Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра электроники

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Конспект лекций для студентов
специальности 5В071600 - Приборостроение

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛИ: Ибраев А.Т., Шайкул А.А. Моделирование приборов и систем. Конспект лекций для студентов специальности 5В071600 – Приборостроение. – Алматы: АУЭС, 2014. - 64 с.

Конспект лекций предназначен для студентов, обучающихся по специальности 5В071600 – Приборостроение и может быть использовано студентами специальностей радиотехника, электроника и телекоммуникации, автоматизация и управление, вычислительная техника и программное обеспечение.

Табл. 8, Ил. 19, библ. – 6 назв.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: канд. техн. наук, доцент Табултаев С.С.

Печатается по плану издания Некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2013 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014 г.

Содержание

Лекция 1. Введение. Понятие моделирования. Общие сведения о моделировании объектов и процессов	4
Лекция 2. Свойства математических моделей	9
Лекция 3. Основные методы построения моделей	14
Лекция 4. Методологическая основа моделирования систем. Математические схемы моделирования	19
Лекция 5. Непрерывно детерминированные модели (Д - схемы). Дискретно детерминированные модели (F - схемы)	24
Лекция 6. Непрерывно-стохастические модели (Q - схемы)	28
Лекция 7. Имитационное моделирование систем	33
Лекция 8. Моделирование случайных воздействий	38
Лекция 9. Оценка качества модели	43
Лекция 10. Метод Рунге-Кутты	46
Лекция 11. Уравнения в частных производных	51
Лекция 12. Обработка статистических результатов	56
Список литературы	63

Лекция 1. Введение. Понятие моделирования. Общие сведения о моделировании объектов и процессов

Цель лекции: структура *ММ* – общий вид математических соотношений модели без конкретизации числовых значении фигурирующих в ней параметров.

Термин модель или модели означает широкий круг материальных и абстрактных объектов, в которых отражается информационная сущность и основные свойства исследуемых объектов. Моделирование – процесс создания модели исследуемого объекта, которая несет существенные для решаемой исследователем задачи информацию о свойствах и характеристиках исходного объекта (оригинала).

Основными свойствами любой модели являются:

- конечность, модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и ресурсы моделирования конечны;
- упрощенность, модель отображает только существенные стороны объекта;
- приблизительность, действительность отображается моделью приблизительно;
- адекватность, модель успешно описывает моделируемую систему;
- информативность, модель должна содержать достаточную информацию о системе - в рамках гипотез, принятых при построении модели.

Материальные модели бывают следующих видов:

a) геометрически подобные масштабные, воспроизводящие пространственно- геометрические характеристики оригинала безотносительно его субстрату (макеты зданий и сооружений, учебные муляжи и др.);

b) основанные на теории подобия (субстратном подобии), воспроизводящие с масштабированием в пространстве и времени свойства и характеристики оригинала той же природы, что и модель, (гидродинамические модели судов, продувочные модели летательных аппаратов);

c) аналоговые приборные, воспроизводящие исследуемые свойства и характеристики объекта оригинала в моделирующем объекте другой природы на основе некоторой системы прямых аналогий (разновидности электронного аналогового моделирования).

Идеальные или абстрактные модели можно разделить на следующие виды:

a) неформализованные модели, т.е. системы представлений об объекте - оригинале, сложившиеся в человеческом восприятии;

b) частично формализованные:

вербальные – описание свойств и характеристик оригинала на некотором естественном языке (текстовые материалы проектной документации, словесное описание результатов технического эксперимента);

графические иконические – черты, свойства и характеристики оригинала, реально или хотя бы теоретически доступные непосредственно зрительному восприятию (художественная графика, технологические карты);

графические условные – данные наблюдений и экспериментальных исследований в виде графиков, диаграмм, схем;

с) вполне формализованные (математические) модели.

Математической моделью (ММ) объектов и процессов называется система математических объектов и отношений между ними, отражающая основные свойства исследуемого объекта или процесса.

К *ММ* предъявляются требования универсальности, точности, адекватности и экономичности.

Степень универсальности ММ характеризует полноту отображения свойств реального объекта. *ММ* отражает лишь часть свойств объекта. Например, модель резистора $U=R\cdot I$ отражает свойство резистора пропускать электрический ток, но не отражает таких свойств, как габариты, цвет, механическая прочность, стоимость и т. п. Для одного и того же объекта в САПР могут использоваться несколько *ММ*, отражающие свойства объекта с разной степенью полноты.

Точность ММ оценивается степенью совпадения значений параметров реального объекта и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью ММ (погрешностью вычисления параметров). Вспомним, что вектор выходных параметров есть $\overline{Y}=(y_1, y_2, ...y_n)$. Обозначим истинное и рассчитанное с помощью *ММ* значения *i*-того параметра через y_{im} и y_{ip}. Относительная погрешность расчета y_i определим как $\varepsilon_i = (y_{ip} - y_{im})/y_{im}$. Таким образом можно получить векторную оценку $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n)$. Точность ММ оценивается как $\varepsilon_м = \left\| \overline{\varepsilon} \right\|$, где $\left\| \overline{\varepsilon} \right\|$ - какая-либо норма вектора $\overline{\varepsilon}$. Это может быть средневзвешенная оценка либо $\max \varepsilon_i$, где $i \in [1, n]$.

Адекватность ММ – способность отражать свойства объекта с погрешностью не выше заданной. Поскольку $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$, $\varepsilon_i = f(\overline{X}, \overline{Q})$.. Однако $\varepsilon_м$ определяется в некоторой точке $\overline{Q}_{ном}$ для определенного вектора $\overline{X}_{расч}$. Затем модель $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$ используется для разных внешних параметров. Иначе говоря, точность модели оценивается в некоторой заданной точке пространства параметров, а используется во всей области изменения этих параметров. Строго обосновать такое использование модели можно, если доказать, что во всей области изменения параметров выполняется соотношение $\varepsilon_м < \delta$, где δ - предельно допустимая погрешность модели.

Область, в которой точность модели не превышает предельно допустимое значение, называется областью адекватности *ММ* и обозначается:

$$AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}, \quad AO = \{\overline{X}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}.$$

Экономичность ММ оценивается затратами вычислительных ресурсов (машинного времени $T_{маш}$ и машинной памяти $П_{маш}$) на ее реализацию.

Требования высокой точности, степени адекватности и универсальности, с одной стороны, и высокой экономичности (малых вычислительных затрат), с другой стороны, являются противоречивыми. Компромиссное удовлетворение этих требований обуславливает широкий спектр применяемых в САПР математических моделей.

Классификация *ММ* приведена в следующей таблице.

Признак классификации	Составляющие классификационной категории
Характер отображаемых свойств	1) функциональные 2) структурные
Принадлежность к иерархическому уровню	1) микроуровня 2) макроуровня 3) метауровня
Степень детализации описания внутри одного уровня	1) полные 2) макромодели
Способ представления свойств объекта	1) аналитические 2) алгоритмические 3) имитационные
Способ получения модели	1) теоретические 2) эмпирические

Дадим пояснения перечисленных в таблице классов *ММ*.

Функциональные и структурные модели отражают соответственно функциональных и конструкторский (структурный) аспекты описания проектируемого объекта. Функциональные модели отображают физические или информационные процессы в объекте проектирования. Структурные модели отображают топологию и геометрические свойства объекта проектирования.

Как функциональные, так и структурные модели, могут быть *сосредоточенными* или *распределенными*. В распределенных моделях учитывается их протяженность в пространстве (геометрические размеры в структурных моделях и изменение свойств функциональных моделей в пространственных координатах). Эти классы соответственно называются моделями *микроуровня* (распределенные) и *макроуровня* и *метауровня* (сосредоточенные). Математически функциональными моделями микроуровня являются дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), в которых отражаются изменения свойств объекта во времени и в пространстве. В этих моделях учитывается неравномерность распределения температуры в камере сгорания двигателя, неравномерность распределения напряжений в деталях и конструкциях и т.п. Математическим выражением

функциональных моделей макроуровня и метауровня являются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). В этих моделях неравномерностью распределения свойств объекта пренебрегают и считают эти свойства сосредоточенными в одной точке, что позволяет избавиться от пространственных координат при отображении свойств объекта в *ММ*. В моделях макроуровня рассматривают укрупненные составляющие объекта проектирования, учитывая все связи этих составляющих. На метауровне рассматривают сложные совокупности деталей как единое целое, что позволяет анализировать объекты на ранних стадиях проектирования при малой степени детализации, т.е. на верхних уровнях детализации структуры или целей проектируемого объекта. В ОДУ метауровня фигурируют фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям совокупностей деталей, что характерно для теории автоматического управления и теории массового обслуживания.

Структурными моделями на микроуровне являются геометрические модели, а на макроуровне и метауровне – топологические модели.

Аналитические ММ представляют собой явные выражения выходных параметров, как функций входных и внутренних параметров: $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$.

Алгоритмическая ММ выражает связи выходных параметров с входными и внутренними параметрами в форме алгоритма. Неявная *ММ* $L\overline{V}(\overline{Z}) = \varphi(\overline{Z})$, будучи дополнена алгоритмом вычисления функционала $\overline{Y} = F_1(\overline{Z})$ является алгоритмической. Примерами таких моделей могут быть полоса пропускания электронного усилителя, запас устойчивости по фазе или по модулю, время переходного процесса и другие.

Имитационная модель – определяется как такая алгоритмическая *ММ*, которая отражает поведение объекта во времени при задании различных внешних воздействий на объект.

Теоретические ММ создаются в результате исследований процессов и их закономерностей, присущих данному классу объектов и явлений (на основе теории).

Эмпирические ММ создаются в результате изучения объекта как «черного ящика», путем изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения фазовых переменных на входах и выходах объекта. Полученные результаты измерений обрабатываются и сводятся в таблицы, схемы, графики или для объекта определяется зависимость вида $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X})$. В последнем случае говорят об идентификации объекта (мы будем эту задачу рассматривать в разделе оптимизации). Для процесса создания эмпирических моделей важна хорошая методика планирования экспериментов и интерпретации результатов исследований.

Полная ММ - это такая *ММ*, в которой фигурируют фазовые переменные всех межэлементных связей (т.е. в ней отражается состояние всех элементов проектируемого объекта).

Макромодель отражает не все межэлементные связи.

Обычно понятия «полная ММ» и «макромодель» используют для различения 2-х моделей одного объекта, отображающих разную степень детализации описания объекта.

ММ сопротивления $U=R\cdot I$ является функциональной моделью, макроуровня, теоретической.

В общем случае получение *ММ* включает следующие операции:

1) Выбор свойств объекта, которые подлежат отражению в модели. Этот выбор основывается на анализе возможных применений *ММ* и определяет степень универсальности *ММ*.

Результатом выполнения операции будет определение переменных $\overline{X}$, $\overline{Q}$, $\overline{Y}$, например, для электронного усилителя:

$\overline{Q}$ - внешние параметры: сопротивление и емкость нагрузки, напряжения источников питания;

$\overline{X}$ - внутренние параметры: сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, параметры транзисторов;

$\overline{Y}$ - выходные параметры: полоса пропускания, коэффициент усиления на средних частотах, входное сопротивление.

2) Сбор исходной информации о выбранных свойствах объекта. Источниками сведений могут быть справочники, описания прототипов – объектов, *ММ* которых близки к проектируемому объекту.

Результатом выполнения этой операции должно быть задание области допустимых значений (области определения) параметров $\overline{X}$ и $\overline{Q}$, например, $Q_1 = U_{ист} = (220 \pm 10)в$, $X_1 = R_1 = [10,20]ком$.

3) Синтез структуры *ММ*. *Структура ММ – общий вид математических соотношений модели без конкретизации числовых значений фигурирующих в ней параметров.* Структура *ММ* может быть представлена также в графической форме, например, в виде эквивалентной схемы, графа или структурной схемы. Синтез структуры – наиболее ответственная и плохо поддающаяся формализации операция.

4) Расчет числовых значений параметров *ММ*. Эта задача ставится как задача минимизации погрешности модели заданной структуры, т.е. $\min \varepsilon_м(\overline{X}), \overline{X} \ э \ X_{доп}$, где $\overline{X}_{доп}$ - область допустимых значений для внутренних параметров модели. $\varepsilon_м$ определяется в некоторой заданной точке $\overline{Q}_{ном}$ области изменения внешних параметров модели.

5) Оценка точности и адекватности *ММ*. Большую ценность для использования ММ представляют не оценки точности, полученные в некоторых точках пространства внешних параметров $Q_1^*, Q_2^*, ...Q_z^*$, а сведения об области адекватности $AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}$. В многомерном пространстве внешних параметров $\overline{Q}$ $AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}$ представляет собой в общем случае многогранник с криволинейными границами. При размерности пространства параметров $\overline{Q}$ больше двух, восприятие области адекватности человеком становится

затруднительным. Поэтому в большинстве случаев определяется аппроксимированная область адекватности (АОА) в виде:

$$Q_1^1 \le Q_1 \le Q_1^2, Q_2^1 \le Q_2 \le Q_2^2, \ldots\ldots Q_n^1 \le Q_n \le Q_n^2.$$

Аппроксимированная область адекватности представляет собой гиперпараллилепипед со сторонами, параллельными осям координат.

6) При автоматизированном проектировании полученная модель представляется в машинной форме, т.е. в таком виде, в котором она может быть воспринята обрабатывающими программами пакета прикладных программ анализа и синтеза. Эта форма диктуется правилами проблемно-ориентированного языка специального программного обеспечения.

Лекция 2. Свойства математических моделей

Цель лекции: статические и динамические модели. Адекватность и эффективность математических моделей.

Связь между входными и выходными переменными моделируемого объекта, в общем случае, может характеризоваться графически, аналитически или алгоритмически. Предположим, что математическими средствами можно установить и охарактеризовать зависимость каждой из выходных и входных переменных.

Пусть $M=M(X,Y,Z)$, где X - множество входов, Y - выходов, Z - состояний системы. Схематически можно это изобразить: $X \rightarrow Z \rightarrow Y$.

Рассмотрим теперь наиболее существенные с точки зрения моделирования внутренние свойства объектов разного класса. При этом придется использовать понятие структура и параметры моделируемого объекта. Под структурой понимается совокупность учитываемых в модели компонентов и связей, содержащихся внутри объекта, а после формализации описания объекта – вид математического выражения, которое связывает его входные и выходные переменные (например: y=au+bv). Параметры представляют собой количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются принятой структурой, а в формализованной математической модели они суть коэффициенты (постоянные переменные), входящие в выражения, которыми описывается структура (a и b).

Первое свойство *непрерывность* и *дискретность*. Все те объекты, переменные которых (включая, при необходимости, время) могут принимать несчетное множество сколь угодно близких друг к другу значений, называются непрерывными или континуальными. Подавляющее большинство реальных физических и теоретических объектов, состояние которых характеризуется только макроскопическими физическими величинами (температура, давление, скорость, ускорение, сила тока, напряженность электрического или магнитного полей и т.д.) обладают свойством непрерывности. Математические структуры, адекватно описывающие такие

объекты, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании таких объектов используется главным образом, аппарат дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения как инструмент модельного описания физических и технических объектов настолько широко распространены в приложениях, что некоторые специалисты, главным образом инженеры, только их и рассматривают, как полноценные модели. Это неправильно. Объекты, переменные которых могут принимать некоторое, практически всегда конечное число наперед известных значений, называются дискретными. Примеры: релейно-контактные переключательные схемы, коммутационные системы АТС. Основой формализованного описания дискретных объектов является аппарат математической логики (логические функции, аппарат булевой алгебры, алгоритмические языки). В связи с развитием ЭВМ дискретные методы анализа получили широкое распространение также для описания и исследования непрерывных объектов.

Непрерывность или дискретность. Это свойство выражается в структуре множеств (совокупностей), которым принадлежат параметры состояния, параметр процесса и входы, выходы системы. Таким образом, дискретность множеств Z, *Y, T, X* ведет к модели, называемой дискретной, а их непрерывность — к модели с непрерывными свойствами. Дискретность входов (импульсы внешних сил, ступенчатость воздействий и др.) в общем случае не ведет к дискретности модели в целом. Важной характеристикой дискретной модели является конечность или бесконечность числа состояний системы и числа значений выходных характеристик. В первом случае модель называется дискретной конечной. Дискретность модели также может быть как естественным условием (система скачкообразно меняет свое состояние и выходные свойства), так и искусственно внесенной особенностью. Типичный пример последнего — замена непрерывной математической функции на набор ее значений в фиксированных точках.

Следующее свойство модели — *детерминированность* или *стохастичность.* Если в модели среди величин имеются случайные, т. е. определяемые лишь некоторыми вероятностными характеристиками, то модель называется стохастической (вероятностной, случайной). В этом случае и все результаты, полученные при рассмотрении модели, имеют стохастический характер и должны быть соответственно интерпретированы.

Здесь подчеркнем, что с точки зрения практики граница между детерминированными и стохастическими моделями выглядит расплывчатой. Так, в технике про любой размер или массу можно сказать, что это не точное значение, а усредненная величина типа математического ожидания, в связи с чем и результаты вычислений будут представлять собой лишь математические ожидания исследуемых величин. Однако такой взгляд представляется крайним. Удобный практический прием состоит в том, что при малых отклонениях от фиксированных значений модель считается детерминированной, а отклонение результата исследуется методами оценок

или анализа ее чувствительности. При значительных же отклонениях применяется методика стохастического исследования.

Свойства *сосредоточенности* или *распределенности* характеризуют объекты с точки зрения роли, которую играет в их модельном описании пространственная протяженность (на фоне скорости распространения физических процессов). Если пространственной протяженностью объекта можно пренебречь и считать, что независимой переменной является только время (протекающих в нем процессов), принято говорить об объекте с сосредоточенными параметрами. К числу таких объектов, которые описываются (в случае детерминированности и непрерывности) обыкновенными дифференциальными уравнениями, относится подавляющее большинство механизмов, машин и вообще локальных технических устройств (расстояния между компонентами практически не влияют на исследуемые свойства и характеристики). В пространственно протяженных объектах адекватное описание требует учета не только времени, но и пространственных координат. В таком случае говорят о классе объектов с распределенными параметрами. Примеры: всевозможные «длинные линии» - проводная линия связи, описываемая так называемым телеграфным уравнением, длинные трубопроводы, технологические линии в непрерывном пространстве. Электромагнитное поле с его обобщенной математической моделью – уравнениями Максвелла – представляет собой классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами. Непрерывные и детерминированные объекты с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Статические и динамические модели. Статические модели относятся к объектам, практически неизменяющимся во времени или рассматриваемым в отдельные временные сечения. Динамические модели воспроизводят изменения состояний («движение») объекта с учетом как внешних, так и внутренних факторов.

Для динамических моделей часто вводят понятия *стационарность* и *нестационарность*. Чаще всего стационарность выражается в неизменности во времени некоторых физических величин: стационарным является поток жидкости с постоянной скоростью, стационарна механическая система, в которой силы зависят только от координат и не зависят от времени.

Под стационарным объектом, в более общем смысле, подразумевают неизменность структуры и параметров объекта. Поэтому он описывается выражением, которое включает в себе только постоянные коэффициенты.

Нестационарность может иметь место относительно параметров, относительно структуры и одновременно. Чаще имеет место нестационарность относительно параметров, т.е. рассматривается объект с переменными коэффициентами, что усложняет исследование. Общей теории и специального математического аппарата для описания существенно нестационарных объектов переменной структуры еще не существует. Исследование таких объектов проводится на основе некоторых методов

прикладного системного анализа, которые сочетают формализованные математические процедуры с эвристикой и здравым смыслом, а также широко используют прием декомпозиции и последующего объединения частных решений.

С точки зрения общности методов анализа, возможностей математического аппарата и трудоемкости исследования чрезвычайно существенно деление объектов на *линейные* и *нелинейные*. Для первых справедлив принцип суперпозиций, когда каждый из выходов объекта характеризуется некоторой линейной формулой, связывающих его со значениями соответственных входных переменных. С точки зрения математического аппарата линейность объекта относительно переменных означает, что среди коэффициентов, входящих в его математическое описание, отсутствуют величины, зависящие от переменных, их производных и интегралов. Если коэффициенты не зависят и от времени, то это самый благоприятный и наиболее распространенный в технических приложениях случай: описание объекта в классе линейных стационарных моделей.

Линейность (нелинейность) обычно расшифровывается как линейная (нелинейная) зависимость от входов операторов состояний или выходов. Линейность может являться как естественным, хорошо соответствующим природе, так и искусственным (вводимым для целей упрощения) свойством модели.

Адекватность и эффективность математических моделей.

Вопрос о необходимой и достаточной степени соответствия объекту – оригиналу или адекватности модели относится к числу важнейших в сфере модельной методологии. Под эффективностью понимают практическую полезность. Процесс моделирования неизбежно протекает в условиях диалектического взаимодействия двух противостоящих друг другу тенденций. С одной стороны, исследователь всегда стремиться к возможно более полному и точному воспроизведению в модели свойств и характеристик объекта. Неизбежным следствием такого подхода является рост сложности, которая проявляется в числе переменных, числе учитываемых связей и влияний, повышении требования к точности исходных данных и т.д. Именно эта сторона дела – требование полноты соответствия модели объекту – оригиналу акцентируется в большинстве философских работ и даже рассматривается некоторыми авторами как мера совершенства модели. Однако практика показала неопровержимо: эффективность модели находится в обратной зависимости от её сложности, быстро убывая с ростом последней.

Определить математическим путем наилучшее сочетание полноты-точности создаваемой модели с одной стороны и простоты с другой, практически никогда не удается из-за неформализуемости и неоднозначности большей части подлежащих учету факторов.

Пара *задача-объект* в основном определяет номенклатуру подлежащих учету переменных объекта; параметры, входящие в модель, число и характер

связей между ними, требования к точности данных и ряд других важнейших характеристик модели. Решающим фактором эффективности сейчас оказывается математический аппарат. Эффективность модели зависит и от такого субъективного момента, как профессиональные качества и уровень подготовки исследователя – исполнителя.

Таким образом, можно сделать заключение: наилучшее в практическом отношении качество или эффективность любой модели достигается как разумный компромисс между близостью модели к оригиналу (адекватностью) и простотой, обеспечивающей возможность и удобство использования модели по её прямому назначению; чрезмерная точность модели на практике не менее вредна, чем её неполнота и грубость.

Математическая модель изучаемого процесса или объекта является основой, фундаментом всего исследования. Тем не менее на сегодняшний день не существует и, по-видимому, не может существовать науки о моделировании реальных процессов и явлений окружающего мира — точно так же, как не существует науки о том, как совершать открытия, изобретения, создавать новые методы научного поиска. Даже математика — одна из наук, которая в большей, чем другие науки, степени использует дедукцию, своему прогрессу обязана в громадной степени таким «ненаучным» приемам, как интуиция, догадка, фантазия, т. е. индуктивному способу мышления. Моделирование объектов и явлений реальности (на сегодняшний день) в большой степени представляет искусство, а искусству учат на опыте. Человечество обладает таким опытом. Это опыт классиков естествознания, опыт представителей естественных наук, эксплуатирующих для своих целей математический аппарат, и т. д.

В каждом конкретном случае качество модели во многом зависит от способностей исследователя понять существо, физику изучаемого процесса и создать его адекватное математическое описание. Математику привлекают, когда сложен изучаемый или управляемый процесс. Сложность обычно состоит в огромном числе характеристик, его описывающих, и большом числе связей между ними. И задача заключается не только в том, чтобы создать адекватное математическое описание изучаемого процесса, т. е. его модель, но и разработать методику работы с нею. С громоздкими многопараметрическими моделями трудно проводить исследования, поэтому математики вынуждены были при формализации реального процесса отбрасывать многие, на их взгляд менее существенные связи, заглублять математическое описание. Необходимо обладать незаурядной интуицией для определения, что важно с точки зрения интересующих исследователя вопросов, что — нет. Однако при решении серьезных практических задач невозможно полагаться лишь на интуицию и опыт небольшой группы исследователей, необходима методика, позволяющая с большой степенью достоверности определить адекватность модели и реальности, ею описываемой, область возможного ее применения и круг вопросов, для исследования которых они пригодны. Необходима «система

знаний», которая позволила бы, используя накопленный опыт и определенные принципы, выработанные на его основе, а также доказанные или установленные на их базе положения, создавать модели изучаемых процессов, проводить их анализ и определять пути их дальнейшего использования.

Лекция 3. Основные методы построения моделей

Цель лекции: сопоставление целей с ресурсными ограничениями, которая помимо непротиворечивой системы конкретных целей, учитывающих ресурсные возможности, включает в себя объект моделирования.

Модельное исследование, как любой другой вид осознанной целенаправленной деятельности начинается с возникновения проблемы – потребности изменить в лучшую сторону существующее либо ожидаемое положение вещей в той или иной области. Источник проблемы – предшествующее развитие данной области или же внешние факторы.

Осмысление или конкретизация проблемы приводит к формулировке цели или системы целей как желательного результата будущей деятельности по решению проблемы.

Поставленная цель должна быть соотнесена с реальными возможностями её достижения, т.е. с ресурсами (материальными и другими). Сопоставление целей с ресурсными ограничениями приводит к формулировке задачи исследования, которая помимо непротиворечивой системы конкретных целей, учитывающих ресурсные возможности, включает в себя объект моделирования. Задача и объект моделирования должны рассматриваться совместно. Данные о целях исследования, а также исходная информация об объекте моделирования служат для определения критерия качества создаваемой модели – количественной меры степени её совершенства. В случае вполне формализованной оптимизационной постановки (например, на основе аппарата линейного программирования) критерий приобретает вид некоторого функционала от переменных и параметров модели, значение которого достигает экстремума при оптимальных её характеристиках.

Следующим шагом в построении модели является основанный на априорных данных содержательный анализ системы задача-объект и выбор класса или, точнее, способа формирования модели. Если объект не слишком сложен, достаточно изучен и комплекс подлежащих модельному исследованию свойств и характеристик объекта может быть выявлен на основе теоретических представлений и данных (дополняемых необходимым объемом эмпирической информации), целесообразно избрать аналитический путь построения модели. Часто из-за сложности, слабой изученности объекта или отсутствия соответствующих теоретических разработок этот путь не может быть реализован. Альтернативным является путь идентификации

объекта, т.е. экспериментального определения существенных для решаемой задачи свойств и характеристик объекта, специально ради построения его модели. Эксперимент осуществляется в соответствии со специально разрабатываемым оптимальным планом, данные эксперимента обрабатываются и становятся основой для формализованного описания объекта в виде математической модели вход-выход.

Формализованная модель, построенная теоретическим путем или идентифицированная, оценивается в соответствии с выбранным ранее критерием и либо признается удовлетворительной (принимается), либо отвергается как недостаточно совершенная. В последнем случае возникает необходимость в её корректировке и итеративном обращении к ранее выполненным этапам. Решение о принятии модели (в общем случае после *i*-того итеративного цикла) влечет за собой переход к следующему этапу – опытной проверке непосредственно в условиях той задачи, для решения которой она построена. При этом возникают нередко дополнительные требования (например, связанные с удобством использования модели) и необходимость её дополнительной корректировки. Наконец, следует заключительный этап процесса - использование модели по прямому назначению для решения исследовательской или иной задачи, причем и на этом этапе возможны дальнейшие уточнения и корректировки.

Построение модели представляет собой не однократный акт, а процесс последовательных приближений, в основе которого лежит самообучение исследователя. Начинаясь в условиях большей или меньшей неопределённости (это принципиально, т.к. именно недостаток информации о свойствах объекта вызывает постановку задачи его модельного исследования), построение модели неизбежно связано с введением ряда гипотез. Некоторые из них оказываются правомерными. Другие на последних этапах не подтверждаются, что естественно требует возврата к пунктам, в которых они были введены, и соответственной корректировки всех дальнейших процедур. Подобный итеративный характер построения моделей, который проявляется в наличии обратных связей на его блок схеме, есть принципиальное свойство данного процесса и речь может идти только о том, чтобы итерации были по возможности короткими, чтобы каждое ошибочное предположение выявлялось возможно ближе к точке его возникновения. В этом, собственно, и заключается главное требование к рациональному плану каждого конкретного модельного исследования.

Проблема моделирования состоит из трех задач:

1) построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);

2) исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);

3) использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

Технология математического моделирования.

Математическое моделирование – явление достаточно сложное. Обычно говорят о процедуре составления модели и о том, в какой мере модели отражают реальную жизнь. Необходимо иметь в виду все стороны этого явления. Математические модели используются в конечном счете для прогноза развития процессов во времени, состояния, в котором будет находиться объект, его свойств, если выполняются определенные условия. Для того, чтобы получить этот прогноз практически, недостаточно составить модель. Необходимо разработать и реализовать процедуру вычисления интересующих нас характеристик изучаемого процесса, идентифицировать модель, т.е. определить содержащие в ней так называемые внешние величины (коэффициенты, параметры, факторы), убедиться, что модель адекватна, т.е. дает практически приемлемые прогнозы. Необходимо, наконец, давать этот прогноз в тех случаях, когда это требуется. Термин «технология математического моделирования» будет использоваться для обозначения совокупности всех перечисленных действий, необходимых для практического получения прогноза течения процесса или прогноза свойств объектов - от составления математической модели до вычисления прогнозируемых величин.

Математическое моделирование часто начинается с необходимости прогнозирования развития некоторого процесса во времени. Акт математического моделирования начинается с введения системы величин, полностью (с точки зрения тех практических потребностей, которые вызвали необходимость получения прогноза) характеризующих процесс. Следующим шагом является запись соотношений (зависимостей, связей) между введенными величинами. Эти соотношения возникают в конечном счете из наблюдения, из опыта и являются результатом интуитивного осмысления существа процесса. Суть математического моделирования состоит в получении строгих, однозначно трактуемых соотношения между введенными характеристиками процесса путем пренебрежения тем, что в нем с точки зрения целей, которые ставятся при моделировании, можно считать неглавным, несущественным. Эти соотношения можно изучать чисто математическими средствами, т.е. извлекать из них формальные следствия, отвлекаясь от их содержательного смысла. Математика как раз и есть наука, в рамках которой разрабатываются способы получения разнообразных следствий строгих соотношений (зависимостей, связей) между некоторыми абстрактными характеристиками реальных процессов, явлений. Цена, которую приходится платить за саму возможность получать эти следствия, - пренебрежение чем-то в изучаемом процессе, лишение его «красок», лишь одному ему присущих черт, его «уникальности», т.е. переход от данного конкретного процесса к его абстрактной схеме. Гуманитарные науки и искусство, наоборот, изучают процессы и явления, интересуясь как раз их уникальностью, неповторимостью. Нетрудно заметить, что одно без другого существовать не может.

Процесс определения внешних величин модели называется ее идентификацией. Идентификация математических моделей – существенная часть технологии математического моделирования. Во многих случаях расходы на идентификацию превосходят (часто на порядок) все остальные расходы, связанные с использованием технологии математического моделирования для прогноза развития реальных процессов. Идентификация модели тесно связана с ее верификацией – установлением ее адекватности, т.е. соответствия ее результатов реальному течению прогнозируемого с ее помощью процесса. «Стандартный» способ идентификации состоит в том, что экспериментально измеряются внутренние величины модели (или некоторые их функции), а ее внешние величины подбираются так, чтобы прогноз, полученный с помощью модели с этими внешними величинами, в некотором смысле наименьшим образом отличался от экспериментальных измерений. Этот способ дает одновременно некоторое представление и об адекватности модели: если внешние величины удалось подобрать так, что отличие теоретического прогноза от экспериментальных измерений удовлетворительно с практической точки зрения, то это дает надежду на то, что модель окажется адекватной. Полную же уверенность в адекватности модели дает опыт ее эксплуатации: если в процессе эксплуатации модели не возникает очевидных противоречий между даваемым ее прогнозом и реальным положением дел, то модель считается адекватной. Модель, неадекватность которой выяснилась в процессе эксплуатации, либо подвергается коррекции, либо дополняется, либо вообще заменяется новой. Каждая модель адекватна в каких-то рамках, в каких-то пределах и при выходе за эти пределы должна корректироваться, дополняться либо заменяться новой.

Технология математического моделирования содержит следующие этапы: составление модели, идентификация и верификация модели, эксплуатация модели. Выполнение каждого этапа может вызвать возвращение на более ранние этапы: на каждом этапе может оказаться необходимым вносить коррективы в составленную модель, т.е. возвращаться в первому этапу, на этапе идентификации может оказаться необходимым вносить коррективы в алгоритм расчета внешних величин модели по внутренним величинам и т.д. Имея в виду это обстоятельство, будем говорить далее о технологических циклах математического моделирования.

Этап составления модели. Угадывание величин, характеризующий реальный процесс, как можно более консервативных, как можно более независимых от времени, расстояний, местоположений, других характеристик реальных процессов в пределах точности, приемлемой для практических целей. Постулирование некоторых инвариантностей, именуемых обычно законами. Инварианты, фигурирующие в математических моделях, являются их внешними величинами. Гипотезы об инвариантности определенных величин возникают из опыта, из измерений реальных величин, из обработки

этих измерений. Математическое моделирование поэтому немыслимо без измерительной техники.

Этап разработки и реализации процедуры вычисления внутренних величин модели по ее внешним величинам. Первый вопрос, который здесь возникает: существует ли в принципе такая процедура. Для простых моделей ответ на этот вопрос часто бывает очевидным. Для более сложных моделей это является предметом специального математического анализа. Для многих типов моделей утверждения о том, что это имеет место, называются теоремами существования и единственности. Математические модели, для которых удалость доказать теорему существования и единственности, принято называть замкнутыми. После установления замкнутости модели необходимо разработать процедуру вычисления внутренних величин по внешним. Если эта процедура имеет вид аналитический формулы, то часто такую модель называют аналитической. Для тех замкнутых математических моделей, для которых аналитических формул, дающих внутренние величины, не существует (либо они существуют, но мы не сумели выявить этот факт) возникает проблема разработки численной процедуры, дающей значения внутренних величин и функций от них, которые нас интересуют, с заданной точностью. Эта проблема решается в рамках направления в математике, которое называется вычислительной математикой или численными методами. После этого необходимо составить программу на ЭВМ, реализующую эту численную процедуру.

Этап эксплуатации модели. Этот этап существенно зависит от предыдущего. Другими словами, этап эксплуатации зависит об объема информации, которая необходима для выполнения вычислений интересующих нас величин и от объема самих вычислений. В зависимости от этих объемов можно выделить три основные формы эксплуатации математических моделей, если под эксплуатацией понимать акты осуществления прогноза развития моделируемого процесса или прогноза его свойств путем реализации процедуры вычисления внутренних величин модели по известных внешним величинам. Первая форма – это аналитические расчетные формулы. Вторая форма эксплуатации моделей – программы на ЭВМ, рассчитывающие интересующие нас функции внутренних величин по задаваемым внешним величинам. Эти формы трактуются как основные. Кроме этих форм имеются различные их промежуточные варианты и комбинации. Третья форма эксплуатации моделей – это так называемые проблемно-ориентированные интерактивные системы. Интерактивные системы вместе с программой, реализующей расчеты интересующих величин, содержат также средства, позволяющие в диалоге с ЭВМ манипулировать внешними величинами, визуализировать и обрабатывать различным образом результаты расчетов. Интерактивные системы являются результатом соединения традиционной технологии математического моделирования с информационной технологией, возникшей на базе ЭВМ.

Лекция 4. Методологическая основа моделирования систем. Математические схемы моделирования

Цель лекции: основные понятия теории моделирования систем. Понятие системы и элемента системы. Цели моделирования.

Основные понятия теории моделирования систем.

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие *системный подход,* который отличается от *классического* (или индуктивного – путем перехода *от частного к общему* и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно) подхода. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход *от общего к частному*, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Понятие системы и элемента системы. Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством – стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтем в следующих определениях системы.

Система S – целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Внешняя среда E – множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

При системном подходе к моделированию систем необходимо, прежде всего, четко определить *цель моделирования*. Применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель *M.* Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

Цели моделирования:

1) оценка – оценить действительные характеристики проектируемой или существующей системы, определить насколько система предлагаемой структуры будут соответствовать предъявляемым требованиям;

2) сравнение – произвести сравнение конкурирующих систем одного функционального назначения или сопоставить несколько вариантов построения одной и той же системы;

3) прогноз – оценить поведение системы при некотором предполагаемом сочетании рабочих условий;

4) анализ чувствительности – выявить из большого числа факторов, действующих на систему тем, которое в большей степени влияют на ее поведение и определяют ее показатели эффективности;

5) оптимизация – найти или установить такое сочетание действующих факторов и их величин, которое обеспечивает наилучшие показатели эффективности системы в целом.

1-4 задачи анализа, 5 – задача синтеза.

Подходы к исследованию систем. Важным для системного подхода является определение *структуры системы* – совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие.

При *структурном подходе* выявляются состав выделенных элементов системы *S* и связи между ними. Совокупность элементов и связей между ними позволяет судить о структуре системы. Последняя в зависимости от цели исследования может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры – это топологическое описание, позволяющее определить в самых общих понятиях составные части системы и хорошо формализуемое на базе теории графов.

Менее общим является функциональное описание, когда рассматриваются отдельные функции, т. е. алгоритмы поведения системы, и реализуется *функциональный подход,* оценивающий функции, которые выполняет система, причем под функцией понимается свойство, приводящее к достижению цели.

Простой подход к изучению взаимосвязей между отдельными частями модели предусматривает рассмотрение их как отражение связей между отдельными подсистемами объекта. Такой классический подход может быть использован при создании достаточно простых моделей. Процесс синтеза модели *М* на основе классического (индуктивного) подхода представлен на рисунке 4.1, *а.* Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т. е. выбираются исходные данные *Д* для моделирования и ставятся цели *Ц,* отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных *Д* ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента *К* будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель *М.*

Таким образом, разработка модели *М* на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств. Можно отметить две отличительные стороны классического подхода: наблюдается движение от частного к общему, создаваемая модель (система) образуется путем суммирования

отдельных ее компонент и не учитывается возникновение нового системного эффекта.

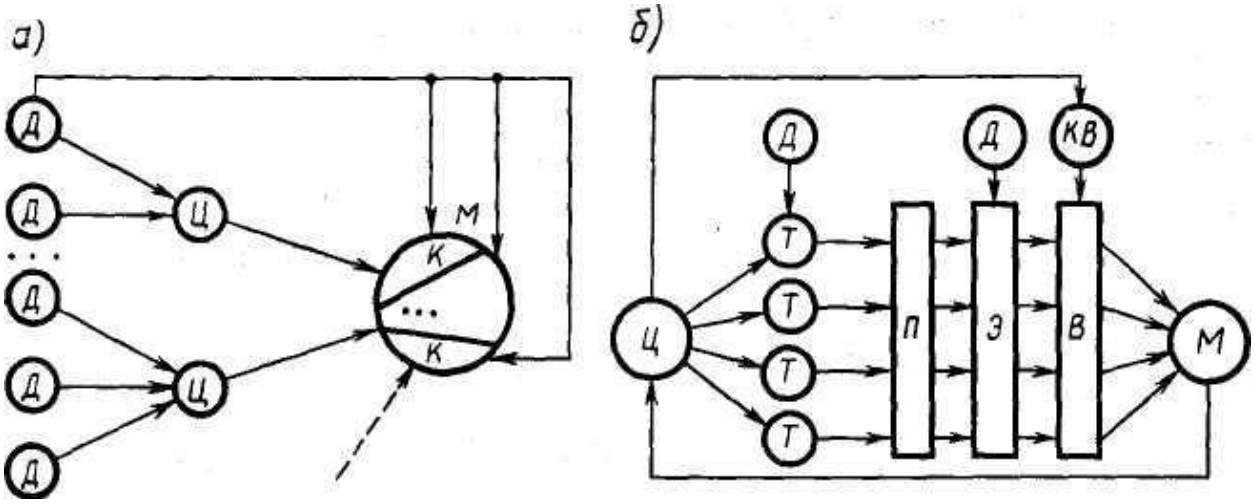

Рисунок 4.1 - Процесс синтеза модели на основе классического *(а)* и системного (б) подходов

Процесс синтеза модели *М* на базе системного подхода условно представлен на рисунке 4.1, *б.* На основе исходных данных *Д,* которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему сверху либо исходя из возможностей ее реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования *Т* к модели системы *S.* На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы *П,* элементы *Э* и осуществляется наиболее сложный этап синтеза – выбор *В* составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора *КВ.*

Стадии разработки моделей. На базе системного подхода может быть предложена и некоторая последовательность разработки моделей, когда выделяют две основные стадии проектирования: *макропроектирование* и *микропроектирование*.

На стадии *макропроектирования* на основе данных о реальной системе *S* и внешней среде *E* строится модель внешней среды, выявляются ресурсы и ограничения для построения модели системы, выбирается модель системы и критерии, позволяющие оценить адекватность модели *М* реальной системы *S.*

Стадия *микропроектирования* в значительной степени зависит от конкретного типа выбранной модели. В случае имитационной модели необходимо обеспечить создание информационного, математического, технического и программного обеспечений систем моделирования.

Независимо от типа используемой модели *М* при ее построении необходимо руководствоваться рядом *принципов системного подхода*:

1) пропорционально-последовательное продвижение по этапам и направлениям создания модели;

2) согласование информационных, ресурсных, надежностных и других характеристик;

3) правильное соотношение отдельных уровней иерархии в системе моделирования;

4) целостность отдельных обособленных стадий построения модели.

Математические схемы моделирования систем.

Исходной информацией при построении *ММ* процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой (проектируемой) системы *S*. Эта информация определяет основную цель моделирования, требования к *ММ*, уровень абстрагирования, выбор математической схемы моделирования.

Понятие *математическая схема* позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, средства формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания к формализованному представлению процесса её функционирования в виде некоторой *ММ*.

При пользовании мат. схемой в первую очередь исследователя системы должен интересовать вопрос об адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе, а не возможность получения ответа (результата решения) на конкретный вопрос исследования.

Например, представление процесса функционирования ИВС коллективного пользования в виде сети схем массового обслуживания даёт возможность хорошо описать процессы, происходящие в системе, но при сложных законах входящих потоков и потоков обслуживания не даёт возможности получения результатов в явном виде.

Математическую схему можно определить как звено при переходе от содержательного к формализованному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка: описательная модель — математическая схема — имитационная модель.

Каждая конкретная система *S* характеризуется набором свойств, под которыми понимаются величины, отображающие поведение моделируемого объекта (реальной системы) и учитываются условия её функционирования во взаимодействии с внешней средой (системой) *E*.

При построении *ММ* системы *S* необходимо решить вопрос о её полноте. Полнота моделирования регулируется, в основном, выбором границ «Система S — среда E». Также должна быть решена задача упрощения *ММ*, которая помогает выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные в плане цели моделирования.

ММ объекта моделирования, т.е. системы *S* можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

- совокупность X - входных воздействий на S $x_i \in X$, $i=1...n_x$;

- совокупность воздействий внешней среды $v_l \in V$, $l=1...n_v$;

- совокупность внутренних (собственных) параметров системы $h_k \in H$, $k=1 \ldots n_h$;

- совокупность выходных характеристик системы $y_j \in Y$, $j=1 \ldots n_y$.

В перечисленных множествах можно выделить управляемые и неуправляемые величины. В общем случае *X, V, H, Y* не пересекаемые множества, содержат как детерминированные так и стохастические составляющие. Входные воздействия *E* и внутренние параметры *S* являются *независимыми (экзогенными) переменными,* $\overline{X}(t);\overline{V}(t);\overline{H}(t)$. Выходные характеристики - *зависимые переменные (эндогенные)* $\overline{Y}(t)$. Процесс функционирования *S* описывается оператором F_S:

$$\vec{Y}(t) = F_S(\overline{X},\overline{V},\overline{H},t). \quad (1)$$

$\vec{Y}(t)$ - выходная траектория. F_S - закон функционирования *S*. F_S может быть функция, функционал, логические условия, алгоритм, таблица или словесное описание правил.

Алгоритм функционирования A_S — метод получения выходных характеристик $\overline{Y}(t)$ с учётом входных воздействий $\overline{X}(t);\overline{V}(t);\overline{H}(t)$. Очевидно один и тот же F_S может быть реализован различными способами, т.е. с помощью множества различных A_S.

Соотношение (1) является математическим описанием поведения объекта *S* моделирования во времени *t*, т.е. отражает его *динамические свойства.* (1) - это динамическая модель системы *S*. Для статических условий *ММ* есть отображения *X, V, H* в *Y*, т.е.

$$\vec{Y} = f(\vec{X},\vec{V},\vec{H}). \quad (2)$$

Соотношения (1), (2) могут быть заданы формулами, таблицами и т.д.

Также соотношения в ряде случаев могут быть получены через свойства системы в конкретные моменты времени, называемые состояниями.

Состояния системы S характеризуются векторами:

$\vec{Z}^{I}(\vec{z}^{I}_1,\ldots.\vec{z}^{I}_k)$ и $\vec{Z}^{II}(\vec{z}^{II}_1,\ldots.\vec{z}^{II}_k)$, где $z^{I}_1 = z_1(t^{I}) \ldots . z^{I}_k = z_k(t^{I})$ в момент $t^{I} \in (t_0, T)$

$z^{II}_1 = z_1(t^{II}) \ldots . z^{II}_k = z_k(t^{II})$ в момент $t^{II} \in (t_0, T)$ и т.д. $\kappa=1 \ldots n_Z$.

$Z_1(t)$, $Z_2(t)$… $Z_k(t)$ - это координаты точки в *к*-мерном фазовом пространстве. Каждой реализации процесса будет соответствовать некоторая фазовая траектория.

Совокупность всех возможных значений состояний $\{\vec{Z}\}$ называется пространством состояний объекта моделирования *Z*, причём $z_k \in Z$.

Состояние системы *S* в интервале времени $t_0 < t \le T^{I}$ полностью определяется начальными условиями $\vec{Z}^{0} = (z^{0}_1,\ldots.z^{0}_k)$, где $z^{0}_1 = z_1(t_0) \ldots .$ входными $\vec{X}(t)$, внутренними параметрами $\vec{H}(t)$ и воздействиями внешней среды $\vec{V}(t)$, которые имели место за промежуток времени t^{*} - t_0 с помощью 2-х векторных уравнений:

$$\vec{Z}(t) = \Phi(\vec{z}^{0},\vec{X},\vec{V},\vec{h},t); \quad (3)$$

$$\vec{Y}(t) = F(\vec{Z},t). \quad (4)$$

иначе: $$Y(t) = F(\Phi(\vec{Z}^0, \vec{X}, \vec{V}, \vec{h}, t)).$$ (5)

Время в моделировании *S* может рассматриваться на интервале моделирования (t_0, T) как непрерывный, так и дискретное, т.е. квантованное на отрезке длин. Δt.

Таким образом под *ММ* объекта понимаем конечное множество переменных $\{\vec{X}, \vec{Z}, \vec{h}\}$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками $\vec{Y}$.

Моделирование называется детерминированным, если операторы *F, Ф* детерминированные, т.е. для конкретного входа выход детерминированный. Детерминированное моделирование - частный случай стохастического моделирования. В практике моделирование объектов в области системного анализа на первичных этапах исследования рациональнее использовать типовые математические схемы: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, СМО и т.д.

Не облад. такой степенью общности, как модели (3), (4), типовые *математические схемы* имеют преимущество простоты и наглядности, но при существенном сужении возможности применения.

В качестве *детерминированных* моделей, когда при исследовании случайный факт не учитывается, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные и др. уравнения, а для представления систем, функционирующих в дискретном времени — конечные автоматы и конечно разностные схемы.

В начале стохастических моделей (при учёте случайного фактора) для представления систем с дискретным временем используются вероятностные автоматы, а для представления систем с непрерывным временем — системы массового обслуживания (СМО). Большое практическое значение при исследовании сложных индивидуальных управленческих систем, к которым относятся АСУ, имеют так называемые *агрегативные* модели.

Агрегативные модели (системы) позволяют описать широкий круг объектов исследования с отображением системного характера этих объектов. Именно при агрегативном описании сложный объект расчленяется на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивая взаимодействие частей.

Лекция 5. Непрерывно - детерминированные модели (Д - схемы). Дискретно – детерминированные модели (F-схемы)

Цель лекции: рассмотрение особенности непрерывно – детерминированного подхода на примере, используя в качестве ММ *дифференциальные уравнения.*

Непрерывно-детерминированные модели (Д - схемы).

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной переменной или нескольких переменных, причём в уравнение входят не только их функции но их производные различных порядков.

Если неизвестные - функции многих переменных, то уравнения называются — *уравнения в частных производных.* Если неизвестные функции одной независимой переменной, то имеют место *обыкновенные дифференциальные уравнения.*

Математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде:

$$\vec{y}^{\,l} = \vec{f}(\vec{y}, t), \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0.$$

Например, процесс малых колебаний маятника описан обыкновенными дифференциальным уравнением $m_1 l_1^2 \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} + m_2 g l \Theta(t) = 0$, где m_1, l_1 - масса, длина подвески маятника, Θ - угол отклонения маятника от положения равновесия. Из этого уравнения можно найти оценки интересующих характеристик, например период колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

Дифференциальные уравнения, *Д* - схемы являются математическим аппаратом *теории систем автоматического регулирования, управления.*

При проектировании и эксплуатации систем САУ необходимо выбрать такие параметры системы, которые бы обеспечивали требуемую точность управления.

Следует отметить, что часто используемые в САУ системы диф. уравнений определяются путём линеаризацией управления объекта (системы), более сложного вида, имеющего нелинейности: $F(y^n, y^{n-1}, \ldots y, x^m, x^{n-1}, \ldots x_n) = 0$:

$$\frac{dF}{dy_0^n}\Delta y^n + \frac{dF}{dy_0^{n-1}}\Delta y^{n-1} \ldots \frac{dF}{dy_0}\Delta y + \Delta y = \frac{dF}{dx_0^m}\Delta y^m + \ldots \frac{dF}{dx_0}\Delta x + \Delta x .$$

Дискретно – детерминированные модели (F-схемы).

ДДМ являются предметом рассмотрения *теории автоматов (ТА).* ТА - раздел теоретической кибернетики, изучающей устройства, перерабатывающие дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Конечный автомат имеет множество внутренних состояний и входных сигналов, являющихся конечными множествами. *Автомат* задаётся *F*-схемой:

$$F = \langle z, x, y, \varphi, \psi, z_0 \rangle, \qquad (1)$$

где *z*, *x*, *y* - соответственно конечные множества входных, выходных сигналов (алфавитов) и конечное множество внутренних состояний

(алфавита). $z_0 \in Z$ - начальное состояние; $\varphi(z,x)$ - функция переходов; $\psi(z,x)$ - функция выхода. Автомат функционирует в дискретном автоматном времени, моментами которого являются такты, т.е. примыкающие друг к другу равные интервалы времени, каждому из которых соответствуют постоянные значения входного, выходного сигнала и внутреннего состояния. Абстрактный автомат имеет один входной и один выходной каналы.

В момент *t*, будучи в состоянии *z(t),* автомат способен воспринять сигнал x(t) и выдать сигнал $y(t)=\psi[z(t),x(t)]$, переходя в состояние $z(t+1)=\varphi[z(t),z(t)]$, $z(t) \in Z$; $y(t) \in Y$; $x(t) \in X$. Абстрактный КА в начальном состоянии z_0 принимая сигналы *x(0), x(1), x(2)* … выдаёт сигналы *y(0), y(1), y(2)…* (выходное слово).

Существуют F-автомат 1 рода (Миля), функционирующий по схеме:

$$z(t+1)= \varphi[z(t),z(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (1)$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (2)$$

F -автомат 2-ого рода:

$$z(t+1)= \varphi[z(t),z(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (3)$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t-1)],\ t=1,2,3\ldots \quad (4)$$

Автомат 2-ого рода, для которого

$$y(t)=\psi[z(t)],\ t=0,1,2,\ldots \quad (5)$$

т.е. функция выходов не зависит от входной переменной x(t), называется *автоматом Мура.*

Т.о. уравнения 1-5 полностью задающие F- автомат, являются частным случаем уравнения

$$\vec{z}(t) = \Phi(\vec{Z}_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t), \quad (6)$$

где $\vec{z}$ - вектор состояния,

$\vec{x}$ - вектор независимых входных переменных,

$\vec{v}$ - вектор воздействий внешней среды,

$\vec{h}$ - вектор собственных внутренних параметров системы,

$\vec{Z}_0$ - вектор начального состояния,

t - время;

и уравнение $$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t), \quad (7)$$

когда система *S* - денорминированная и на её вход поступает дискретный сигнал *x.*

По числу состояний конечные автоматы бывают *с памятью* и *без памяти.* Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием. При этом согласно (2), работа комбинационной схемы заключается в том, что она ставит в соответствие каждому входному сигналу *x(t)* определённый выходной сигнал *y(t),* т.е. реализует логическую функцию вида:

$$y(t)=\psi[x(t)],\ t=0,1,2,\ldots$$

Эта функция называется булевой, если алфавиты *X* и *Y*, которым принадлежат значения сигналов x и y состоят из 2-х букв.

По характеру отсчёта времени (дискретному) F- автоматы делятся на синхронные и асинхронные. В *синхронных автоматах* моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. Реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт синхронизации. Асинхронный F-автомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный водной сигнал постоянной величины *x*, он может, как это следует из 1-5, несколько раз изменить своё состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдёт в устойчивое.

Для задания F-автомата необходимо описать все элементы множества $F=<z,x,y,\varphi,\psi,z_0>$, т.е. входной, внутренний и выходной алфавиты, а также функции переходов и выходов. Для задания работы F-автоматов наиболее часто используются табличный, графический и матричный способ.

В табличном способе задания используется таблицы переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы - его состояниям. При этом обычно 1-ый столбец слева соответствует начальному состоянию z_0. На пересечении *i*-ой строки и *j*-ого столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение $\varphi(z_k,x_i)$ функции переходов, а в таблице выходов - $\psi(z_k, x_i)$ функции выходов. Для *F- автомата Мура* обе таблицы можно совместить, получив т.н. отмеченную таблицу переходов, в которой над каждым состоянием z_k автомата, обозначающим столбец таблицы, стоит соответствующий этому состоянию, согласно (5), выходной сигнал $\psi(z_i)$.

Описание работы *F- автомата Мили* таблицами переходов φ и выходов ψ иллюстрируется таблицей 5.1, а описание F- автомата Мура - таблицей переходов 5.2.

Таблица 5.1

x_j	z_k			
	z_0	z_1	…	z_k
Переходы				
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_k,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_k,x_2)$
……				
x_l	…	…	…	…
Выходы				
x_1	$\psi(z_0,x_1)$	$\psi(z_1,x_1)$	…	$\psi(z_k,x_1)$
……				
x_l	$\psi(z_0,x_l)$	$\psi(z_1,x_l)$	…	$\psi(z_k,x_l)$

Таблица 5.2

x_i	$\psi(z_k)$			
	$\psi(z_0)$	$\psi(z_1)$	…	$\psi(z_k)$
	z_0	z_1	…	z_k
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_k,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_k,x_2)$
……				
x_l	$\varphi(z_0,x_l)$	$\varphi(z_1,x_l)$	…	$\varphi(z_k,x_l)$

Примеры табличного способа задания *F- автомата Мили* F1 с тремя состояниями, двумя входными и двумя выходными сигналами приведены в таблице 5.3, а для *F- автомата Мура* F2 - в таблице 5.4.

Таблица 5.3

x_j	z_0		
	z_0	z_1	z_2
Переходы			
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
Выходы			
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

Таблица 5.4

x_i	y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

Лекция 6. Непрерывно-стохастические модели (Q - схемы)

Цель лекции: методы теории массового обслуживания (ТМО). Различать потоки однородных и неоднородных событий.

К непрерывно – стохастическим моделям относятся *системы массового обслуживания* (англ. queuing system), которые называют *Q- схемами*.

Методы теории массового обслуживания (ТМО).

Предмет ТМО — системы массового обслуживания (СМО) и сети массового обслуживания. Под СМО понимают динамическую систему, предназначенную для эффективного обслуживания случайного потока заявок при ограниченных ресурсах системы. Обобщённая структура СМО приведена на рисунке 6.1.

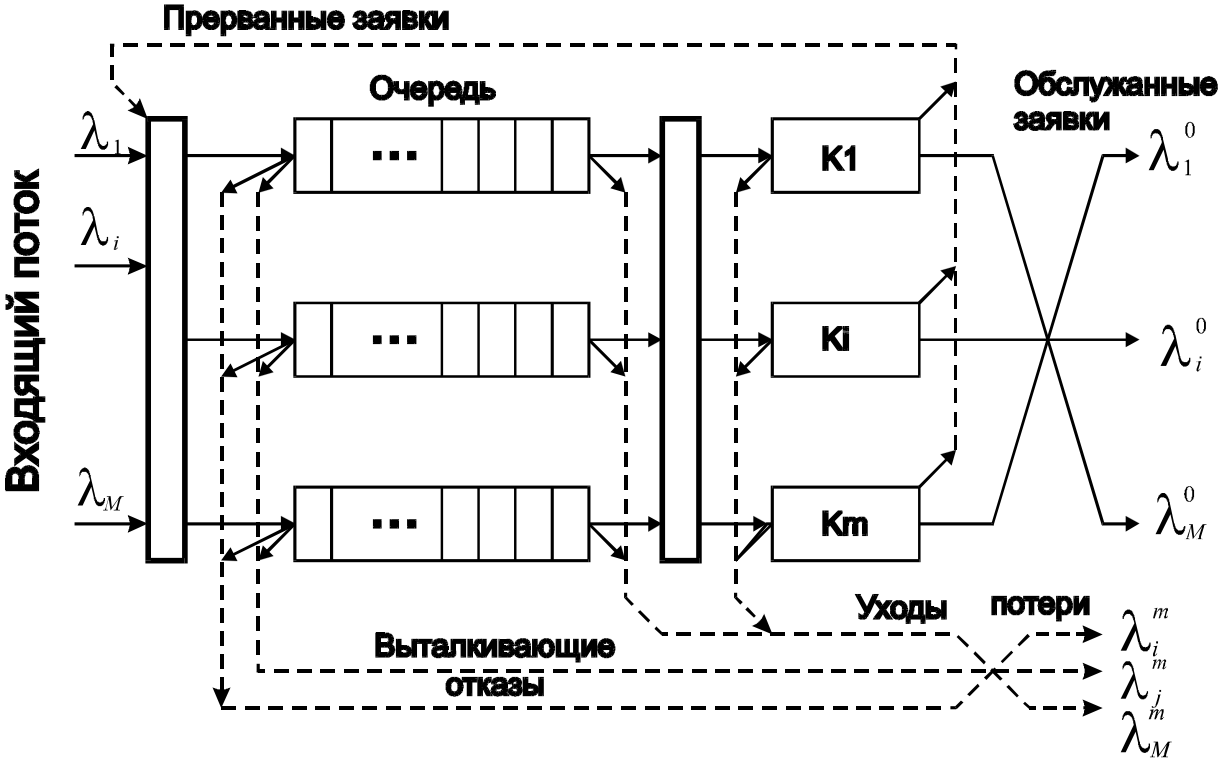

Рисунок 6.1 - Схема СМО

Поступающие на вход СМО однородные заявки в зависимости от порождающей причины делятся на типы, интенсивность потока заявок типа *i* (i=1…M) обозначено λ_i. Совокупность заявок всех типов - входящий поток СМО.

Обслуживание заявок выполняется *m* каналами. Различают универсальные и специализированные каналы обслуживания. Для универсального канала типа *j* считается известными функции распределения $F_{ji}(\tau)$ длительности обслуживания заявок произвольного типа. Для специализированных каналов функции распределения длительности обслуживания каналов заявок некоторых типов являются неопределёнными, назначение этих заявок на данный канал.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например, потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удалённых терминалов и т.д. При этом характерным для работы таких

объектов является случайное поведение заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени.

Q - схемы можно исследовать аналитически и имитационными моделями. Последнее обеспечивает большую универсальность.

Рассмотрим понятие массового обслуживания.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания заявкой и собственно обслуживание заявки. Это можно отобразить в виде некоторого *i*-ого прибора обслуживания $П_i$, состоящего из накопителя заявок, в котором может находится одновременно $l_i=0...L_i^H$ заявок, где L_i^H - ёмкость *i*-ого накопителя, и канала обслуживания заявок k_i.

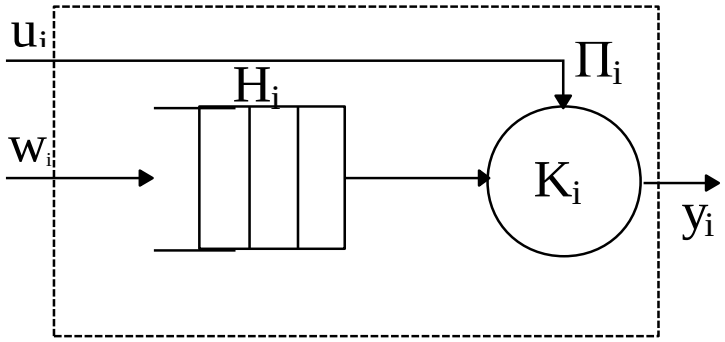

Рисунок 6.2 - Схема прибора СМО

На каждый элемент прибора обслуживания $П_i$ поступают потоки событий: в накопитель H_i поток заявок w_i, на канал k_i - поток обслуживания u_i.

Потоком событий (ПС) называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий. *Однородный ПС* характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задаётся последовательностью $\{t_n\}=\{0\le t_1\le t_2\ldots\le t_n\le\ldots\}$, где t_n - момент поступления *n* события - неотрицательное вещественное число. ОПС может быть также задан в виде последовательности промежутков времени между *n*-ым и *n-1*-ым событиями $\{\tau_n\}$.

Неоднородным ПС называется последовательность $\{t_n, f_n\}$, где t_n- вызывающие моменты; f_n- набор признаков события. Например, может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т.п.

Рассмотрим ОПС, для которого $\tau_i\in\{\tau_n\}$- случайные величины, независимые между собой. Тогда ПС называется потоком с *ограниченным последействием.*

ПС называется *ординарным,* если вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t попадает больше одного события $P_{\geq 1}(t, \Delta t)$ пренебрежительно мала.

Если для любого интервала Δt событие $P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) + P_{\geq 1}(t, \Delta t)=1$, $P_1(t, \Delta t)$ - вероятность попадания на интервал Δt ровно одного события. Как сумма вероятностей событий, образующих полную группу и несовместных, то для ординарного потока событий $P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) \approx 1$, $P_{\geq 1}(t, \Delta t)=\Theta(\Delta t)$, где $\Theta(\Delta t)$- величина, порядок малости который выше, чем Δt, т.е. $lim(\Theta(\Delta t))=0$ при $\Delta t \to 0$.

Стационарным ПС называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени 0 - t взят этот участок. Для ОПС справедливо $0 \cdot P_0(t, \Delta t) + 1 \cdot P_1(t, \Delta t)= P_1(t, \Delta t)$ - среднее число событий на интервале Δt. Среднее число событий, наступающих на участке Δt в единицу времени составляет $P_1(t, \Delta t)/\Delta t$. Рассмотрим предел этого выражения при $\Delta t \to 0$

$$\lim P_1(t, \Delta t)/\Delta t=\lambda(t) \cdot (1/\text{един.вр.}).$$

Если этот предел существует, то он называется интенсивностью (плотностью) ОПС. Для стандартного ПС $\lambda(t)=\lambda=const$.

Применительно к элементарному каналу обслуживания k_i можно считать что поток заявок $w_i \in W$, т.е. интервалы времени между моментами появления заявок на входе k_i образуют подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания $u_i \in U$, т.е. интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявки образуют подмножество управляемых переменных.

Заявки, обслуженные каналом k_i и заявки, покинувшие прибор $П_i$ по различным причинам не обслуженными, образуют выходной поток $y_i \in Y$.

Процесс функционирования прибора обслуживания $П_i$ можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени $Z_i(t)$. Переход в новое состояние для $П_i$ означает изменение кол-ва заявок, которые в нём находятся (в канале k_i и накопителе H_i). Т.о. вектор состояний для $П_i$ имеет вид : $\vec{Z}_i=(z_i^H, z_i^K)$, где z_i^H - состояния накопителя, (z_i^H =0 - накопитель пуст, z_i^H =1- в накопителе одна заявка…, $z_i^H = L_i^H$ - накопитель занят полностью; z_i^K - состояние канала k_i (z_i^K =0 - канал свободен, z_i^K =1 канал занят).

Q-схемы реальных объектов образуются композицией многих элементарных приборов обслуживания $П_i$. Если k_i различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание (многоканальная Q-схема), а если приборы $П_i$ и их параллельные композиции соединены последовательно, то имеет место многофазное обслуживание (многофазная Q-схема).

Таким образом, для задания *Q*-схемы необходимо оператор сопряжения *R*, отражающий взаимосвязь элементов структуры.

Связи в *Q*-схеме изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают разомкнутые и замкнутые *Q*-схемы. В *разомкнутой* выходной поток не может снова поступить на какой-либо элемент, т.е. обратная связь отсутствует.

Собственными (внутренними) параметрами *Q*-схемы будут являться кол-во фаз L_{Φ}, количество каналов в каждой фазе, L_{kj}, $j=1 \ldots L_{\Phi}$, количество накопителей каждой фазы L_{kj}, $k=1 \ldots L_{\Phi}$, ёмкость *i*-ого накопителя L_i^H. Следует отметить, что в теории массового обслуживания в зависимости от ёмкости накопителя применяют следующую терминологию:

- системы с потерями ($L_i^H=0$, накопитель отсутствует);
- системы с ожиданием ($L_i^H \to \infty$);
- системы с ограниченной ёмкостью накопителя H_i (смешанные).

Обозначим всю совокупность собственных параметров *Q*-схемы как подмножество *H*.

Для задания *Q*-схемы также необходимо описать алгоритмы её функционирования, которые определяют правила поведения заявок в различных неоднозначных ситуациях.

В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе H_i и обслуживания заявок каналом k_i. Неоднородность потока заявок учитывается с помощью введения класса приоритетов.

В зависимости от динамики приоритетов *Q*-схемы различают статические и динамические. Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний *Q*-схемы, т.е. они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования. Динамические приоритеты возникают при моделировании. Исходя из правил выбора заявок из накопитель H_i на обслуживание каналом k_i можно выделить *относительные* и *абсолютные* приоритеты. *Относительный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель *H*, ожидает окончания обслуживания представляющей заявки каналом k_i и только после этого занимает канал. *Абсолютный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель, прерывает обслуживание каналом k_i заявки с более низким приоритетом и сами занимает канал (при этом вытесненная из k_i заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в H_i).

Необходимо также знать набор правил, по которым заявки покидают H_i и k_i: для H_i – либо правила переполнения, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в H_i; для k_i – правила выбора маршрутов или направлений ухода. Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале k_i, т.е. правила блокировок канала. При этом различают блокировки k_i по выходу и по входу. Такие блокировки отражают наличие управляющих связей в *Q*-схеме, регулирующих поток

заявок в зависимости от состояний *Q*-схемы. Набор возможных алгоритмов поведения заявок в *Q*-схеме можно представить в виде некоторого оператора алгоритмов поведения заявок *A*.

Таким образом, *Q*-схема процесса функционирования СМО любой сложности, задаётся в виде набора множеств: $Q = <W, U, H, Z, R, A>$.

Лекция 7. Имитационное моделирование систем

Цель лекции: методы определения характеристик моделируемых систем. Измеряемые характеристики моделируемых систем.

Процедура имитационного моделирования.

Определение метода имитационного моделирования. Метод ИМ заключается в создании логико-аналитической (математической модели системы и внешних воздействий), имитации функционирования системы, т.е. в определении временных изменений состояния системы под влиянием внешних воздействий и в поучении выборок значений выходных параметров, по которым определяются их основные вероятностные характеристики. Данное определение справедливо для стохастических систем.

При исследовании детерминированных систем отпадает необходимость изучения выборок значений выходных параметров.

Модель системы со структурным принципом управления представляет собой совокупность моделей элементов и их функциональные взаимосвязи. Модель элемента (агрегата, обслуживающего прибора) - это, в первую очередь, набор правил (*алгоритмов*) поведения устройства по отношению к выходным воздействиям (*заявкам*) и правил изменений состояний элемента. Элемент отображает функциональное устройство на том или ином уровне детализации. В простейшем случае устройство может находится в работоспособном состоянии или в состоянии отказа. В работоспособном состоянии устройство может быть *занято,* например, выполнение операции по обслуживанию заявки или быть *свободным.* К правилам поведения устройства относятся правила выборки заявок из очереди; реакция устройства на поступление заявки, когда устройство занято или к нему имеется очередь заявок; реакция устройства на возникновение отказа в процессе обслуживания заявки и некоторые другие.

Имитационное моделирование (ИМ) — это метод исследования, который основан на том, что анализируемая динамическая система заменяется имитатором и с ним производятся эксперименты для получения об изучаемой системе. Роль имитатора зачастую выполняет программа ЭВМ.

Основная идея метода ИМ состоит в следующем. Пусть необходимо определить функцию распределения случайной величины ***y***. Допустим, что искомая величина *y* может быть представлена в виде зависимости:

$$y=f(\alpha,\beta,....,\omega),$$

где $\alpha,\beta,....,\omega$ случайные величины с известными функциями распределения.

Для решения задач такого вида применяется следующий алгоритм:

1) по каждой из величин $\alpha,\beta,....,\omega$ производится случайное испытание, в результате каждого определяется некоторое конкретное значение случайной величины $\alpha_i,\beta_i,....,\omega_i$;

2) используя найденные величины, определяется одно частное значение $\mathbf{y_i}$ по выше приведённой зависимости;

3) предыдущие операции повторяются N раз, в результате чего определяется N значений случайной величины y;

4) на основании N значений величины находится её эмпирическая функция распределения.

Имитация функционирования системы.

Предположим, исследуется вычислительная система (ВС), состоящая из процессора 1 с основной памятью, устройство вода перфокарт 4, АЦПУ 2 и дисплея 3 (см.рисунок 7.1.).

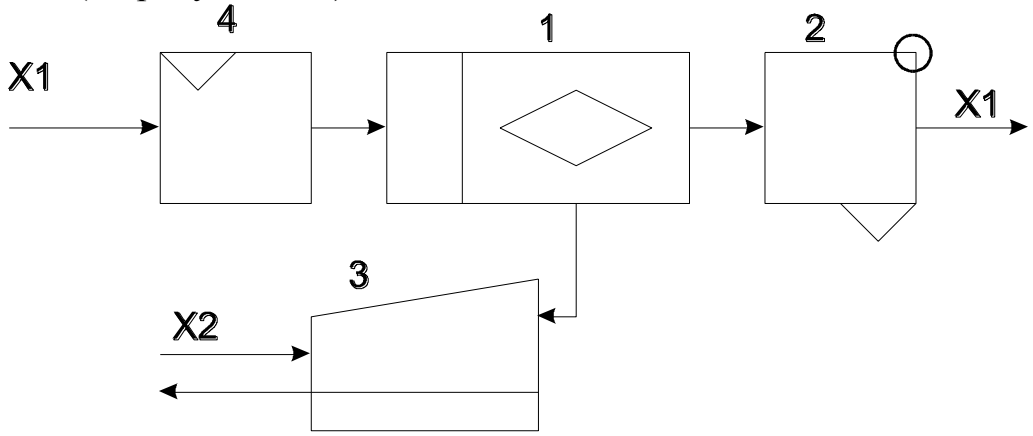

Рисунок 7.1 - Упрощённая схема моделируемой системы

Через устройство 4 поступает поток заданий *X1*. Процессор обрабатывает задания и результаты выдаёт на *АЦПУ 2*. Одновременно с этим *ВС* используется, например, как информационно-справочная система. Оператор-пользователь, работающий за дисплеем, посылает в систему запросы *X2*, которые обрабатываются процессором и ответы выводятся на экран дисплея. Процессор работает в 2-х программном режиме: в одном разделе обрабатываются задания *X1*, в другом, с более высоким относительным приоритетом запросы *X2*. Представим данную *ВС* в упрощённом варианте в виде стохастической сети из 4-х СМО. Потоки заданий и запросы будем называть потоками заявок. Считаем потоки *X1 и X2* независимыми. Известны ф.р. периодов следования заявок τ_1 и τ_2 и длительность обслуживания T_{1K} , T_{2K} заявок в *к*-ом устройстве. Требуется определить времена загрузки каждого устройства и времена реакции по каждому из потоков.

Вначале определяется момент поступления в систему 1-ой заявки потока *X1* по результатам случайного испытания в соответствии с ф.р. периода следования заявок.

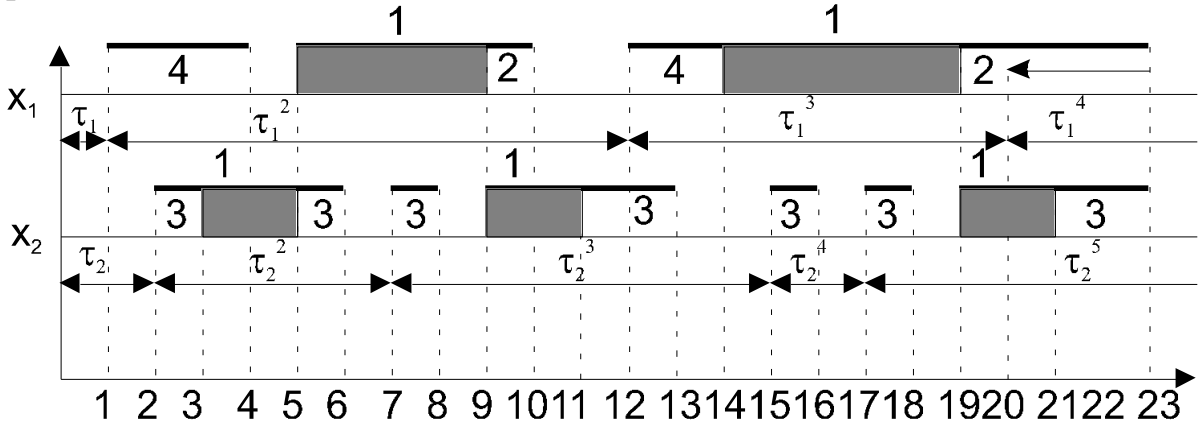

Рисунок 7.2 - Временная диаграмма функционирования ВС

На рисунке 7.2 это момент времени $t_1=0+\tau_1^1$ (здесь и далее верхний индекс обозначает порядковый номер заявки данного потока). То же самое делается для потока *X2*. На рисунке 7.2 момент поступления 1-ой заявки потока *X2* $t_2=0+\tau_2^1$. Затем находится минимальное время, т.е. наиболее раннее событие. В примере это время t_1. Для 1-ой заявки потока *X1* определяется время обслуживания устройством ввода перфокарт T^1_{14} методом случайного испытания и отмечается момент окончания обслуживания $t_4=t_1+T^1_{14}$. На рисунке показан переход устройства 4 в состояние «занято». Одновременно определяется момент поступления следующей заявки потока *X1:* $t_{12}=t_1+\tau_1^2$. Следующее минимальное время это момент поступления заявки потока *X2* - t_2. Для этой заявки находится время обслуживания на дисплее T^1_{23} и отслеживается время окончания обслуживания $t_3=t_2+T^1_{23}$. Определяется момент поступления второй заявки потока *X2:* $t_7=t_2+\tau_2^2$. Снова выбирается минимальное время — это t_3. В этот момент заявка потока *X2* начинает обрабатываться процессором. По результату случайного испытания определяется время её обслуживания T^1_{21} и отмечается момент $t_5=t_3+T^1_{21}$ окончания обслуживания. Следующее минимальное время t_4 - момент завершения обслуживания заявки потока *X1* устройством 4. С этого момента заявка может начать обрабатываться процессором, но он занят обслуживанием потока *X2*. Тогда заявка потока *X1* переходит в состояние ожидания, становиться в очередь. В следующий момент времени t_5 освобождается процессор. С этого момента процессор начинает обрабатывать заявку потока *X1,* а заявка потока *X2* переходит на обслуживание дисплеем, т.е. ответ на запрос пользователя передаётся из основной памяти в буферный накопитель дисплея. Далее определяются соответствующие времена обслуживания: T^1_{11} и T^1_{23} и отмечаются моменты времени $t_9=t_5+T^1_{11}$ и $t_6=t_5+T^1_{23}$. В момент t_6 полностью завершается обработка первой заявки потока *X2*. По разности времени t_6 и t_2 вычисляется время реакции по этой заявке $u^1_2=t_6-$

t_2. Следующий минимальный момент t_7 - это наступление 2-ой заявки потока *X2*. Определяет время поступления очередной заявки этого потока $t_{15}= t_7+ \tau_2^3$. Затем вычисляется время обслуживания 2-ой заявки на дисплее T^2_{23} и отмечается момент $t_8=t_7+ T^2_{23}$, после чего заявка становится в очередь, т.к. процессор занят. Эта заявка поступит на обслуживание в процессор только после его освобождения в момент t_9 . В этот момент заявка потока *X1* начинает обслуживаться в АЦПУ. Определяются времена обслуживания T^2_{21} и T^1_{12} по результатам случайных испытаний и отмечаются моменты окончания обслуживания $t_{11}= t_9+T^2_{23}$ и $t_{10}= t_9+T^1_{12}$. В момент времени t_{10} завершается полное обслуживание 1-ой заявки потока *X1*. Разность между этим моментом и моментом времени t_1 даёт 1-ое значение времени реакции по потоку *X1* $u^1_1= t_{10}- t_1$.

Указанные процедуры выполняются до истечения времени моделирования. В результате получается некоторое количество (выборка) случайных значений времени реакции (u_1) и (u_2) по 1-ому и 2-ому потокам. По этим значениям могут быть определены эмпирические функции распределения и вычислены количественные вероятностные характеристики времени реакции. В процессе моделирования можно суммировать продолжительности занятости каждого устройства обслуживанием всех потоков. Например, на рисунке 7.2 занятость процессора 1 выделена заштрихованными ступеньками. Если результаты суммирования разделить на время моделирования, то получатся коэффициенты загрузки устройств.

Можно определить время ожидания заявок в очереди, обслуженных системой, среднюю и максимальную длину очереди заявок к каждому устройству, требуемая ёмкость памяти и др.

Имитация даёт возможность учесть надёжные характеристики ВС. В частности, если известны времена наработки на отказ и восстановления всех входящих в систему устройств, то определяются моменты возникновения отказов устройств в период моделирования и моменты восстановления. Если устройство отказало, то возможны решения:

- снятие заявки без возврата;
- помещение заявки в очередь и дообслуживание после восстановления;
- поступление на повторное обслуживание из очереди.

Методы определения характеристик моделируемых систем.

Измеряемые характеристики моделируемых систем. При имитационном моделировании можно измерять значения любых характеристик, интересующих исследователя. Обычно по результатам вычислений определяются характеристики всей системы, каждого потока и устройства.

Для всей системы производится подсчёт поступивших в систему заявок, полностью обслуженных и покинувших систему заявок без обслуживания по

тем или иным причинам. Соотношения этих величин характеризует производительность системы при определённой рабочей нагрузке.

По каждому потоку заявок могут вычисляться времена реакций и ожидания, количества обслуженных и потерянных заявок. По каждому устройству определяется время загрузки при обслуживании одной заявки м число обслуженным устройством заявок, время простоя устройства в результате отказов и количество отказов, возникших в процессе моделирования, дины очередей и занимаемые ёмкости памяти.

При статистическом моделировании большая часть характеристик — это случайные величины. По каждой такой характеристике **y** определяется *N* значений, по которым строится гистограмма относительных частот, вычисляется математическое ожидание, дисперсия и моменты более высокого порядка, определяются средние по времени и максимальные значения. Коэффициенты загрузки устройств вычисляются по формуле:

$$\rho_k=V_k\cdot N_{ok}/T_m\ , \qquad (1)$$

V_k- среднее время обслуживания одной заявки к-ым устройством;

N_{ok} - количество обслуженных заявок устройством за время моделирования T_m.

Определение условий удовлетворения стохастических ограничений при имитационном моделировании производится путём простого подсчёта количества измерений, вышедших и не вышедших за допустимые пределы.

Расчёт математического ожидания и дисперсии выходной характеристики. В случае стационарного эргодического процесса функционирования системы вычисление *М(y)* и *Д(y)* выходной характеристики *y* производится усреднением не по времени, а по множеству $N_{знач.}$, измеренных по одной реализации достаточной длительности. В целях экономия ОЗУ ЭВМ *М(y*) и *Д(y)* вычисляются по рекуррентным формулам:

$$m_n=m_{n-1}\cdot(n-1)/n + y/n; \qquad (2)$$

где m_{n-1} - математическое ожидание, вычисленное на предыдущем шаге.

$$d_n=d_{n-1}*(n-2)/(n-1) + 1/n\cdot(y_n-m_{n-1})^2 \qquad (3)$$

здесь d_{n-1} - дисперсия, вычисленная на предыдущем шаге.

При большом количестве измерений эти оценки являются состоятельными и несмещёнными.

Расчёт среднего по времени значения выходной характеристики.

Например, средняя длина очереди к каждому устройству вычисляется по формуле:

$$l_N=\sum_{i=1}^{N} l_i\tau_i \Big/ T_m \qquad (4)$$

где i - номер очередного изменения состояния очереди (занесение заявки в очередь или исключение из очереди); N - количество изменений

состояния очереди; τ_i - интервал времени между двумя последними изменениями очереди.

Ёмкость накопитель:

$$q_n = \sum_{i=1}^{N} q_i \tau_i \Big/ T_m, \qquad (5)$$

где q_i - ёмкость накопителя, занятая в интервале между двумя последними обращениями к накопителю для ввода-вывода заявки.

Лекция 8. Моделирование случайных воздействий

Цель лекции: рассмотрение особенности моделирования случайных событий. Преобразование случайных величин.

Важной задачей в практике имитационного моделирования систем на ЭВМ является расчёт случайных величин. В языках программирования существуют датчики равномерно распределённых псевдослучайных величин в интервале {0,1}. Остановимся на вопросах преобразования последовательности псевдослучайных величин $\{X_i\}$ в последовательности $\{Y_i\}$ с заданным законом распределения и моделировании различных случайных событий.

Рассмотрим особенности моделирования случайных событий.

Пусть имеются случайные числа x_i, т.е. возможные значения случайной величины ξ, равномерно распределённой в интервале {0,1}. Необходимо реализовать случайное событие A, наступающее с заданной вероятностью P**.** Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i удовлетворяет неравенству:

$$x_i \le P. \qquad (1)$$

Тогда вероятность события A будет : $P(A) = \int_0^p dx = p$. Противоположное событию A состоит в том, что $x_i > p$. Тогда $P(\overline{A}) = 1 - P$. Процедура моделирования состоит в этом случае в выборе значений x_i и сравнение их с p. При этом, если условие (1) удовлетворяется, то исходом испытания будет событие A.

Таким же образом можно рассмотреть группу событий. Пусть $A_1, A_2 \ldots A_n$ – полная группа событий, наступающая с вероятностями $P_1, P_2, \ldots P_n$ соответственно. Определим A_m как событие, состоящее, в ом, что выбранное значение x_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству:

$$l_{m-1} < x_i < l_m, \text{ где } l_k = \sum_{i=1}^{k} p_i. \qquad (2)$$

Тогда $P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = P_m$. Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательности сравнений случайных чисел x_i со значениями l_k. Исходом испытания оказывается событие A_m, если выполняется условие (2). Эту процедуру называют определением исхода по жребию в соответствии с вероятностями $P_1, P_2, \ldots P_n$.

При моделировании систем часто необходимо осуществить такие испытания, при которых искомый результат является сложным событием, зависящим от 2-х и более простых.

Пусть например, независимые события A и B имеют вероятности наступления P_A и P_B. Возможными исходами совместных испытаний в этом случае будут события $AA, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}$ с вероятностями P_AP_B, $(1-P_A)P_B$, $P_A(1-P_B)$, $(1-P_A)(1-P_B)$. Для моделирования совместных испытаний можно использовать последовательную проверку условия (1). Он требует двух чисел x_i.

Рассмотрим случай, когда события A и B являются зависимыми и наступают с вероятностями P_A и P_B. Обозначим через P(B/A) условную вероятность события B при условии, что событие A произошло. Считаем, что $P(B/A)$ задана. Из последовательности случайных чисел $\{X_i\}$ извлекается определённое число x_m и проверяется справедливость неравенства $x_m<P_A$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие A. Для испытания, связанного с событием B используется вероятность $P(B/A)$. Из совокупности чисел $\{X_i\}$ берётся очередное число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \le P(B/A)$. В зависимости от того выполняется или нет это неравенство, исходом испытания является AB или $\overline{A}\overline{B}$. Если неравенство $x_m<P_A$ не выполняется, то наступило событие $\overline{A}$. Поэтому для испытания, связанного с событием B необходимо определить вероятность:

$$P(B/\overline{A}) = [P(B) - P(A) / P(B/A)] / (1 - P(A)).$$

Выберем из совокупности $\{X_i\}$ число x_{m+1} и проверим справедливость неравенства $x_m \le P(B/\overline{A})$. В зависимости от того, выполняется оно или нет, получаем исходы испытания $\overline{A}B$. Алгоритм вычислений можно представить в виде схемы, которая изображена на рисунке 8.1.

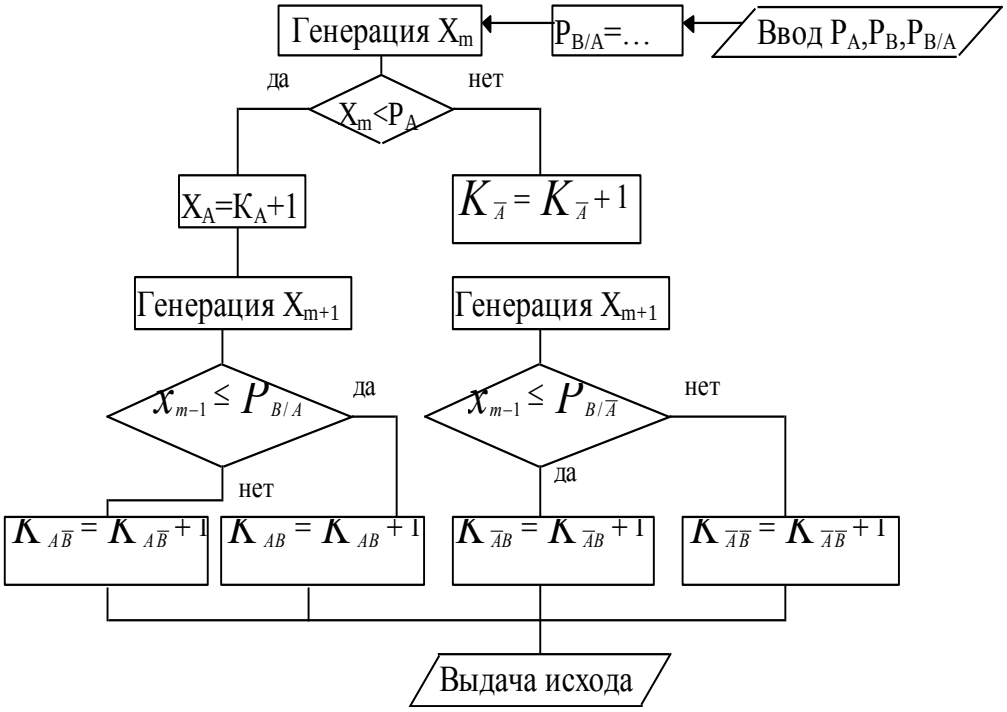

Рисунок 8.1 - Схема моделирования группы случайных событий

Преобразование случайных величин.

Дискретная случайная величина η принимает значения $y_1 \leq y_2\ y_3 \ldots\ y_l$ с вероятностями $P_1, P_2 \ldots, P_l$ составляющими дифференциальное распределение вероятностей:

y	$y_1\ y_2 \ldots\ldots\ y_j \ldots$
P(η=y)	$P_1, P_2 \ldots\ldots P_j \ldots$ (3)

При этом интегральная функция распределения $F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = \sum_{j=1}^{m} P_j$;

$y_m \leq y_{m+1}$; m=1,2,...

$F_\eta(y)=0$, $y<y_1$. (4)

Для получения дискретных случайных величин можно использовать метод обратной функции. Если ξ - равномерно распределённая на интервале (0, 1), случайная величина η получается с помощью преобразования

$$\eta=F_\eta^{-1}(\xi), \quad (5)$$

где F_η^{-1} - функция, обратная F_η.

Алгоритм вычисления по (4) и (5) сводится к выполнению следующих действий:

если $x_1<P_1$ то $\eta=y_1$ иначе,
если $x_2<P_1+P_2$ то η= e,y_2 иначе
.....
если $x_j<\sum_{j=1}^{m} P_j$ то $\eta=y_m$ иначе (6)
.....

При счёте по (6) среднее число циклов сравнения равняется $\sum_{j=1}^{\infty} j\,P_j$.

Пример 1. Необходимо методом обратной функции на основании базовой последовательности случайных чисел $\{x_i\}$, равномерно распределённых в интервале (0,1), получить последовательность чисел $\{y_i\}$, имеющих биноминальное распределение, задающее вероятность *y* удачных исходов в *N* реализациях некоторого эксперимента:

$P(\tau_i=y)=P_N(y)=C_N^y P^y(1-P)^{N-y}$, где P=0.5 и N=6; $C_N^y=N!/y!(N-y)!$

Математическое ожидание и дисперсия биноминального распределения соответственно будут *M[y]=np(1-P).* Используя для P_j обозначения, принятые в (6), вычислим:

j	…	1	2	3	4	5	6	7
y_j	…	0	1	2	3	4	5	6
P_j	…	0.01562	0.09375	0.23438	0.3125	0.23438	0.09375	0.01562
$\sum_{j=1}^{m} P_j$		0.01562	0.10937	0.34375	0.65625	0.89063	0.98438	1.0000

…

Например, получив из равномерного распределения число $X_i=0.89063$ и проведя сравнения по алгоритму (6), найдём, что $0.85393<0.89063$, т.е. $y_i=4$. При этом среднее число циклов сравнения $\bar{\mu}=1\cdot0.01562+2\cdot0.09375+3\cdot0.23438+4\cdot0.31250+5\cdot0.23438+6\cdot(0.09375+0.01562)\approx3.98$.

Вычисление непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина η задана интегральной функцией распределения:

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)dy,$$

где $f_\eta(y)$ - плотность вероятностей.

Для получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, как и для дискретных величин можно использовать метод обратной функции. Взаимно однозначная монотонная функция $\eta=F_\eta^{-1}(\xi)$, полученная решением относительно η управления $F_\eta(y)=\xi$ преобразует равномерно распределённую на интервале (0,1) величину ξ в η с требуемой плотностью $f_\eta(y)$.

Действительно, если случайная величина η имеет плотность распределения $f_\eta(y)$, то распределение случайной величины $\xi=\int_0^{\eta} f_\eta(y)dy$ является равномерным.

Т.о. чтобы получить число, принадлежащее последовательность случайных чисел {y}, имеющих функцию плотности $f_\eta(y)$, необходимо разделить относительно y_i управление

$$\int_{-\infty}^{y_i} f_\eta(y)dy = x_j \qquad (7)$$

.

Пример 2. Необходимо получить случайные числа y_i с показательным законом распределения.

$$f_\eta(y)=\lambda e^{-\lambda y},\ y>0.$$

В силу соотношения (7) получим $\lambda\int_0^{y_i} e^{-\lambda y}dy = x_i$, где x_i - случайное число, имеющее равномерное распределение в интервале (0,1), тогда $1-e^{\lambda y_i} = x_j, y_j = -\ln(1-x_j)/\lambda.$

Рассмотрим универсальный метод моделирования непрерывных случайных величин (*метод исключений*).

При моделировании случайной величины **y** с плотностью распределения вероятностей $f_\eta(y)$ в интервале $a \le y \le b$ независимые значения x_m и x_{m+1} преобразуются в значения

$$y_{1m}=a+(b-a)\cdot x_m \qquad (8)$$

$$z_{1m+1}=f_{1\eta}(y)\cdot x_{m+1} \qquad (9)$$

где $f_{1\eta}(y)=max|f_\eta(y)|$. При этом y_{1m} и z_{1m+1} - значения случайных величин, равномерно распределенных на интервале (a,b) и $(0,f_{1m})$. Эти значения можно рассматривать как абсциссы и ординаты случайных точек (см.рисунок 8.2).

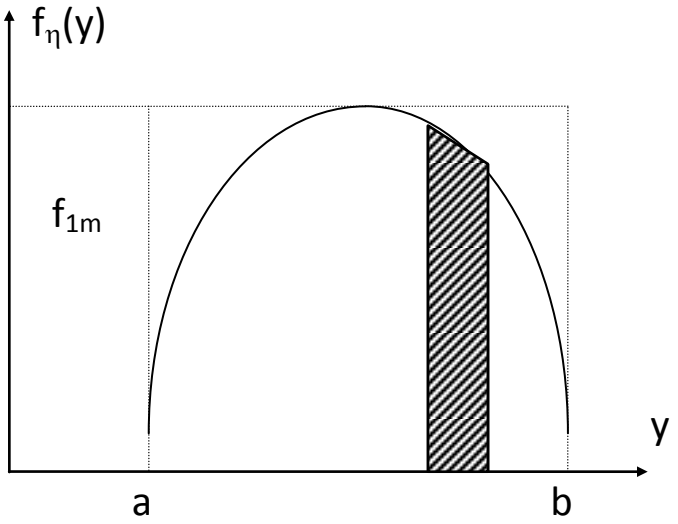

Рисунок 8.2

Иллюстрация метода исключений равномерно распределяющихся внутри прямоугольника со сторонами $b-a$ и f_{1m}, охватывающего кривую распределения $f_\eta(y)$ (см. рисунок 8.2.).

Если $z_{1m+1} \le f_\eta(y_{m1})$, (10)

тогда пара y_{1m}, z_{1m+1} определяет случайную точку под кривой f_η. Вероятность попадания случайной точки, удовлетворяющей условию (10) под кривую f_η равна единице, а вероятность попадания в заштрихованную элементарную площадку равна $f_\eta(y_{1m}) \cdot \Delta y_{1m}$. Это обозначает, что абсциссы y_{1m} случайных точек, попадающих под кривую f_η - значения случайной величины y с заданной плотностью вероятности $f_\eta(y)$. Моделируемый алгоритм состоит из функций:

1) получения x_{m1} и x_{m+1} от датчика;

2) расчёта y_{1v} и z_{1m+1} согласно (8) и (9);

3) вычисления $f_\eta(y_{1m})$;

4) сравнения z_{1m+1} с $f_\eta(y_{1m})$.

Если условия (10) выполняются, то $y=y_{1m}$; если нет, то значения y_{1m} и z_{1m+1} исключаются и процесс повторяется, начиная с пункта 1. При моделировании системы 2-х случайных величин ($y_1 y_2$) с плотностью вероятности $f(y_1,y2)$, $a_1 \le y_1 \le b_1$; $a_2 \le y2 \le b_2$, аналогично моделированию одной случайной величины, три значения: x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, выданные датчиком Е, преобразуются в значения:

$$y_{1m}=a_1+(b_1-a_1)x_m. \quad (11)$$

$$y_{2m}=a_2+(b_2-a_2)x_{m+1}. \quad (12)$$

$$z_{3m}=f_{\eta m}x_{m+2}, \text{ где } f_{\eta m}=\max[f(x_1,x_2)]. \quad (13)$$

Если $z_{3m} \le f(y_{1m},y_{2m})$, (14)

то $y_1=y_{1m}$; $y_2=y_{2m}$.

В этом случае случайные точки с координатами y_{1m}, y_{2m}, z_{3m} - равномерно распределены в пределах параллелепипеда со сторонами, равными $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$, $f_{\eta m}$ и условие (14) означает попадание точки под поверхность f_η. Аналогично моделируется система n случайных величин ($y_1,y_2,\ldots,y_n$).

Лекция 9. Оценка качества модели

Цель лекции: линейные и нелинейные коэффициенты корреляции. Коэффициент корреляции двух динамических рядов.

Оценка качества показывает, насколько теоретические вычисления по построенной модели отклоняются от экспериментальных данных. Наличие связи двух переменных называется *корреляцией*.

Если оценка качества применяется до исследования, то она решает задачу: есть ли связь между входом X и выходом Y и оценивает силу этой связи.

Линейный коэффициент корреляции.

Линейный коэффициент корреляции указывает, есть ли между двумя рядами X и Y линейная зависимость и какой силы. Вычисляется по следующей формуле:

$$KR = \frac{m_{x\,y} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y}.$$

m_x , m_y , m_{xy} — математическое ожидание x, y, xy:

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i m_{x\,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i .$$

Дисперсия σ_x^2 и σ_y^2 показывает, насколько разбросаны точки от средней величины:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_x)^2}{n} \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m_y)^2}{n}.$$

Линейный коэффициент корреляции может иметь знак плюс или минус. Положительная его величина свидетельствует о прямой связи между *X* и *Y*. Чем ближе *KR* к *+1*, тем связь более тесная. Отрицательная величина его свидетельствует об обратной связи; в этом случае границей является –1. Близость *KR* к нулю свидетельствует о слабой связи между *X* и *Y* (см. рисунок 9.1).

Рисунок 9.1- Виды корреляций

Нелинейный коэффициент корреляции.

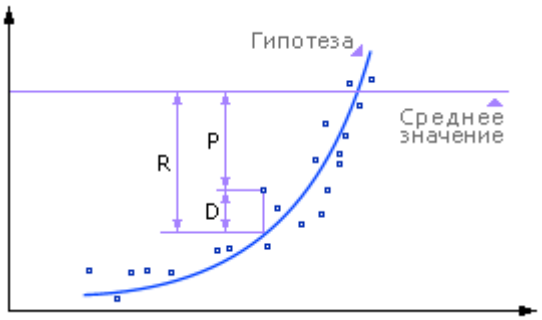

Рисунок 9.2 - Нелинейный коэффициент корреляции

Нелинейный коэффициент корреляции вычисляется по следующей формуле:

$$KNR = \sqrt{P - \frac{D}{P}},$$

P — разброс между реальными точками и средней величиной:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{P\cdot} - y_i^{C\cdot})^2}{n},$$

D — разброс между гипотетической кривой и реальными точками:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{\Gamma\cdot} - y_i^{C\cdot})^2}{n},$$

R — разброс между гипотезой и средней величиной:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{\Gamma\cdot} - y_i^{C\cdot})^2}{n}.$$

Коэффициент корреляции двух динамических рядов.

X и *Y* представляются в виде рядов z_i и u_i для того, чтобы исключить постоянную составляющую: $z_i = x_i - m_x$, $u_i = y_i - m_y$:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i^2}}.$$

При $r \to 1$ имеет место тесная корреляция. При $r \to 0$ процессы взаимно ортогональны, корреляции нет, процессы не связаны друг с другом.

Корреляция внутри динамического ряда.

Исследуется сила связи между прошлым и настоящим одного процесса. Для этого сигнал сравнивают с самим собой, сдвинутым во времени, и вычисляют коэффициент корреляции двух динамических рядов.

Поиск периодичности ряда.

Есть ли периодичность в динамическом ряду, можно выяснить, проделав прямое преобразование Фурье и рассмотрев спектр исследуемого сигнала.

Зависимость динамики ряда Z от двух динамических факторов X и Y.

Коэффициент множественной корреляции *R*:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{xy}^2 - 2 r_{xy} \cdot r_{xz} \cdot r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}}$$

$$r_{xz} = \frac{m_{xz} - m_x m_z}{\sigma_x \sigma_z} \quad r_{xy} = \frac{m_{xy} - m_x' m_y}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$r_{yz} = \frac{m_{yz} - m_y m_z}{\sigma_y \sigma_z}.$$

Связь двух признаков определяется формулой:

$$K = \frac{ad - bc}{ad + bc},$$

где K — это коэффициент ассоциаций, позволяет выяснить, имеется ли какая-либо связь между двумя признаками. Если данный коэффициент близок к единице, то в этом случае можно говорить о существовании такой связи.

Пример. Попытаемся с помощью данной формулы выяснить, есть ли связь между ростом и весом человека? Пусть в нашем распоряжении имеются данные о весе и росте 500 человек:

Таблица 9.1

	Вес < 67 кг	Вес > 67 кг
Рост < 167 см	a = 304 чел.	b = 17 чел.
Рост > 167 см	c = 112 чел.	d = 67 чел.

По формуле: K = (304 · 67 – 17 · 112)/(304 · 67 + 17 · 112) = 0.83. Так как величина 0.83 близка к 1, то можно говорить о существовании определенной связи между весом и ростом.

Лекция 10. Метод Рунге-Кутты

Цель лекции: для построения разностной схемы интегрирования.

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей достаточно часто, так как при небольшом объеме вычислений он обладает точностью метода $O^4(h)$.

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением функции

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)),\ 0 < x \le T,\ y(0) = y_0 \qquad (1)$$

в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Заменим вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x},$$

где

$$\tilde{x} = x_k + \Delta x,\ \tilde{y} = y(x_k + \Delta x).$$

Причем *Δx* подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения. Для дальнейших выкладок произведем замену величины «*y* стильдой» разложением в ряд Тейлора:

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \ldots$$

Для исходного уравнения (1) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2\Delta x} \cdot (f(x_k + \Delta x, y_k + y_k'\Delta x) - f(x_k, y_k)),$$

которую преобразуем к виду:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x, y_k + y_k'\Delta x)\right] =$$

$$= y_k + h \cdot \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \frac{\Delta x}{h} h, y_k + f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h} h)\right].$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x},\ \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x},\ \gamma = \frac{\Delta x}{h},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}.$$

Эти обозначения позволяют записать предыдущее выражение в форме:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[\beta \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \gamma \cdot h, y_k + \delta \cdot h)\right].$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины Δ*x* и могут быть определены через коэффициент *α*, который в этом случае играет роль параметра:

$$\beta = 1 - \alpha,\ \gamma = \frac{1}{2\alpha},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{2}{\alpha}.$$

Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[(1 - \alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha})\right].$$

Та же схема в форме разностного аналога уравнения (1):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = (1 - \alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha}\right).$$

При $\alpha = 0$ получаем как частный случай уже известную схему Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

При $\alpha = 1$:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right).$$

При $\alpha = 1$ проведение расчетов на очередном шаге интегрирования можно рассматривать как последовательность нижеследующих операций:

1) Вычисляется выражение, представляющее собой полушаг интегрирования по схеме Эйлера, то есть определяется приближенное значение искомой функции в точке $x_k + h/2$:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k).$$

2) Для той же промежуточной точки находится приближенное значение производной:

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right).$$

3) Определяется уточненное значение функции в конечной точке всего шага, причем по схеме Эйлера с вычисленным на предыдущем шаге значением производной:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}.$$

Геометрические построения (см. рисунок 10.1) показывают, что получаемое в такой последовательности решение лежит «ближе» к истинному, чем вычисляемое по схеме Эйлера, то есть следует ожидать более высокой точности решения, получаемого методом Рунге-Кутты. Ранее мы назвали эту схему «модифицированным методом Эйлера».

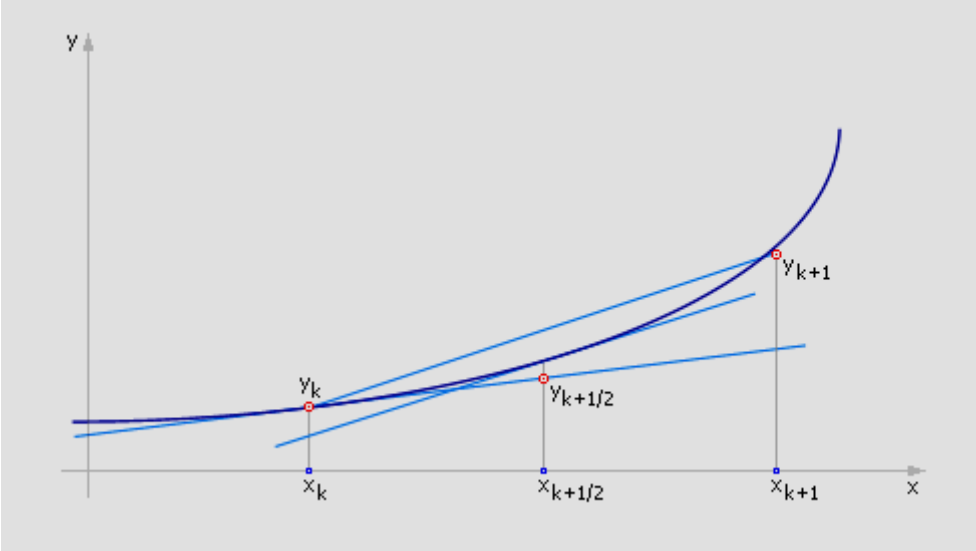

Рисунок 10.1 - Иллюстрация расчета на шаге методом Рунге-Кутты при значении параметра α = 1

Теперь рассмотрим схему при $\alpha = 0.5$ (геометрическая интерпретация результата приведена на рисунке 10.2).

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \right].$$

1) Выполняется полный шаг метода Эйлера с целью определения приближенного значения искомой функции на конце отрезка интегрирования:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

2) Для этой же точки вычисляется приближенное значение производной:

$$y'_{k+1} = f\left(x_k + h,\ \hat{y}_{k+1}\right).$$

3) Находится среднее значение двух производных, определенных на концах отрезка:

$$y'_{k+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left[y'_k + y'_{k+1} \right].$$

4) Вычисляется значение искомой функции в конечной точке всего шага по схеме Эйлера с усредненным значением производной:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}.$$

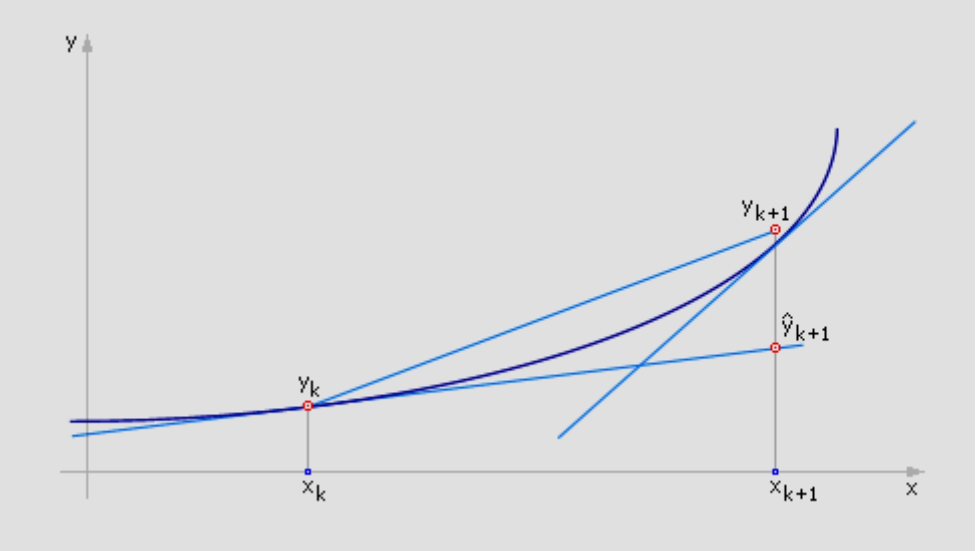

Рисунок 10.2 - Иллюстрация расчета на шаге методом Рунге-Кутты при значении параметра α = 0.5

Иногда получающееся выражение называют *схемой (методом) Эйлера-Коши*. Геометрически понятно, что получаемый указанным способом результат также должен быть «ближе» к истинному решению, чем получаемый по схеме Эйлера.

Пример. Решить уравнение d*y*/d*x* = –*y*, *y*(0) = 1 методом Рунге-Кутты.

Поскольку правая часть дифференциального уравнения имеет вид: *f*(*x*, *y*) = –*y*, схема метода при *α* = 0.5 представляется следующим образом:

$$y'_k = f(x_k,\ y_k) = -y_k,$$

$$\hat{y}_{k+1} = y_k - h \cdot y_k = y_k \cdot (1 - h),$$

$$y'_{k+1} = f\left(x_k + h,\ \hat{y}_{k+1}\right) = -y_k \cdot (1 - h),$$

$$y'_{k+1/2} = \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2} = -\frac{y'_k}{2} \cdot (2 - h),$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2} = y_k - y_k \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(2 - h\right) = y_k \frac{(h-1)^2 + 1}{2}.$$

Построим последовательность значений искомой функции:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y_0 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \frac{(h-1)^2+1}{2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^2$$

$$y_3 = y_2 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^3$$

$$\dots$$

$$y_n = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^n.$$

Результаты получаемого *численного* решения для значения аргумента $x = 10$ при различных шагах интегрирования приведены в таблице 10.1. Три верные значащие цифры получены для шага $h = 0.01$.

Таблица 10.1 - Результаты численного решения y_n методом Рунге-Кутты второго порядка дифференциального уравнения $y' = -y$ с начальным условием $y(0) = 1$

Величина шага h	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.0001
Число шагов n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$y_n \cdot 10^4$	0.827181	0.514756	0.462229	0.454076	0.454000	0.453999

Оценим погрешность аппроксимации уравнения (1) разностной схемой метода Рунге-Кутты. Подставляем точное решение в разностный аналог исходного дифференциального уравнения и вычисляем невязку:

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - (1-\alpha)\cdot f(x_k,\ y(x_k)) - \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k,\ y(x_k))\right).$$

Подставим разложения функций

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot \frac{h^2}{2} + \dots$$

$$f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k,\ y(x_k))\right) =$$

$$= f(x_k,\ y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))\right] + \dots$$

в полученное выражение:

$$\psi_k = \frac{y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot\frac{h^2}{2} + K - y(x_k)}{h} - (1-\alpha) f(x_k,\ y(x_k)) -$$

$$- \alpha \cdot \left\{ f(x_k,\ y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha} \cdot \left[\frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k)) \right] + \ldots \right\} =$$

$$= y'(x_k) + y''(x_k)\cdot\frac{h}{2} - f(x_k,\ y(x_k)) + \alpha \cdot f(x_k,\ y(x_k)) - \alpha \cdot f(x_k,\ y(x_k)) -$$

$$- \frac{h}{2} \cdot \left[\frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k)) \right] + O(h^2) =$$

$$= y'(x_k) - f(x_k,\ y(x_k)) + \frac{h}{2} \cdot \left[y''(x_k) - \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} - \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k)) \right] + O(h^2).$$

Учитывая уравнение (1), а также выражение для производной

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = (f(x_k,\ y(x_k)))' = \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))$$

окончательно получаем, что $\psi_k = O(h^2)$, то есть метод Рунге-Кутты, независимо от значения параметра α, имеет *второй* порядок аппроксимации.

Сравнение решений одной и той же задачи позволяет сделать вывод, что *более высокая степень аппроксимации* дифференциального уравнения разностным аналогом позволяет получать *более точное решение* при более крупном шаге и, следовательно, меньшем числе шагов, то есть приводит к *снижению требуемых ресурсов* ЭВМ.

Лекция 11. Уравнения в частных производных

Цель лекции: уравнение диффузии, описывающее распространение (растекание) со временем по протяженному телу некоторой субстанции.

Из математики и физики известны случаи аналитического описания систем с распределенными параметрами уравнениями в частных производных. Ими являются уравнения диффузии, тепломассопереноса и другие. Рассмотрим варианты их имитации на компьютере.

Системы с распределенными параметрами — это системы, в которых значение некоторого изучаемого параметра изменяется не только во времени, но и в пространстве (одно-, двух- или многомерном), меняясь от точки к точке пространства по какому-то закону. Примером такого параметра может служить энергия, концентрация вещества, напряженность поля и другие физические величины. Неизменным изучаемый параметр может считаться только в бесконечно малой области пространства. Поэтому систему с распределенными параметрами часто представляют как систему из

упорядоченного в пространстве множества элементов, внутри которых (в каждой точке отдельного взятого элемента) описываемый параметр одинаков, а у разных элементов различен. Элементы системы образуют пространственную структуру.

Существуют типовые уравнения, описывающие отдельные свойства систем с распределенными параметрами. Рассмотрим их.

Уравнение диффузии.

Уравнение диффузии описывает распространение (растекание) со временем по протяженному телу некоторой субстанции, например, тепла или концентрации. В одномерном случае тело представляется протяженным вдоль оси x.

Если изменяемый параметр (в общем случае) обозначить как y, время, в течение которого отслеживаются изменения параметра, обозначить как t, а ось, вдоль которой происходят изменения параметра, как x, то уравнение диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x,t)$$

и обычно дополняется условиями — значениями переменной y на краях и границах: на левом краю $x = 0$, на правом краю $x = L$, на границе — начальные условия ($t = 0$):

$$y(x, 0) = f_1(x),$$
$$y(0, t) = f_2(t),$$
$$y(L, t) = f_3(t),$$

где $f_1(x)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ — заданные функции.

Коэффициент α имеет смысл коэффициента теплопроводности; $f(x, t)$ имеет смысл функции, описывающей работу источников и стоков тепла.

Величина y, описывающая распределение температуры, является функцией двух переменных — протяженности тела x и времени t: $y(x, t)$.

Если заменить выражения производных их дискретным аналогом, то в разностном виде уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{y(x,t) - y(x,t-\Delta t)}{\Delta t} = \alpha \cdot \frac{y(x+\Delta x, t-\Delta t) - 2y(x,t-\Delta t) + y(x-\Delta x, t-\Delta t)}{\Delta x^2} + f(x,t-\Delta t)$$

или, выражая неизвестное через известные величины:

$$y(x,t) = \frac{\Delta t \cdot \alpha}{\Delta x^2} y(x-\Delta x, t-\Delta t) + \left(1 - \frac{2\Delta t \cdot \alpha}{\Delta x^2}\right) \cdot y(x,t-\Delta t) + \frac{\Delta t \cdot \alpha}{\Delta x^2} y(x+\Delta x, t-\Delta t) + \Delta t \cdot f(x,t-\Delta t)$$

или

$$y(x,t) = a \cdot y(x-\Delta x, t-\Delta t) + b \cdot y(x,t-\Delta t) + c \cdot y(x+\Delta x, t-\Delta t) + f(x,t-\Delta t) \cdot \Delta t.$$

В результате получена расчетная формула, реализуемая на цифровой вычислительной машине. Благодаря этой формуле можно рассчитать значение параметра y в любой точке (x, t).

Назовем значение $y(x, t)$ *узлом расчета*. Тогда схематично расчет выглядит как сетка узлов на поле, составленном из частей тела и отрезков

времени (см. рисунок 11.1). Сама формула расчета одного узла зависит от состояния трех узлов (левого $y(x - \Delta x, t - \Delta t)$, правого $y(x + \Delta x, t - \Delta t)$, собственного $y(x, t - \Delta t)$) в предыдущий $(t - \Delta t)$ момент времени и напоминает треугольный шаблон. До начала расчета известны состояния всех узлов для $t = 0$. Применяя формулу последовательно ко всем узлам для следующего момента времени, можно определить температуру во всех узлах следующего временного слоя $(t + \Delta t)$. Кроме самого левого и самого правого узлов — их состояние вычислено быть не может, но оно задано краевыми условиями.

Если процедуру повторять, переходя от одной точки тела x к другой, и далее от одного временного слоя к другому, то по данной формуле можно вычислить значение температуры в любой части тела в любой момент времени. Таким образом, расчетом покрывается все поле *(L x T).* Последовательное определение неизвестных значений в данном случае возможно, потому что шаблон имеет вид явного выражения — единственное неизвестное в формуле выражено через ранее вычисленные значения.

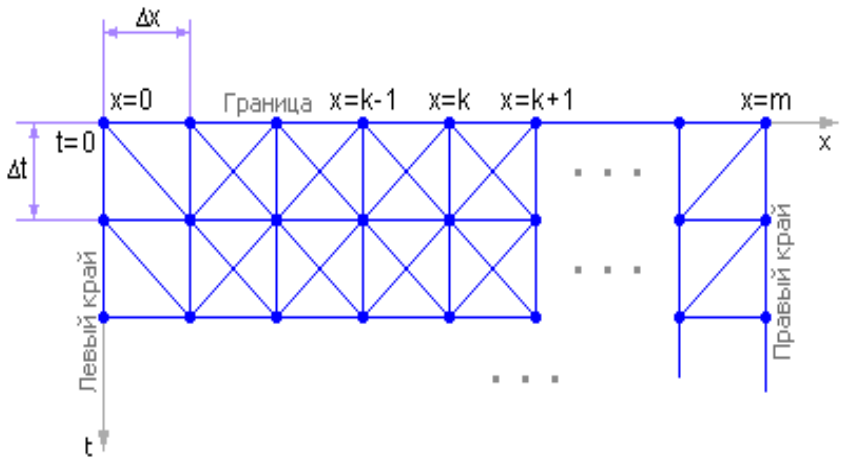

Рисунок 11.1 - Схема расчета одномерной динамической системы с распределенными параметрами методом конечных разностей с использованием явного шаблона

Заметим, что при больших значениях производных и больших значениях шагов расчет может дать неверные решения.

При моделировании возможно применение других разностных формул (шаблонов) (см. рисунок 11.2). При выборе шаблона необходимо принимать во внимание: явный шаблон или нет, какую он обеспечивает точность и при каких значениях шагов он обеспечивает устойчивость расчета. Так, например, шаблон в виде прямоугольника — неявный: в одной расчетной формуле содержится сразу две неизвестные величины. Поэтому при использовании такого шаблона необходимо решать систему алгебраических уравнений размером *(L · T).*

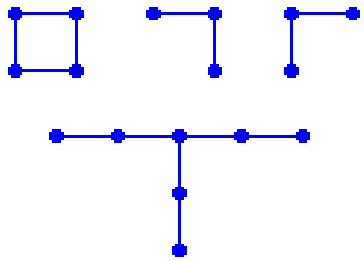

Рисунок 11.2 - Схемы типовых шаблонов для решения уравнений с распределенными параметрами

На практике устойчивости, а далее — точности добиваются получением решений с использованием разных шаблонов и разных значений шага. Если значения искомой переменной, вычисленные с шагом h и с шагом $h/2$, отличаются в узлах с одинаковыми индексами не более чем на 1—5%, то вычисленное значение принимают за приближенное решение задачи. Иначе уменьшают шаг еще в два раза, и процедуру оценки повторяют.

Если принять условие, что задача стационарная, то есть процессы протекают так долго, что все переходные процессы успели закончиться (производная по времени равна 0), то уравнение диффузии приобретает следующий вид (для случая двухмерного пространства — оси x и z) без источников и стоков:

$$\partial^2 y/\partial x^2 + \partial^2 y/\partial z^2 = 0.$$

В разностном виде уравнение имеет вид:

$$(Y_{i+1,j} - 2 \cdot Y_{i,j} + Y_{i-1,j})/\Delta x^2 + (Y_{i,j-1} - 2 \cdot Y_{i,j} + Y_{i,j+1})/\Delta z^2 = 0.$$

Если принять $\Delta x = \Delta z$, то уравнение примет вид:

$$4 \cdot Y_{i,j} - Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j} - Y_{i,j-1} - Y_{i,j+1} = 0.$$

Легко понять, что шаблон расчета уравнения неявный и имеет вид креста (чтобы рассчитать значение температуры в узле сетки, надо знать температуры его соседей слева, справа, сверху и снизу). Если стена дома имеет размеры 2 метра на 2 метра, а шаг $\Delta x = \Delta z = 20$ мм, то всего для расчета температурного режима стены придется решать систему из 10 000 линейных уравнений с 10 000 неизвестных $Y_{i,j}$:

$$4 \cdot Y_{i,j} - Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j} - Y_{i,j-1} - Y_{i,j+1} = 0, \text{ для } i = 1 \div 100 \text{ и } j = 1 \div 100,$$

к которым следует присоединить 400 штук краевых условий:

$$Y_{0,j} = f_1(j);$$
$$Y_{101,j} = f_2(j);$$
$$Y_{i,0} = f_3(i);$$
$$Y_{i,101} = f_4(i).$$

Уравнение тепломассопереноса.

В ряде физических процессов масса вещества или энергия движутся внутри воображаемой системы, перемещаясь из одних ее частей в другие. Такие процессы описываются уравнением тепломассопереноса. Для одномерного случая это уравнение имеет следующий вид: $\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = B$, где $\rho(x, t)$ — плотность вещества или энергии; $q(x, t)$ — поток вещества или энергии; $B(x, t)$ — функция источников и стоков. $\rho(x, t)$, $q(x, t)$, $B(x, t)$ — функции распределения соответствующих переменных в пространстве x и времени t.

Разобьем поток вдоль оси x на элементарные ячейки, взаимодействующие друг с другом. Каждая ячейка характеризуется плотностью ρ находящегося в ней вещества и потоком вещества q через ее границы (левую и правую). Ячейки пронумеруем индексом i. Ячейку принято называть *элементарным объемом*.

В разностном виде (после подстановки выражений численного вычисления производных) уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (q(x + \Delta x, t) - q(x, t) + b(x, t)).$$

Уравнение показывает, сколько вещества добавится в элементарном объеме $\partial\rho/\partial t$ за время Δt, если через левую границу этого участка x за это время перетекает $q(x) \cdot \Delta t$ частиц вещества, и если через правую границу этого участка $(x + \Delta x)$ за это же время перетекает $q \cdot (x + \Delta x) \cdot \Delta t$ частиц вещества, и на участке есть источник или сток вещества величиной b.

В зависимости от решаемой задачи уравнение может быть дополнено. Функция $b(x, t)$ обычно задана. Если требуется определить закон движения вещества $q(x, t)$, чтобы обеспечить заданное пользователем распределение вещества по оси x со временем $\rho(x, t)$, то для такого расчета достаточно одного уравнения.

Если задан закон движения вещества $q(x, t)$ и требуется определить, где в результате этого движения, когда и сколько будет вещества $\rho(x, t)$, то также достаточно одного уравнения.

Но часто требуется определить одновременно и $\rho(x, t)$ и $q(x, t)$ при заданных начальных условиях, то есть вопрос состоит в том, как быстро $q(x, t)$ и сколько $\rho(x, t)$ вещества окажется в определенных точках x. Тогда одного уравнения для расчета двух неизвестных недостаточно. И основное уравнение должно быть дополнено вспомогательными выражениями, указывающими, как связаны между собой $\rho(x, t)$, $q(x, t)$. Такое выражение должно указывать, как быстро движется вещество, если задано его количество. В производстве и технике мы называем такое выражение регулятором: *как связано количество деталей ρ, хранящихся на участке x, с желаемой скоростью обработки таких деталей q*.

В зависимости от того, с каким веществом мы имеем дело, могут существовать различные выражения дополнительной связи (дополнительное уравнение) между потоком q и плотностью ρ. Например, для жидкости, где *все* частицы движутся *одновременно*: $q = \rho \cdot v$, где v — скорость перемещения

частиц в потоке. Или более сложное уравнение движения, связывающее скорость движения потока $v(x, t)$ с причиной этого движения, силой F:

$$\partial v/\partial t + v \cdot \partial v/\partial x = F/\rho.$$

В свою очередь, сила F может быть вызвана к действию перепадом давления P: $F = \partial P/\partial x$.

Легко увидеть в данном уравнении в качестве его основы второй закон Ньютона, связывающий ускорение $\partial v/\partial t$ и силу F через массу ρ. Дополнительное слагаемое $v \cdot \partial v/\partial x$ появляется постольку, поскольку при движении появляется приток вещества через границы x и $(x + \Delta x)$ элементарного участка, который несет за собой импульс $v \cdot \partial v/\partial x \cdot \rho$.

В разностном виде при $q = \rho \cdot v$ уравнение переноса будет иметь вид:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot (\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x, t) + b(x, t)).$$

Расчет уравнения производится аналогично уравнению диффузии.

Лекция 12. Обработка статистических результатов

Цель лекции: вычисление всей статистики в классовых интервалах, совмещающее универсальность 2 способа.

Рассмотрим, как следует обрабатывать и фиксировать статистические величины в результате эксперимента, чтобы получить надежную информацию о свойствах моделируемого объекта. Напомним, что обобщенными характеристиками случайного процесса или явления являются средние величины.

Вычисление средних величин во время эксперимента, который многократно повторяется, а результат его усредняется, может быть организовано несколькими способами:

1) вся статистика вычисляется в конце;
2) вся статистика вычисляется в процессе вычисления (по рекурсивным соотношениям);
3) вся статистика вычисляется в классовых интервалах (этот метод совмещает универсальность первого метода и экономичность второго).

Способ 1. Вычисление всей статистики в конце. Для этого в процессе эксперимента значения X_i выходной (изучаемой) случайной величины X накапливается в массиве данных. После окончания эксперимента подсчитывается математическое ожидание (среднее) X и дисперсия D (характерный разброс величин относительно этого математического ожидания).

$$X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1} (X_i - X)^2 \qquad (2)$$

Часто используют среднеквадратичное отклонение σ = sqrt(D).

Отметим, что недостатком метода является неэффективное использование памяти, так как приходится накапливать и сохранять большое количество значений выходной величины в течение всего эксперимента, который может быть весьма продолжительным.

Второй минус заключается в том, что приходится дважды считывать массив X_i, так как воспользоваться формулой (2) в том виде, как она здесь записана, мы можем, только просчитав формулу (1) (от 1 до n), а потом еще раз прогнав для формулы (2) массив X_i.

Положительным моментом является сохранение всего массива данных, что дает возможность более подробного его изучения в дальнейшем при необходимости расследования тех или иных эффектов и результатов.

Способ 2. Вычисление всей статистики в процессе вычисления (по рекурсивным соотношениям). Этот способ предусматривает возможность хранить только текущее значение математического ожидания X_i и дисперсии D_i, подправляемое на каждой итерации. Это избавляет нас от необходимости постоянного хранения всего массива экспериментальных данных. Каждое новое данное X_i учитывается в сумме с весовым коэффициентом — чем более слагаемых i накоплено в сумме X_i, тем более ее значение важно по отношению к очередной поправке X_i, поэтому соотношение весовых коэффициентов $i/(i + 1) : 1/(i + 1)$.

$$\boldsymbol{X}_{i+1} = \frac{\boldsymbol{X}_i \cdot i + X_{i+1}}{i+1} = \boldsymbol{X}_i \cdot \frac{i}{i+1} + X_{i+1} \cdot \frac{1}{i+1}$$

$$D_{i+1} = \frac{(X_{i+1} - \boldsymbol{X}_i) + i \cdot D_i}{i+1} = \frac{(X_{i+1} - \boldsymbol{X}_i)}{i+1} + \frac{i}{i+1} \cdot D_i,$$

где $\boldsymbol{X_i}$ — очередное значение экспериментальной выходной величины.

Способ 3. Вычисление всей статистики в классовых интервалах. Этот способ предполагает, что в массив будут накапливать не все значения X_i, а только по значимым интервалам, в которых распределена случайная выходная величина X_i. Общий интервал изменения X_i разбивается на m подинтервалов, в каждом из которых фиксируется количество n_i, которое показывает, сколько раз X_i приняло значение из i-го интервала. При небольшом количестве интервалов ($m \approx 1$) мы получаем способ 1, при количестве интервалов $m = n$ мы получаем способ 2. В случае $1 < m < n$ получаем среднее решение — компромисс между занимаемой памятью и информативностью массива выходных данных.

$$\boldsymbol{X} = \frac{n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2 + \ldots + n_m \cdot X_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i X_i$$

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (n_i \cdot X_i - \boldsymbol{X})^2 .$$

Вычисление геометрии распределения.

Еще более информативным является вычисление геометрии распределения случайной величины. Оно необходимо для того, чтобы представить себе более точно характер распределения. Известно, что по значению статистического момента можно приблизительно судить о геометрическом виде распределения.

Первый момент (или среднее арифметическое) вычисляется так:

$$m_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - A)^1, \text{ где } A = \begin{cases} 0, (\text{начальный момент}) \\ X, (\text{центральный момент}) \end{cases}.$$

Если *A* принимает значение 0, то первый момент называется *начальным моментом*, если *A* принимает значение *X*, то первый момент называется *центральным*. (В принципе *A* может быть любым числом, задаваемым исследователем.)

На практике принято использовать не сам первый момент, а нормированную его величину $R_1 = m_1/\sigma^1$.

Первый момент указывает на центр тяжести в геометрии распределения, см. рисунок 12.1.

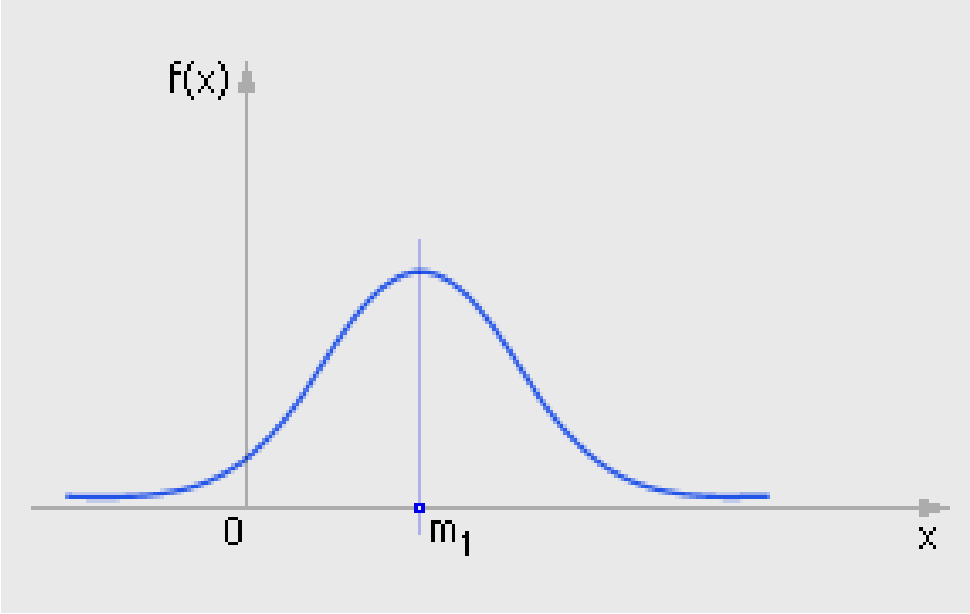

Рисунок 12.1 - Характерное положение первого момента на графике распределения статистической величины

Второй момент (или дисперсия, разброс) вычисляется так:

$$m_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2.$$

Понятие *среднеквадратичного отклонения*, связано со вторым моментом:

$$\sigma = \sqrt{m_2}.$$

На практике принято использовать не сам второй момент, а нормированную его величину $R_2 = m_2/\sigma^2$.

Дисперсия характеризует величину разброса экспериментальных данных относительно центра тяжести m_1. Таким образом, по величине m_2 можно судить о втором параметре геометрии распределения (см. рисунок 12.2).

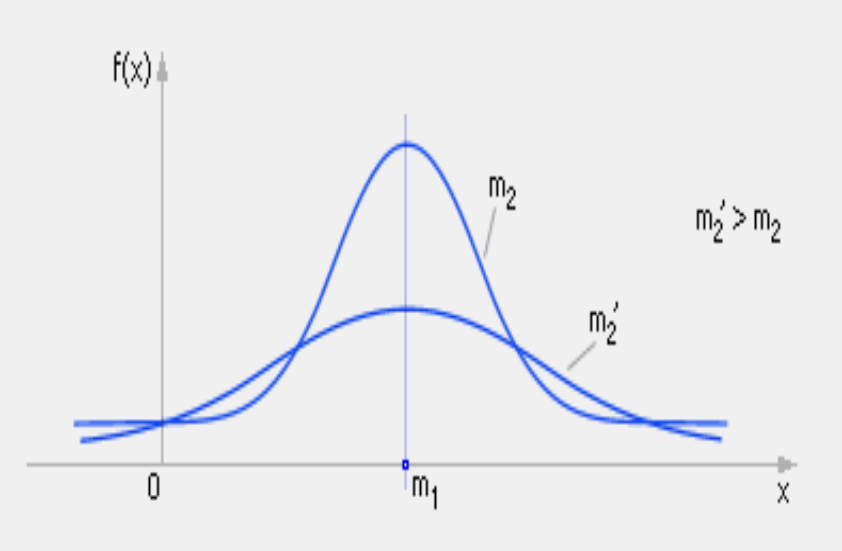

Рисунок 12.2 - Характерное изменение вида распределения статистической величины в зависимости от величины второго момента

Третий момент характеризует асимметрию (или скошенность) (см. рисунок 12.3) вычисляется так:

$$m_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \boldsymbol{X})^3 .$$

На практике принято использовать не сам второй момент, а нормированную его величину $R_3 = m_3/\sigma^3$.

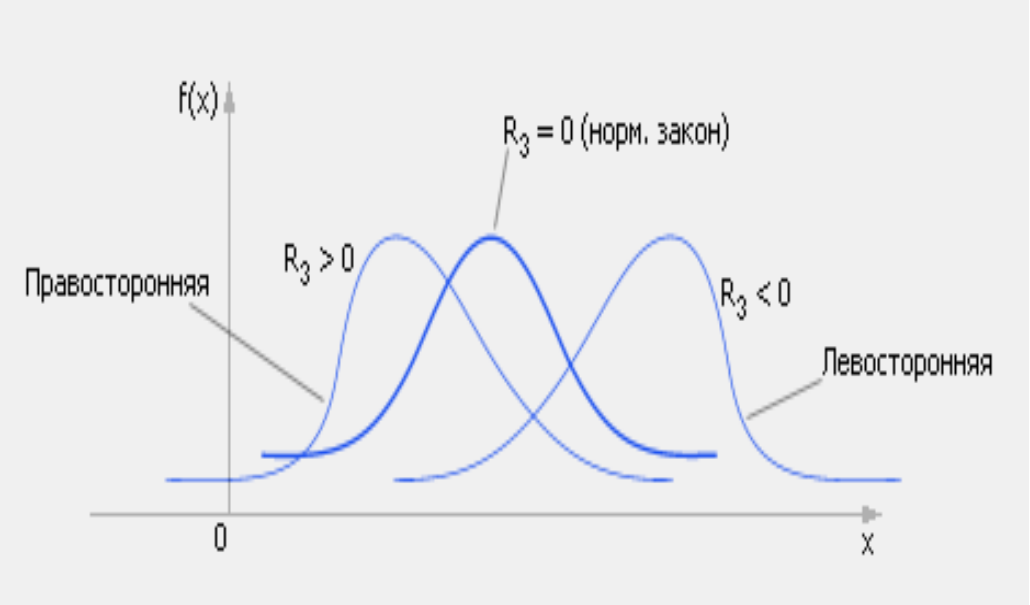

Рисунок 12.3 - Характерное изменение вида распределения статистической величины в зависимости от величины третьего момента

Определяя знак R_3, можно определить, есть ли асимметрия у распределения (см. рисунок 12.3), а если есть ($R_3 \neq 0$), то в какую сторону.

Четвертый момент (см. рисунок 12.4) характеризует эксцесс (или островершинность) и вычисляется так:

$$m_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \boldsymbol{X})^4 .$$

Нормированный момент равен: $R_4 = m_4/\sigma^4$.

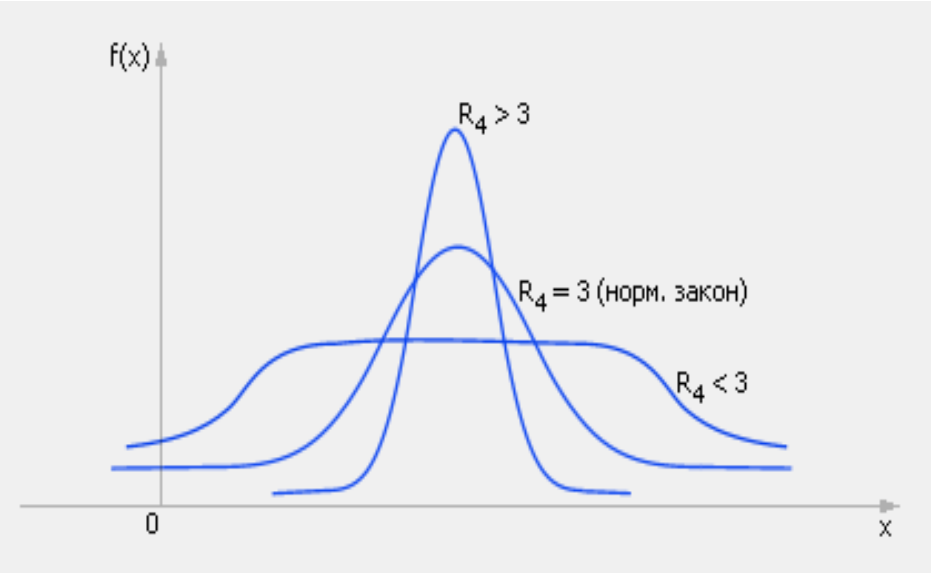

Рисунок 12.4 - Характерное изменение вида распределения статистической величины в зависимости от величины четвертого момента

Очень важным является выяснение того, на какое распределение более всего походит полученное экспериментальное распределение случайной величины. Оценка степени совпадения эмпирического закона распределения с теоретическим проводится в два этапа: определяют параметры экспериментального распределения и далее производят оценку по Колмогорову соответствия экспериментального распределения выбранному теоретическому.

Оценка (по Колмогорову) совпадения эмпирического закона распределения с теоретическим

1) Вычисляем моменты m_1, m_2, m_3, … Число моментов равно числу неизвестных в теоретическом законе распределения.

2) Прежде всего, так как оценка касается непрерывного распределения, а мы имеем дело с дискретным распределением, снятым экспериментально, то надо решить, на сколько интервалов надо разбить при дискретизации и то, и другое распределение. Для этого рекомендуется пользоваться *правилом Стерджеса,* хорошо зарекомендовавшим себя на практике: $K = 1 + \log_2 n = 1 + 3.322 \cdot \log_{10} n$, где n — количество случайных значений (опытов), k — количество интервалов распределения.

3) Строится интегральный (см. рисунок 12.5) закон для эмпирического распределения $F(x) = P(x \le x_i)$.

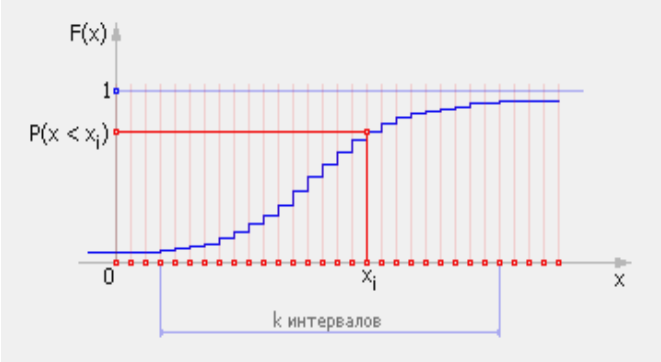

Рисунок 12.5 - Интегральный закон эмпирического распределения

4) В зависимости от числа экспериментов n и количества интервалов $1 \le i \le k$ можно посчитать число исходов в каждом из интервалов: $N_i = P_i \cdot n$.

5) Далее следует рассчитать теоретическое распределение частоты: $N_i^{\text{TEOP.}} = P_i \cdot n$. Если в качестве теоретического принять нормальный закон распределения, то можно сделать так:

$$P_i(x < x_i) = F\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где F — *функция Лапласа*, а параметры a и σ закона вычислены в п. 1.

6) Сравним полученные частоты: $N_i^{\text{TEOP.}}$ и N_i во всех k интервалах (см. рисунок 12.6) и выберем наибольшее отклонение экспериментального распределения от проверяемого теоретического:

$$D = \max_i \left| N_i - N_i^{\text{теор.}} \right|.$$

7) Параметр Колмогорова λ характеризует отклонение теоретического распределения от экспериментального:

$$\lambda = (\sqrt{k} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{k}}) \cdot D \quad .$$

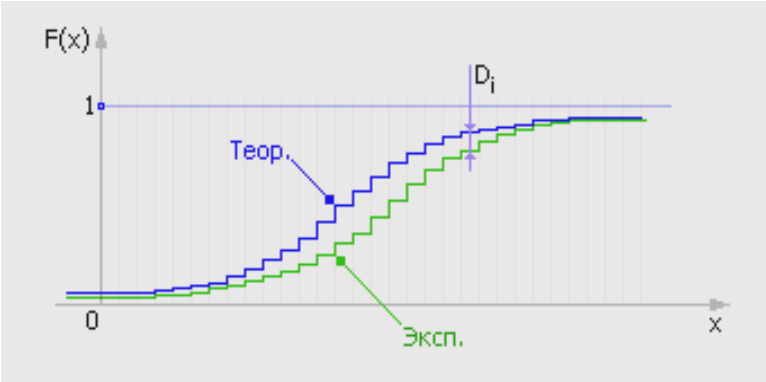

Рисунок 12.6 - Сравнение теоретического и эмпирического интегральных распределений случайной величины (дискретный вариант)

Далее, используя таблица 12.1 Колмогорова, следует принять или отвергнуть гипотезу о том, является ли эмпирическое распределение с заданной нами вероятностью Q теоретическим или нет. Для принятия гипотезы должно быть: $\lambda < \lambda_{\text{табл.}}$.

Таблица 12.1 -Таблица критерия Колмогорова

Q	0.85	0.90	0.95	0.99
λ	1.14	1.22	1.36	1.63

Отметим, что критерий Колмогорова не единственный возможный к применению при оценивании; можно использовать критерий X_u-квадрат, критерий Андерсона-Дарлинга и другие.

Список литературы

1. Шукаев Д.Н. Компьютерное моделирование. -Алматы: КазНТУ, 2004. 136 с.
2. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. - СПб.: Питер, Киев: Издательская группа BHV, 2004.
3. Варфоломеев В.И., Назаров СВ. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2004.
4. Прудников В.В., Вакилов А.Н., Прудников П.В.Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования: учебное пособие -М: ФИЗМАТЛИТ, 2009 г.
5. Сарафанов А.В., Глинченко А.С., Егоров Н.М., Комаров В.А. Исследование параметров и характеристик полупроводниковых приборов с применением интернет-технологий: учебное пособие М: ДМК Пресс, 2008 г.
6. Бахвалов Л.А. Моделирование систем: Учебное пособие для вузов: МГГУ, 2006 г.

Св.тем.план 2013 г., поз. 298

Алпамыс Туякович Ибраев
Шайкул Асель Алиевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Конспект лекций для студентов
специальности 5В071600 - Приборостроение

Редактор Л.Т. Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать _____ Формат 60х84 1/16
Тираж 75 экз. Бумага типографская N1
Объем 4,3 уч.-изд.л. Заказ___. Цена 2150 тг.

Копировально – множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126