Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Электроника кафедрасы

ПРИБОРЛАР МЕН ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

5В071600 – Приборлар жасау мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы

Алматы 2014

ҚҰРАСТЫРҒАНДАР: А.Т. Ибраев, Ә.Ә. Шайқұл. Приборлар мен жүйелерді модельдеу. 5В071600 – Приборлар жасау мамандығының студенттері үшін дәрістер жинағы. – Алматы: АЭжБУ, 2014. – 61 б.

Объектілер мен жүйелерді математикалық модельдеудің негізгі түсініктері мен әдістемелері қарастырылған. Үрдістерді модельдеу және аспаптар модельдерін талдауға мысалдар келтірілген.

Дәрістер жинағы 5В071600 – Приборлар жасау мамандығы бойынша білім алып отырған студенттерге арналған, сондай–ақ радиотехника, электроника және телекоммуникациялар, автоматтандыру және басқару, есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандықтары студенттерінің де қолдануына арналған.

Кесте 8, көрініс 19, әдеб.көр. – 6 атау.

Пікір берушілер: техн.ғыл.канд., доцент Табултаев С.С.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2013 ж. баспа жоспары бойынша шығарылады.

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2014 ж.

Мазмұны

Дәріс 1. Кіріспе. Модельдеу түсінігі. Объектілер мен үрдістерді модельдеу туралы жалпы мағлұматтар 4
Дәріс 2. Математикалық модельдер қасиеттері 9
Дәріс 3. Модельдер құрудың негізгі әдістері 13
Дәріс 4. Жүйелерді модельдеудің әдістемелік негізі. Модельдеудің математикалық сұлбалары 18
Дәріс 5. Үздіксіз детерминирленген модельдер (Д - сұлбалары). Дискреттік детерминирленген модельдер (F - сұлбалары) 23
Дәріс 6. Үздіксіз стохастикалық модельдер (Q - сұлбалары) 27
Дәріс 7. Жүйелерді имитациялық модельдеу 32
Дәріс 8. Кездейсоқ әсерлерді модельдеу 37
Дәріс 9. Модель сапасын бағалау 42
Дәріс 10. Рунге – Кутта әдісі 45
Дәріс 11. Жеке туындылардағы теңдеулер 50
Дәріс 12. Статистикалық нәтижелерді өңдеу 54
Әдебиеттер тізімі 60

Дәріс 1. Кіріспе. Модельдеу түсінігі. Объектілер мен үрдістерді модельдеу туралы жалпы мағлұматтар

Дәрістің мақсаты: ММ құрылымын синтездеу. ММ құрылымы - модельдердің математикалық қатынасының жалпы түрі.

Модель немесе модельдер термині материалдық және абстрактылы объектілердің кең шеңберін білдіреді, онда зерттелетін объектілердің ақпараттық маңызы мен негізгі қасиеттері көрсетіледі. Модельдеу – зерттелетін объектінің модельдерін құру үрдісі, ол бастапқы объектінің (түпнұсқа) қасиеттері мен сипаттамалары туралы ақпарат тапсырмаларын шешу барысында зерттеуші үшін елеулі маңызға ие.

Кез келген модельдің негізгі қасиеттері мыналар:

- ақырғылық, смодель түпнұсқаны оның қатынастарының ақырғы соңында ғана бейнелейтін болады және модельдеу ресурстары ақырғы;
- ықшамдылық, модель объектінің тек ғана маңызды жақтарын бейнелейді;
- жуықтылық, нақтылық модель арқылы жуықталып бейнеленеді;
- адекваттылық (барабарлық), модель модельденетін жүйені сәтті сипаттайды;
- ақпараттылық, модель модельдерді құру кезінде қабылданған болжам (гипотез) шеңберінде жүйе туралы жеткілікті ақпаратты қамту керек.

Материалдық модельдердің мынандай түрлері бар:

а) геометриялық тәрізді масштабтағы, түпнұсқаның оның субстраттына қатыссыз кеңістікті – геометриялық сипаттамаларын (ғимарат, құрылыс макеттері, оқу муляждары және т.б.) суреттеуші;

в) ұқсастық теориясына негізделген (субстратты тәріздес), модель табиғаттас түпнұсқаның қасиеттері мен сипаттамаларын кеңістік және уақыт бойынша масштабтауды (судтардың гидро – динамикалық модельдері, ұшу аппараттарының үрлеу модельдері) суреттеуші;

с) аналогты – аспаптық, түпнұсқалық объектінің зерттелетін қасиеттері мен сипаттамаларын қандай да бір тура аналог жүйесі негізінде табиғаты басқа модельденуші объектіге суреттеу (электрондық аналогтық модельдеу).

Оңды немесе абстрактылы модельдерді келесі түрге жіктеуге болады:

а) қалыптаспаған модельдер, яғни адам қабылдауы арқылы қалыптасқан объект – түпнұсқа туралы түсініктер жүйесі.

b) ішінара қалыптасқан:

ауызша (вербальды) – түпнұсқаның қасиеттері мен сипаттамаларын қандай да бір табиғи тілде сипаттау (жобалық құжаттардың мәтіндік материалдары, техникалық сараптама нәтижелерін сөзбен сипаттау);

графикалық икондық – тікелей көру арқылы қабылдауға нақты немесе ең болмағанда теориялық қол жетімді болатын, түпнұсқаның қасиеттері, сипаттамалары, ерекшелігі (көркем графика, технологиялық карталар);

графикалық шартты – графиктер, диаграммалар, сұлбалар түріндегі қадағалау және сараптамалық зерттеу деректері;

с) толық қалыптасқан (математикалық) модельдер. Объектілердің және үрдістердің математикалық моделі дегеніміз – зерттелетін объект немесе үрдістің негізгі қасиеттерін бейнелейтін математикалық объектілер және олардың арасындағы қатынастар жүйесі. Математикалық модельдерге мынадай талаптар қойылады: әмбебаптылық, дәлділік, адекваттылық және үнемділік.

Математикалық модельдердің әмбебаптық дәрежесі нақты объектінің қасиеттерін сипаттау толықтығын анықтайды. Математикалық модель объект қасиеттерінің тек белгілі – бір бөлігін ғана көрсетеді. Мысалы, резистор моделі $U=R\cdot I$, бұл тек резистордың электр тогын қасиетін көрсетеді, бірақ, габариті (көлемі), түсі, механикалық беріктігі, құны және т.б. осы сияқты қасиеттері мұнда қамтылмайды. АЖЖ (САПР) – да бір объект бірнеше математикалық модель (ММ) қолданылуы мүмкін (объектінің түрлі дәрежелі толықтыру қасиеттерін көрсетуші).

Математикалық модель дәлдігі нақты объект параметрлерінің мәндері мен *ММ* (параметрлерді есептеу дәлсіздігімен) көмегімен есептелген, сол параметрлердің мәндерінің сәйкестік дәрежесімен бағаланады. Еске түсірелік, шығыс параметрлерінің секторы $\overline{Y}=(y_1, y_2, ...y_n)$. Ақиқат және *ММ* көмегімен есептелген *i*-ші параметр мәнін y_{im} және y_{ip} деп белгілейміз. y_i есептеуінің салыстырмалы дәлсіздігін $\varepsilon_i = (y_{ip} - y_{im}) / y_{im}$ ретінде анықтаймыз. Осылайша $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n)$ векторлық бағалауды алуға болады. *ММ* дәлдігі $\varepsilon_м = \|\overline{\varepsilon}\|$ ретінде бағаланады, мұндағы $\|\overline{\varepsilon}\|$ - $\overline{\varepsilon}$ векторының қандай да бір нормасы. Бұл орташа салмақталған баға немесе $\max \underline{\varepsilon_i}$ болуы мүмкін, мұндағы $i \in [1, n]$.

ММ адекваттылығы объект қасиеттерін берілгеннен аспайтын дәлсіздікпен көрсету әдісі $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$, $\varepsilon_i = f(\overline{X}, \overline{Q})$. екені мәлім. Дегенмен қандай да бір $\overline{Q}_{ном}$ нүктесінде $\overline{X}_{расч}$ анықталған векторы үшін $\varepsilon_м$ анықталады. Сонан соң $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$ моделі түрлі сыртқы параметрлер үшін қолданылады. Басқаша айтқанда, модель дәлдігі параметрлер кеңістігінің қандай да бір берілген нүктесінде бағаланады, ал осы параметрлердің барлық өзгеріс аумағында қолнылатын болады. Модельдің мұндай қолданылуын қатаң негіздеуге болады, егер параметрлердің барлық өзгеріс аумағында $\varepsilon_м < \delta$ қатынасы орындалатыны дәлелденсе. Мұндағы δ - модельдің шектік мүмкін болатын дәлсіздігі.

Модель дәлдігі шектік мүмкін болатын мәннен аспайтын аумақ *ММ* адекваттық аумағы деп аталады және былай белгіленеді:

$$AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}, \quad AO = \{\overline{X}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}.$$

ММ үнемділігі: оны жүзеге асырудағы есептеу ресурстарының шығындарымен бағаланады ($T_{маш}$ – машиналық уақыт және $П_{маш}$ – машиналық жады).

Жоғары дәлдік, адекваттылық және әмбебаптық дәрежелерінің талаптары бір жағынан үнемділік жағынан тиімді (есептеу шығындары аз), екінші жағынан қарама – қайшы болып табылады. Бұл талаптарды тиімді қанағаттандыру АЖЖ – де қолданылатын математикалық модельдердің кең көлемімен байланысты.

ММ жіктелуі келесі кестеде берілген.

Жіктелу белгісі	Құраушы жіктеу категориялары
Көрсетілетін қасиеттер сипаты	1) функционалдық 2) құрылымдық
Иерархиялық деңгеймен көрсетілуі	1) микродеңгей 2) макродеңгей 3) метадеңгей
Бір деңгейдің ішінде баяндауды нақтылау дәрежесі	1) толық 2) макромодель
Объект қасиеттерін көрсету тәсілі	1) аналитикалық 2) алгоритмдік 3) имитациондық
Модельді аул тәсілі	1) теориялық 2) эмпирикалық

ММ кластары кестесінде көрсетілгендерге түсінік берелік.

Функционалдық және құрылымдық модельдер жобаланатын объекті сипаттаудың сәйкесінше функционалдық және құрылымдық (конструкторлық) аспектілерін сипаттайды.

Функционалдық модельдер жобалау объектісіндегі физикалық немесе ақпараттық үрдістерді көрсетеді.

Құрылымдық модельдер жобалау объектісінің технологиясын және геометриялық қасиеттерін көрсетеді. Функционалдық, сондай–ақ құрылымдық модель де топталған немесе үлестірілген болуы мүмкін. Үлестірілген модельдерде олардың кеңістіктегі ұзақтығы ескеріледі (құрылымдық модельдердегі геометриялық өлшемдер кеңістік координаталардағы функционалдық модельдер қасиеттерінің өзгерісі). Бұл кластар, сәйкесінше *микродеңгейлі* (үлестірілген), *макродеңгейлі* және *метадеңгейлі* (топталған) модельдер деп аталады.

Микродеңгейлі математикалық функционалдық модельдер жеке туындыдағы дифференциалды теңдеу (ЖТДТ) болып табылады, онда объектілер қасиеттерінің уақыт және кеңістік бойынша өзгерістері көрсетілетін болады. Бұл модельдерде қозғауыштың жану камерасындағы температураның таралуының тең еместігі, бөлшектер мен құрылымдарда кернеуді үлестірудің теңсіздігі және т.б. ескеріледі. Макродеңгей

метадеңгейлердің функционалдық модельдерінің математикалық өрнегі қарапайым дифференциалдық теңдеу болып табылады. Бұл модельдерде объект қасиеттерін үлестірудің теңсіздігі ескерілмейді және бұл қасиеттер бір нүктеге шоғырланған деп есептеледі, бұл өз кезегінде объект қасиеттерін *ММ* – де көрсеткен кезде кеңістіктік координаталардан құтылуға мүмкіндік береді. Макродеңгей модельдерінде жобалау объектісінің ірі құраушылары қарастырылады (осы құраушылардың арасындағы барлық байланыстар ескеріледі). Метадеңгейде бөлшектердің күрделі жиынтықтары біртұтас ретінде қарастырылады, бұл нақтылау дәрежесі жеткіліксіз (аз) кезде жобалаудың ертерек стадияларында объектіні талдауға мүмкіндік береді (яғни құрылымды нақтылаудың немесе жобаланатын объект мақсатын нақтылаудың жоғарғы деңгейлерінде). ҚДТ – да метадеңгейлер бөлшектер жиынтығының өзара байланысына қатысты фазалық айнымалыларды тіркейді, бұл автоматты басқару теориясына және жаппай қызмет көрсету теориясына тән.

Микродеңгейдегі құрылымдық модельдер дегеніміз геометриялық модельдер болып табылады, ал макродеңгеймен метадеңгейде – топологиялық модельдер болмақ.

Аналитикалық ММ – шығыс параметрлерінің анық өрнегі сондай – ақ кіріс және ішкі параметрлердің функцияларын білдіреді: $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X}, \overline{Q})$.

Алгоритмдік ММ – шығыс параметрлерінің алгоритм формасындағы кіріс және ішкі параметрлермен байланысын білдіреді. Анық емес *ММ* $L\overline{V}(\overline{Z}) = \varphi(\overline{Z})$ функционалын есептеу алгоритмімен $\overline{Y} = F_1(\overline{Z})$ толықтырыла отырып, алгоритмдік болып табылады. Мұндай модельдерге мысал ретінде электрондық күшейткіштің өткізу жолағын, фаза немесе модуль бойынша тұрақтылық қорын, ауысу үрдісінің уақытын және т.б. келтіруге болады.

Имитациялық модель – алгоритмдік *ММ* сияқты анықталады, онда уақыт бойынша объектінің сыртқы әсерден өзгерісі көрсетілетін болады.

Теориялық ММ – үрдістерді және объектілер мен құбылыстардың берілген класына тән олардың заңдылықтарын (теория негізінде) зерттеу нәтижесінде құрылады.

Эмпирикалық ММ – объект кірісіндегі және шығысындағы фазалық айнымалыларды өлшеу арқылы, объектінің қасиетіндегі сыртқы әсерлерді зерттеу жолымен объектіні «қара жәшік» ретінде зерттеу нәтижесінде құрылады. Алынған өлшеу нәтижелері өңделеді және кестеге, сұлба, графикаға айналады немесе объект үшін $\overline{Y} = \overline{F}(\overline{X})$ түріндегі тәуелділік анықталады. Соңғы жағдайда объектіні идентификациялау (біз бұл тапсырманы оңтайландыру тарауында қарастыратын боламыз) туралы түсінік қалыптасады. Эмпирикалық модельдер құру үрдісі үшін сараптамаларды жоспарлаудың жақсы әдісі мен зерттеу нәтижелерін интерпретациялаудың маңызы зор.

Толық ММ – бұл модельде барлық элементарлық байланыстардың фазалық айнымалылары қатысатын болады (яғни, мұнда жобаланатын объектінің барлық элементтерінің күйлері көрсетілетін болады).

Макромодель – элементарлық байланыстардың барлығын бірдей көрсете бермейді. Әдетте толық ММ және макромодель түсініктері бір объектінің екі моделінің (объекті сипатын нақтылаудың түрлі дәрежесін көрсететін) айырмашылықтарын көрсету үшін қолданылады. Кедергінің *ММ* $U=R\cdot I$ функционалдық модель, макродеңгей, теориялық болып табылады. Жалпы жағдайда *ММ* алу келесі операцияларды қамтиды:

1) Модельде көрініс табатын объект қасиеттерін таңдау керек. Бұл таңдау *ММ* пайдалануды талдауға негізделеді және *ММ* әмбебаптық дәрежесін анықтайды. Операцияның орындалу нәтижесінде $\overline{X}$, $\overline{Q}$, $\overline{Y}$ айнымалыларын анықтау болмақ, мысалы, электрондық күшейткіш үшін: $\overline{Q}$ - сыртқы параметрлер: жүктеме кедергісі және сыйымдылығы, қорек көзінің кернеуі; $\overline{X}$- ішкі параметрлер: резисторлар кедергілері, конденсаторлар сыйымдылығы, транзисторлар параметрлері; $\overline{Y}$ - шығыс параметрлері: өткізу жолағы, орташа жиіліктегі күшейту коэффициенті, кіріс кедергісі.

2) Объектінің таңдалған қасиеттері туралы бастапқы ақпарат жинау. Мағлұматтар көзі – анықтамалар, прототип – объектілер сипаттамасы, жобаланатын объектіге жуықталған *ММ* болуы мүмкін. Бұл операцияның орындалу нәтижесі $\overline{X}$ және $\overline{Q}$ параметрлерінің мүмкін болатын аумағын (анықтау аумақтары) беру болып табылады, мысалы, $Q_1 = U_{ист} = (220 \pm 10)в$, $X_1 = R_1 = [10,20]ком$.

3) *ММ* құрылымын синтездеу. *ММ* құрылымы - модельдердің математикалық қатынасының жалпы түрі (ондағы параметрлердің сандық мәндері нақтыланбайды). *ММ* құрылымы графикалық формада көрсетілуі мүмкін, мысалы, балама сұлба, графикалық немесе құрылымдық сұлба түрінде. Құрылымды синтездеу – операцияның жауаптырақ және нашар бейімделетін қалыптасуы.

4) *ММ* параметрлерінің сандық мәндерін есептеу. Бұл тапсырма қойылымы берілген құрылым моделінің дәлсіздігін минимизациялау тапсырмасы ретінде анықталады, яғни $\min \varepsilon_м(\overline{X}), \overline{X} \text{ э } X_{доп}$, мұндағы $\overline{X}_{доп}$ - модельдің ішкі параметрлері үшін мүмкін болатын мәндер аумағы. $\varepsilon_м$ - модельдің сыртқы параметрлерінің өзгеру аумағындағы $\overline{Q}_{ном}$ қандай да бір берілген нүктеде анықталады.

5) *ММ* дәлдігін және адекваттылығын бағалау. *ММ* қолдану үшін үлкен құндылықты $Q_1^*, Q_2^*, ...Q_z^*$, сыртқы параметрлер кеңістігінің кейбір нүктелерінде алынған дәлдік бағасы емес, $AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}$ адекваттылық аумағы туралы мәлімет құрайды. $\overline{Q}$ сыртқы параметрлерінің көп өлшемді кеңістігінде $AO = \{\overline{Q}\big|_{\varepsilon_м \le \delta}\}$ жалпы жағдайда қисық сызықты шекаралары бар қырлы көрініс береді. Параметрлер кеңістігі $\overline{Q}$ өлшемі екіден көп болса, адамның адекваттылық аумақты қабылдауы қиындайды. Сондықтан көп жағдайларда адекваттылықтың аппроксимацияланған аумағы (ААА) мына түрде

анықталады: $Q_1^1 \le Q_1 \le Q_1^2, Q_2^1 \le Q_2 \le Q_2^2, ...Q_n^1 \le Q_n \le Q_n^2$. Адекваттылықтың аппроксимацияланған аумағы – координаталар осьтеріне паралель жақтары бар гиперпараллилепипедті білдіреді.

6) Автоматтандырылған жобалау кезінде алынған модель машиналық формада ұсынылады, яғни талдау және синтездеуге арналған қолданбалы бағдарламалар пакеті оны өңдеуге мүмкіндігі болатындай бағдарламалар түрінде көрсетіледі. Бұл форма арнайы бағдарламалық қамтаманың проблемалық – бағытталған тілі ережесімен көрсетіледі.

Дәріс 2. Математикалық модельдер қасиеттері

Дәрістің мақсаты: статикалық және динамикалық модельдер. Математикалық модельдің адекваттылығы және тиімділігі.

Модельденетін объектінің кіріс және шығыс айнымалыларының арасындағы байланысты жалпы жағдайда графикалық, аналитикалық немесе алгоритмдік түрде сипаттауға болады. Айталық, математикалық жабдықтардың көмегімен әрбір шығыс және кіріс айнымалыларының тәуелділігін орнатып, сипаттауға болады. *M=M(X,Y,Z)* болсын. Мұндағы *X* – кірістер жиыны, *Y* – шығыстар жиыны, *Z* – жүйе күйі. Енді модельдеу көзқарасы тұрғысынан маңызды деп саналатын түрлі класты объектілердің ішкі қасиеттерін қарастыралық және де модельденетін объектінің құрылымы және параметрлері деген түсініктерді қолдануға қажеттілігі туындайды.

Құрылым дегеніміз – модельде ескерілетін объект құрамындағы компоненттер мен байланыстардың жиынтығы, ал объект сипаттамасын қалыптастырғаннан кейін, оның кіріс және шығыс айнымалыларын байланыстыратын математикалық өрнек түрі (мысалы: y=au+bv).

Параметрлері дегеніміз – объектінің құрылымда бейнеленетін ішкі қасиеттерінің сандық сипаттамасы, ал қалыптасқан математикалық модельде олар құрылымды сипаттайтын (а және в) өрнекке кіретін коэффициенттер маңызы (тұрақты айнымалылар). Бірінші қасиеті – *үздіксіздік* және *дискреттік*. Айнымалылары (қажет жағдайда уақыт та болуы мүмкін) бір – біріне жуықтас мәндердің шексіз жиынын қабылдай алатын барлық объектілер үздіксіз немесе континульды деп аталады. Күйлері тек макроскопиялық, физикалық шамалармен (температура, қысым, жылдамдық, жылдамдату, ток күші, электр немесе магний өрістерінің кернеуі және т.б.) сипатталатын нақты физикалық және теориялық объектілердің басым бөлігі үздіксіз қасиетке ие. Осындай объектілерді адекватты сипаттайтын математикалық құрылымдар да үздіксіз болуы керек. Сондықтан осындай объектілерді модельдік сипаттау кезінде дифференциалдық және интегро - дифференциалдық теңдеулер аппараты қолданылады. Дифференциалдық теңдеулер физикалық және техникалық объектілерді модельдік сипаттау құралы ретінде кең таралған, кең таралғаны соншалық, кейбір мамандар, соның ішінде инженерлер толық қанды модель ретінде тек соны қарастырады.

Бұл дұрыс емес. Айнымалылары қандай да бір ақырғы санды қамтитын объектілер дискреттік деп аталады. Мысалы: релейлі байланысты ауыстырып қосу сұлбалары, АТС коммутациялық жүйелері дискреттік объектілерді үстірт сипаттаудың негізі математикалық логика аппараты (логикалық функциялар, бульдік алгебра аппараты, алгоритмдік тілдер) болып табылады. ЭЕМ дамуына байланысты талдаудың дискреттік әдістері үздіксіз объектілерді сипаттап, зерттеу үшін де кең қолданысқа ие болып отыр.

Үздіксіз немесе дискреттілік. Бұл қасиеттер күй параметрлері, үрдіс параметрі, жүйенің кірісі және шығысы қамтылатын жиындар (жиынтықтар) құрылымда көрініс табады. Осылайша *X, Z, Y, T* жиындарының дискреттілігі дискретті модельді құрайды, ал олардың үздіксіздігі – үздіксіз қасиеттерге ие модель деген түсінікті қалыптастырады. Кірістердің дискреттілігі (сыртқы күш импульстары, әсерлердің сатылығы және т.б) жалпы жағдайда модельдің тұтастай дискреттілігіне әкелмейді. Дискретті модельдің маңызды сипаттамасы жүйе күйінің саны мен шығыс сипаттамалары мәндерінің сандарының ақырғылығы немесе шексіздігі болып табылады. Бірінші жағдайда модель дискретті ақырғы деп аталады. Модельдің дискреттілігі табиғи шарт болуы да мүмкін (жүйе өзінің күйі мен шығыс қасиеттерін секірмелі түрде өзгертеді), сонымен қатар жасанды енгізілген ерекшлеіктерге ие болуы да мүмкін. Соңғысына қарапайым мысал – үздіксіз математикалық функцияны тиянақталған нүктелердегі оның мәндер жиынына алмастыру. Модельдің келесі қасиеттері – *детерминирленген* немесе *стохастикалық*. Егер модельдегі шамалар арасында кездейсоқ, яғни тек кейбір ықтимал сипаттамалармен анықталатыны болса, онда модель стохастикалық (ықтимал, кездейсоқ) деп аталады. Бұл жағдайда, модельді қарастыру барысында алынған барлық нәтижелер де стохастикалық сипатқа ие болады және сәйкесінше интерпретирленген болу керек.

Ескеру керек, тәжірибе тұрғысынан қарағанда, детерминирленген және стохастикалық модельдер арасындағы шекара анық емес. Техникада кез келген өлшем немесе салмақ туралы бұл дәл мән емес деп айтуға болады, математикалық күту типті орташа шамаға айтар болсақ, есептеу нәтижелері зерттелетін шамалардың тек математикалық күтуін беретін болады. Дегенмен мұндай көзқарас шарасыздықтан туындайды. Ыңғайлы тәжірибелік тәсіл мынада, тиянақталған мәндерден елеусіз ауытқудың өзінде модель детерминирленген деп саналады, ал нәтиженің ауытқуы бағалау әдісімен немесе оның сезгіштігін талдау арқылы зерттеледі. Ауытқу елеулі болған жағдайда стохастикалық зерттеу әдісі қолданылады.

Топталғандық немесе *үлестірулік қасиеттер* – объектілердің модельдік сипаттамасында кеңістік ұзақтығы ескеріледі (физикалық үрдістердің таралу жылдамдығының фонында). Егер объектінің кеңістіктік ұзақтығын елемей, тәуелсіз айнымалы тек уақыт боп табылса (өтетін үрдістерге байланысты), онда мұндай объектілер туралы топталған параметрлі деп айту қабылданған. Қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын (детерминирленген және үздіксіз жағдайда) мұндай объектілердің қатарына

механизмдердің, машиналардың, жалпы локальды техникалық құрылғылардың (компоненттер арасындағы арақашықтық зерттелетін қасиеттер мен сипаттамаларға онша әсер етпейтін) көпшілік бөлігі жатады. Кеңістікті ұзындықты объектілерде адекватты сипаттау үшін уақытпен қатар, кеңістік координаталары да есептеу талап етіледі. Мұндай жағдайда үлестірімді параметрлерді қамтитын объектілер класы туралы түсінік қалыптасады. Мысалдар: барлық мүмкін болатын «ұзын желілер» - сымды байланыс желісі (телеграфтық теңдеумен суреттеледі), ұзын тұрба желілер, үздіксіз кеңістіктегі технологиялық желілер. Жалпыландырылған математикалық модельді (Максвель теңдеуімен) электромагниттік өріс үлестірілген параметрлі үш өлшемді объектіге классикалық мысал бола алады. Үлестірілген параметрлі үздіксіз және детерминирленген объектілер жеке туындыдағы дифференциалдық теңдеулермен сипатталады.

Статикалық және *динамикалық модельдер.* Статикалық модельдер уақыт бойынша өзгермейтін немесе жекелеген уақыт қиығында қарастырылатын объектілерге қатысты. Динамикалық модельдер объектілер күйінің сыртқы және ішкі факторларға байланысты өзгерістерін қарастырады. Динамикалық модельдер үшін стационарлық ұғымы кейбір физикалық шамалардың уақыт бойынша өзгермейтіндігінде жиі байқалады: жылдамдығы тұрақты сұйық ағыны стационарлық болып табылады, механикалық жүйе стационарлық, ондағы күш координаталарға тәуелді және уақытқа тәуелсіз. Стационарлық объект деп объектілер құрылымы мен параметрлеріндегі өзгермеушілікті түсіндіреді. Сондықтан ол өзінде тек тұрақты коэффициенттерді қамтитын өрнекпен сипатталады. Стационарлық емес параметрлерге, құрылымға және бір мезгілде екі түсінікке де қатысты болуы мүмкін, әсіресе параметрлерге қатысты стационарлық емес тік қасиет жиі орын алады, яғни айнымалы коэффициенттері бар объект қарастырылады, бұл зерттеуді қиындатады. Айнымалы құрылымды елеулі стационарлық емес объектілерді сипаттаудың жалпы теориясы және арнайы математикалық аппараты әлі жоқ. Мұндай объектілерді зерттеу қолданбалы жүйелік талдаудың кейбір әдістерінің негізінде жүргізіледі, онда үстірт математикалық процедуралар эвристикалық және дұрыс ойлармен үйлестіріледі, сондай – ақ декомпозиция тәсілі, әрі қарай жекелеген шешімдерді біріктіру тәсілі жиі қолданылады.

Талдау өрістерінің жалпылығы, математикалық аппарат мүмкіндіктері мен зерттеудің еңбек ауқымдылығы тұрғысынан объектілерді сызықтық және сызықтық емес деп бөледі. Біріншісі үшін суперпозиция принципі дұрыс, онда объектінің әр шығысы қандай да бір сызықтық формуламен сипатталады (оны сәйкес кіріс айнымалылар мәндерімен байланыстыратын формула).

Математикалық аппарат тұрғысынан алып қарағанда, айнымалыларға қатысты объекті сызықтығы мынаны білдіреді, оның математикалық сипаттауына кіретін коэффициенттер арасында айнымалыларға, олардың туындылары мен интегралдарына тәуелді шамалар болмайды. Егер коэффициенттер уақытқа да тәуелді болмаса, бұл ең тиімді және техникалық

қосымшалардағы кең таралған жағдай болмақ: сызықтық стационарлық модельдер классындағы объект сипаттамасы сызықтық (сызықтық емес) тәуелділік ретінде түсіндіріледі. Сызықтық табиғатына жақсы сәйкес келетін табиғи болуы да, сондай – ақ модельдің жасанды (ыңғайлы ету мақсатында енгізілген) қасиеті болуы да мүмкін.

Математикалық модельдің адекваттылығы және тиімділігі.

Түпнұсқа объектіге қажетті және жеткілікті дәрежедегі сәйкестік немесе модельдің дұрыстығы жөніндегі мәселе модельдеу әдістемесі саласындағы маңыздылар қатарына жатады. Тиімділік дегенді тәжірибелік пайдалылығы деп түсіну керек. Модельдеу үрдісі бір–біріне қарама–қарсы екі ағымның диалектикалық әсері жағдайында болады. Бір жағынан, зерттеуші модельде объектінің қасиеттері мен сипаттамаларын толық та дәлірек сипаттауға ұмтылады. Мұндай тәсілдің аяғы бір қатар қиындықтардың (айнымалылар санында, ескерілетін байланыстар мен әсерлердің санында, бастапқы деректер дәлдігіне қойылатын талаптардың жоғарылауында және т.б.) туындауына әкеп соғады. Істің нақ осы жағы – модельдің түпнұсқа – объектіге сәйкестігінің толықтығына талап көптеген философиялық жұмыстарда айтылып, жүп және кейбір авторлар мұны модельді жетілдіру шарасы ретінде қарастырып келеді. Дегенмен тәжірибе мынаны көрсетеді: модельдің тиімділігі оның күрделілігіне кері тәуелді (соңғысының өсуін жылдам төмендетеді). Құрылатын модельдің толықтығын – дәлдігін үйлестіруді математикалық жолмен анықтау қиын, бұған көптеген ескерілу керек факторлардың бір мәнді еместігі, құрастыруындағы күрделіліктер себеп.

Тапсырма – объект жұбы негізінен объект айнымалыларын тіркеудегі номенклатураны анықтайды; модельге кіретін параметрлер, олардың арасындағы байланыстар саны және сипаты, деректер дәлдігіне қойылатын талаптар және модельдің бірқатар маңызды сипаттамалары. Тиімділіктің шешуші факторы қазіргі кезде – математикалық аппарат. Модельдің тиімділігі кәсіптік сапаға, зерттеуші орындаушының дайындық деңгейі сияқты, субъективті моменттерге де байланысты. Осылайша, мынадай тұжырым жасауға болады: кез келген модельдің үздік тәжірибелік сапасына немесе тиімділігіне қол жеткізудің бір жолы – модельді түпнұсқаға жуықтату мен модельді оның тікелей мақсаты бойынша пайдалану мүмкіндігі мен ыңғайлылығын қамтамасыз етуші, қарапайымдылығы арасындағы дұрыс шешім болмақ, тәжірибедегі модельдің шектен тыс дәлдігі оның толық еместігі мен өрескелдігіне қарағанда тәуірірек. Зерттелетін үрдіс немесе объектінің математикалық моделі барлық зерттеулерге негіз болып табылады. Соған қарамастан бүгінгі күні қоршаған ортадағы нақты үрдістер мен құбылыстарды модельдеу туралы ғылым жоқ, болмауы да мүмкін (бұл да ғылыми ізденістердің жаңа әдістерін ашу, ойлап табу, құру сияқты ғылымның жоқтығы сияқты). Керек десең, басқа ғылымдардан үстем тұратын математиканың өзі көп дәрежеде дедукцияны қолданады, өзінің прогресі бойынша интуиция, сезу, фантазия (қиял) және т.б. ойлаудың индуктивті

тәсілі сияқты «ғылыми емес» әдістерге қарыз. Объектілерді және нақтылық құбылыстарды модельдеу (бүгінгі таңда) көп дәрежеде өнерді білдіреді, ал өнер тәжірибеден жинақталады. Адамзат осындай тәжірибеге ие. Бұл жаратылыстану классиктерінің тәжірибесі өз мақсаттарына қол жеткізу үшін математикалық аппаратты пайдаланған жаратылыстану ғылымдары өнімдерінің тәжірибесі және т.с.с. Әрбір нақты жағдайда, модельдің сапасы зерттелетін үрдістің мәні мен физикасын түсіну және адекватты математикалық сипаттамасын құрудағы зерттеушінің қабілетіне көп байланысты. Зерттелетін немесе басқарылатын үрдіс күрделі жағдайда математиканы қолдануы. Күрделілік әдетте модельді сипаттайтын сипаттамалар санының, олардың арасындағы байланыстар санының үлкендігінде және тапсырма тек қана зерттелетін үрдістік адекватты математикалық сипаттамасын құруға (яғни, оның моделін) ғана тірелмейді, сондай-ақ онымен жұмыс әдістемесін әзірлеумен де байланысты. Параметрлері орасан көп модельдермен зерттеу жүргізу қиын, сондықтан математиктер нақты үрдісті қалыптастыру барысында олардың ойынша маңыздылығы онша емес байланыстарды алып тастауға мәжбүр, математикалық сипаттамасын да осыған сәйкес әзірлейді. Зерттеушілерді қызықтыратын сұрақтар тұрғысынан ненің маңызды, ненің маңызды еместігін анықтау үшін ерекше интуицияға ие болу керек. Дегенмен маңызды тәжірибелік тапсырмаларды шешу кезінде шағын зерттеушілер тобының интуициясы мен тәжірибесіне сүйену мүмкін емес, модельдің адекваттылығын дұрыс дәрежеде анықтауға оның сипаттайтын мәнін, қолдану саласын, сол модель зерттейтін сұрақтар көлемінде оның жылдамдығын анықтауға мүмкіндік беретін әдістеме қажет. «Білімдер жүйесі» қажет, осының негізінде пайда болған белгілі бір қағыдалар мен тәжірибелерді, және осы жүйенің базасында дәлелденген және орнатылған ережелерді қолдана отырып, зерттелетін үрдістер моделін құруға, оларды талдауға және оларды алдағы уақытта қолдану жолдарын анықтауға мүмкіндік жасалу керек.

Дәріс 3. Модельдеу құрудың негізгі әдістері

Дәрістің мақсаты: мақсаттарды ресурстық шектеулермен салыстыру, онда ресурстың мүмкіндіктерді ескеретін нақты мақсаттардың үйлесімдігімен қатар, модельдеу объектісі де қамтылған.

Модельдік зерттеу, басқа да саналы түрдегі мақсатты қызметтер сияқты белгілі бір мәселелердің туындауынан басталады – қандай да бір саладағы қолданыстағы мүмкіндікті (затты) жақсы жағына қарай өзгерту қажеттігімен байланысты. Мәселенің көзі – сол саланың немесе сыртқы факторлардың алдыңғы дамуы.

Мәселені ұғыну немесе нақтылау мақсат немесе мақсаттар жүйесін қалыптастыруға әкеп соғады, бұл мәселені шешу бойынша болашақ қызметтің қалаған нәтижесіне қол жеткізу ретінде түсіндіріледі. Қойылған мақсат оған

қол жеткізудің нақты мүмкіндіктерімен, яғни ресурстармен (материалдық және басқа да) ара қатынасын белгілеп алумен байланысты. Мақсаттарды ресурстық шектеулермен салыстыру – зерттеу тапсырмасын қалыптастыруға әкеледі, онда ресурстың мүмкіндіктерді ескеретін нақты мақсаттардың үйлесімдігімен қатар, модельдеу объектісі де қамтылады. Тапсырма мен модельдеу объектісі бірге қарастырылу керек. Зерттеу мақсаттары туралы деректер, сондай-ақ модельдеу объектісі туралы бастапқы ақпарат құрылатын модельдің сапалық критерийін, оның мүлтіксіз дәрежесінің сандық шамасын анықтау үшін қызмет етеді. Тапсырма қойылымы толық оңтайлы қалыптастырылған жағдайда (мысалы, сызықтық бағдарламалау аппаратының негізінде) критерий (дұрыс белгі) – сипаттамалары оңтайлы болғандағы мәндері экстремумға жететін, модель айнымалылары мен параметрлерінен функцияның қандай да бір түріне айналатын болады. Модельді құрудағы келесі қадам объект-тапсырма жүйесіне априорлы деректерге негізделген мазмұнды талдау жасау және класты таңдау немесе дәлірек айтқанда модель қалыптастыру тәсілін таңдау болып табылады. Егер объект онша күрделі болмаса, жеткілікті дәрежеде зерттелген болса және объектінің қасиеттері мен сипаттамаларын модельдік зерттеуге жататын кешен теориялық түсініктер мен деректер негізінде (эмпирикалық ақпараттың қажетті көлемімен толықтырылған) анықталған болса, онда модель құрудың аналитикалық жолын таңдаған дұрыс. Объектінің күрделілігіне, әлсіз зерттеулерге байланысты немесе сәйкес теориялық әзірлемелердің болмауына байланысты бұл жолдың жүзеге асырылуы мүмкін емес жағдай жиі кездеседі. Объектіні идентификациялау жолы альтернативті болып табылады, яғни объектінің моделін құру үшін оның қасиеттері мен сипаттамаларынан маңыздыларын сараптамалық жолмен анықтау қажет. Сараптама арнайы әзірленген оңтайлы жоспарға сәйкес жүзеге асырылады, сараптама деректері өңделеді және объектіні кіріс-шығыс математикалық моделі түрінде үстірт сипаттау үшін негіз болады. Теориялық жолмен құрылған немесе идентификацияланған қалыптасқан модель алдын ала таңдалған критерийге сәйкес бағаланады және ол қанағаттандырылады (қабылданады), немесе жеткіліксіз дәрежеде әзірленген ретінде ол кері қайтарылуы мүмкін. Соңғы жағдайда бұрынырақ орындалған кезеңдерге итерациялық түрде қатынас құра отырып, түзету қажеттілігі туындайды. Модель қабылданған жағдайда (жалпы жағдай і-ші итерациялық циклдан кейін) келесі кезеңге көшеді, бұл кезеңде сол тапсырмаға тәжірибелік тексеріс жүргізіледі. Бұл кезде де қосымша талаптар (мысалы, модельді қолдану қолайлылығына байланысты) туындап, қосымша түзетулер енгізу қажеттілігі туындауы мүмкін. Ең соңында, үрдістің соңғы кезеңіне көшеді – мұнда модельді зерттеу немесе басқа да тапсырмаларды шешу үшін тікелей өз мақсатында қолдануға мүмкіндік туады және бұл кезеңде де әрі қарай нақтылап, түзету енгізу қажеттілігі туындауы мүмкін.

Модель құру бір рет қана орындалатын акт емес, зерттеушінің өзіндік ізденуіне негіз болатын тізбекті жуықтату үрдісі болып табылады. Белгісіздіктің түрлі жағдайларынан бастап (бұл принципиальды, себебі объект

қасиеттері туралы нақты осы ақпараттың жетімсіздігі тапсырма қойылымын оның модельдік зерттеуі арқылы анықтауды қажет етеді) модельді құру бірқатар болжамдар енгізумен байланысты. Олардың кейбіреулері дұрыс болып шығады. Басқалары соңғы кезеңдерде дұрыс болмай қалады, мұндай жағдайда әрине, сол бөлімді қайта қарастыруға тура келеді және сәйкесінше алдағы барлық процедуралар түзетуге ұшырайды. Модельдерді құрудың осы секілді итерациялық сипаты (оның блок сұлбасында кері байланыстардың болуымен көрсетіледі) осы үрдістің принципиальды қасиеті болып табылады және итерация мүмкіндігінше қысқа болғаны жөн, ол қате болжамның оның пайда болу нүктесіне неғұрлым жақын болғанының дұрыстығын көрсетеді. Осы арқылы әрбір нақты модельдік зерттеудің рационалды жоспарына басты талап анықталмақ. Модельдеу мәселесі үш тапсырмадан тұрады:

- модель құру (модель құру алгоритмі болмағандықтан, бұл тапсырманы қалыптастыру жеңіл емес);
- модельді зерттеу (модельдердің түрлі класстарын зерттеу әдістері бар болғандықтан, бұл тапсырманы қалыптастыруға мүмкіндік көбірек);
- модельді қолдану (конструктивті және нақтыланған тапсырма).

Математикалық модельдеу технологиясы.

Математикалық модельдеу – жеткілікті дәрежеде күрделі құбылыс. Әдетте модельдерді құрастыру процедуралары туралы, модель нақты өмірді қаншалықты шамада көрсете алатындығы туралы айтылады. Бұл құбылыстың барлық жағы ескерілу керек. Математикалық модель үрдістердің уақыт бойынша дамуына, объектінің күйін, белгілі бір шарт орындалатын болса, оның қасиеттерін талдап, болжау үшін қолданылады. Осы болжамды алу үшін модель құру іс жүзінде жеткіліксіз де. Зерттелетін үрдістердің бізді қызықтыратын сипаттамаларын есептеу процедураларын әзірлеп, жүзеге асыру, модельді идентификациялау қажет, яғни ондағы сыртқы шамаларды (коэффициенттер, параметрлер, факторлар) анықтап, модельдің адекватты екеніне көз жеткізу қажет, бұл іс жүзінде тиімді болжам жасауға мүмкіндік бермек. Бұл болжамды талап етілген жағдайда беру қажет. «Математикалық модельдеу технологиясы» термині үрдістің өту болжамы немесе объектілер қасиеттерінің (математикалық моделін құрудан бастап, болжанатын шамаларды есептеуге дейінгі) болжамын іс жүзінде алу үшін қажетті, барлық аталған әрекеттер жиынтығын белгілеу үшін қолданылатын болады.

Математикалық модельдеу қандай да бір үрдістің уақыт бойынша дамуын болжау қажеттілігінен жиі басталады. Математикалық модельдеу актысы үрдісті толық сипаттайтын шамалар жүйесін енгізуден басталады.

Келесі қадам енгізілген шамалар арасындағы қатынастарды (тәуелділік, байланыстар) жазу болып табылады. Бұл қатынастар бақылаудан, тәжірибеден туындайды және үрдіс мәнін интуитивті ұғылу нәтиежесі болып табылады. Математикалық модельдеудің мәні үрдістің енгізілген сипаттамалары арасындағы қатаң бір мәнді баяндалатын қатынастарды алуда. Бұл қатынастарды таза математикалық жабдықтармен зерттеуге болады, яғни

олардың мазмұнды ұғымдарына үңілмей, олардың формальды нәтиежелерін алуға болады. Математика ғылымы шеңберінде нақты үрдістердің, құбылыстардың кейбір абстрактылы сипаттамалары арасындағы қатаң қатынастарының (тәуелділіктер, байланыстар) түрлі нәтижелерін алу тәсілдері әзірленеді. Мұнда зерттелетін үрдістің кейбір жақтарын елемей, «бояуын» солғындатып, өзіне ғана тән ерекшеліктерін ескермей нәтиже алу көзделеді, яғни берілген нақты берілген нақты үрдістен абстрактылы сұлбаға көшу орын алады. Гуманитарлық ғылымдар және өнер, керісінше, үрдістер мен құбылыстарды олардың өзіндік ерекшеліктеріне, қайталанбайтындығына қызығушылық тудыра отырып зерттейді. Бірақ бір-бірінсіз болмайтынына көз жеткізу мүмкін емес. Модельдің сыртқы шамаларын анықтау үрдісін оның идентификациясы деп аталады.

Математикалық модельдерді идентификациялау – математикалық модельдеу технологиясының маңызды бөлігі.

Көп жағдайларда идентификациялауға кететін шығындар нақты үрдістердің дамуын болжауға арналған математикалық модельдеу технологиясын қолданумен байланысты барлық қалған шығындардан асып кетеді. Модель идентификациясы оның верификациясымен - оның адекваттығын орнатумен тығыз байланысты (яғни нәтиженің болжанатындығына). Идентификацияның «стандартты» тәсілінде модельдің ішкі шамалары (немесе кейбір функциялары) сараптамалық жолмен өлшенеді, ал олардың сыртқы шамалары осы сыртқы шамаларды қамтитын модель көмегімен алынған болжам сараптамалық өлшемнен аз да болса ерекшеленетіндей етіп таңдалады. Бұл тәсіл бір мезгілде модельдің адекватты болатынына сенім бар деген сөз. Модельдің адекваттылығына толық сенімді оны пайдаланулық тәжірибесі береді: егер модельді пайдаланулау кезінде ол беретін болжам мен нақты жағдай арасында таңқаларлықтай қарама-қайшылық туындап қалмаса, модель адекватты болып саналады. Пайдалану кезінде адекватты болмай шыққан модель түзетуге ұшырайды, немесе толықтырылады, болмаса модель жаңасымен ауыстырылады.

Әрбір модель қандай да бір шеңберде, қандай да бір көлемде адекватты болып табылады және осы көлемнен шыққан жағдайда ол түзетіліп, толықтырылу керек немесе жаңасымен алмастырылуы қажет.

Математикалық модельдеу технологиясы келесі кезеңдерден тұрады: модель құру, модельді идентификациялау және верификациялау, модельді пайдалану. Әрбір кезеңнің орындалуы оның алдындағы кезеңге қайтып оралуды шақыруы мүмкін. Әрбір кезеңде құрастырылған модельге түзету енгізу қажеттілігі туындау мүмкін, яғни бірінші кезеңге қайта оралу талабы туындайды, идентификация кезеңінде модельдің сыртқы шамаларын есептеу алгоритміне ішкі шамалар бойынша түзетуді енгізу қажеттілігі туындауы мүмкін және тағы сол сияқты. Осы жағдайды ескере отырып, әрі қарай математикалық модельдеудің технологиялық циклдары туралы әңгіме қозғайтын боламыз.

Модель құрастыру кезеңі.

Нақты үрдісті сипаттайтын шамаларды табу, олардың мүмкіндігінше консервативті, уақытқа, арақашықтыққа, орналасқан орынға, басқа да нақты үрдістің басқа сипаттамаларына (тәжірибелік мақсатта тиімді дәлдік көлемінде) тәуелсіз болғаны дұрыс. Қарапайым заңдармен аталатын кейбір инварианттылықтарды жорамалдау. Матеметикалық модельдерге қатысатын инварианттар сыртқы шамалар болып табылады. Белгілі бір шамалардың инварианттығы туралы болжамдар тәжірибеден, нақты шамалар өлшемінен, осы өлшемдерді өңдеуден туындауды. Сондықтанда математикалық модельдеудің өлшеу техникасынсыз мәні жоқ. Модельдің ішкі шамаларын оның сыртқы шамалары бойынша есептеу процедурасын әзірлеу және жүзеге асыру кезеңі.

Мұнда туындайтын бірінші сұрақ: жалпы осындай процедура бар ма? Қарапайым модельдер үшін бұл сұраққа жауап жиі таң қалдырады. Күрделі модельдер үшін арнайы математикалық талдау тақырыбы болып табылады. Көптеген модельдер типтері үшін осы жағдайдың орын алу тұжырымдамасы *бар болу* және *даралық* теоремалары деп аталады. Бар болу және даралық теоремасы дәлелденген математикалық модельдерді *тұйықталған* деп атау қабылданған. Модель тұйықтығын анықтағаннан кейін ішкі шамаларды сыртқылары бойынша есептеу процедурасын әзірлеу қажет. Егер бұл процедура аналитикалық теңдеу түрінде берілсе, онда мұндай модель аналитикалық деп аталады.

Тұйықталған математикалық модельдер үшін ішкі шамаларды беретін аналитикалық теңдеулер жоқ (мүмкін бар да шығар, бірақ бұл фактіні аңғармадық) ішкі шамалардың және олардың функцияның мәнін беретін сандық процедураларды әзірлеуде қиындық туады (берілген дәлдікпен). Бұл мәселе математикадағы есептеу математикасы немесе сандар әдістері деп аталатын бағыттар көлемінде шешіледі. Осыдан кейін ЭЕМ-де осы сандық процедураны жүзеге асыратын бағдарлама құрастыру керек.

Модельді пайдалану (пайдаланулау) кезеңі.

Бұл кезең алдыңғыға тәуелді. Басқа сөзбен айтқанда, пайдалану кезеңі бізді қызықтыратын шамаларды есептеуде қажет ақпарат көлеміне, сол есептеудің өзінің көлеміне байланысты. Осы көлемдерге байланысты математикалық модельдерді пайдаланудың 3 формасын атауға болады (егер пайдалану деп модельденетін үрдістің дамуын болжау актысын немесе белгілі сыртқы шамалар бойынша модельдің ішкі шамаларын есептеу процедурасын жүзеге асыру арқылы оның қасиеттер актысын түсінсек). Бірінші форма – бұл аналитикалық есептеу теңдеулері. Модельдерді пайдаланудың екінші формасы – берілген сыртқы шамалар бойынша ішкі шамалардың функциясын есептеуге арналған ЭЕМ-дегі бағдарламалар. Бұл теңдеулер негізгі ретінде түсіндіріледі. Бұл теңдеулерден басқа түрлі олардың жуықталған нұсқалары мен комбинациялары бар. Модельді пайдаланулаудың үшінші формасы – мәселелік бағытталған интерактивті жүйелер. Қызықтыратын шамаларды

есептеуді жүзеге асыратын бағдарламамен біріге отырып, интерактивті жүйелер мынадай жабдықтарды қамтиды:

- ЭЕМ-мен сұқбатта сыртқы шамалармен жұмыс істеуге мүмкіндік беретін жабдықтар;
- есептеу нәтижелерін түрлі тәсілмен визуалдау және өңдеу жабдықтары.

Интерактивті жүйлер математикалық модельдеудің дәстүрлі технологиясын ЭЕМ базасында пайда болған ақпараттық технологиямен байланыстырудың нәтижесі болып табылады.

Дәріс 4. Жүйелерді модельдеудің әдістемелік негізі. Модельдеудің математикалық сұлбасы

Дәрістің мақсаты: жүйелерді модельдеу теориясының негізгі түсініктері. Жүйе және жүйе элементіне түсінік. Модельдеу мақсаты.

Жүйелерді модельдеу теориясының негізгі түсініктері. Қазіргі уақытта күрделі үлкен жүйелерді талдап синтездеу кезінде *жүйелік тәсіл* жақсы дамып отыр, оның *классикадан* (немесе индуктивтіден жекеден жалпыға көну жолымен және жеке әзірленген жүйе компоненттерін біріктіріп жүйені синтездеу арқылы) айырмашылығы бар. Жүйелік тәсіл жалпыдан жекеге біртіндеп көшуді көздейді, оның негізінде мақсатты карастырып жатыр және зерттелетін объект қоршаған ортадан алынады.

Жүйе және жүйе элементіне түсінік. Күрделі жүйелерді жобалау және пайдаланулаумен айналысатын мамандар *қандайда бір мақсатқа жету үшін,* жалпы қасиетке ие түрлі деңгейдегі басқару жүйелермен жұмыс істейді. Бұл ерекшілік жүйенің келесі анықтамаларында ескерілетін болады.

S жүйесі – кез келген табиғатты элементтердің өзара байланысқан мақсатты жиыны.

Сыртқы орта E - кез келген табиғатты элементтер жүйесінің тыс қолданыстағы жиын (жүйеге әсер ететін немесе оның әсерінде болатын).

Жүйені модельдеудің жүйелік тәсілінде *модельдеу мақсатын* дәл анықтап алу қажет. Модельдеу сұрақтарына байланысты, мақсат дегеніміз модельдеудің талап ететін тапсырмаларынан туындайды, бұл критерийлерді таңдап, *M* құрылатын модельге қандай элементтердің кіретінін бағалауға мүмкіндік береді. Сондықтан құрылатын модельде жекелеген элементтерді іріктеу критерийі болу қажет.

Модельдеу мақсаты:

1) бағалау – жобаланатын немесе қолданыстағы жүйенің нақты сипаттамаларын бағалау, ұсынылатын құрылым жүйесінің ұсынылатын талаптарға қаншалықты сәйкес келетінін анықтау;

2) салыстыру - функционалдық мақсаты бір, бірнеше бәсекелес жүйелерді салыстыру немесе бір жүйенің бірнеше құрылымын өзара салыстыру;

3) болжау – түрлі жұмыс жағдайында жүйенің күйін бағалау;

4) сезгіштігін талдау – жүйенің күйіне әсер етіп, оның тиімділік көрсеткіштерін анықтайтын жүйеге әсер етуші факторлардың үлкен санынан анықтау;

5) оңтайландыру – жүйенің тұтастай ең үздік тиімділік көрсеткіштерін қамтамасыз ететін әсер етуші факторлар мен олардың шамаларының үйлесімін табу немесе орнату.

1-4 талдау тапсырмалары, 5- синтездеу тапсырмасы.

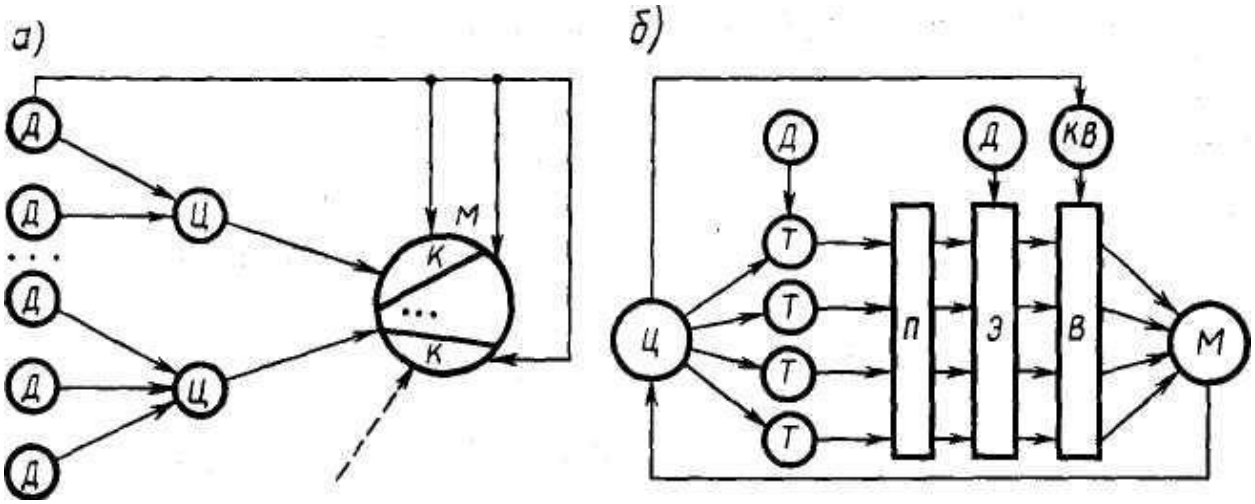
Жүйені зерттеу тәсілдері. Жүйелік тәсіл үшін маңыздысы жүйе құрылымын – жүйе элементтері арасындағы олардың өзара әрекеттестігін көрсететін байланыстар жиынтығын анықтау болып табылады.

Құрылымдық тәсілде *S* жүйесінің белгіленген құрамы және олардың арасындағы байланыстар анықталады. Элементтер жиынтығы және олардың арасындағы байланыстар жүйе құрылымына баға беруге мүмкіндік туғызады. Соңғысы зерттеу мақсатына байланысты түрлі қарастыру деңгейінде сипатталуы мүмкін. Құрылымға сипаттама берудің жалпыламалау түрі – бұл топологиялық сипаттама, жүйенің құрамдас бөліктерін ең жақсы жалпылама түсіндірерде графтар теориясының жақсы қалыптасқан базасында анықтауға мүмкіндік береді. Онан кейінгісі – функционалдық сипаттама, онда жекелеген функциялар қарастырылады, яғни жүйенің жұмыс алгоритмі құрастырылады, және жүйе орындайтын функцияны бағалаушы функционалдық тәсіл жүзеге асырылады, мұндағы функция дегеніміз, мақсатқа қол жеткізуге әкелетін қасиеттер.

Модельдің жеке бөліктерінің арасындағы өзара байланыстарды зерттеудің қарапайым тәсілі – оларды обьектілердің жекелеген ішкі жүйелері арасындағы байланыстар көрінісі ретінде қарастыру. Мұндай классификациялық тәсіл жеткілікті дәрежедегі қарапайым модельді құру кезінде қолданылуы мүмкін. Классикалық (индуктивті) тәсіл кезінде *М* моделін синтездеу үрдісі 4.1 а суретте көрсетілген. Модельдеуге жататын нақты обьект жекелеген ішкі жүйелерге жіктеледі, яғни модельдеу үшін *Д* бастаптқы деректер таңдалады және модельдеу үрдісінің жекелеген жақтарын бейнелейтін *Ц* мақсат қойылады. *Д* бастапқы деректердің жекелеген жиынтықтары бойынша жүйе қызметінің жекелеген жақтарын модельдеу мақсаты қойылады, осы мақсаттың негізінде болашақ модельдің қандай да бір *К* компоненті қалыптасады. Компоненттер жиынтығы *М* модельге біріктіріледі.

Осылайша, классикалық тәсіл негізінде *М* моделін әзірлеу жекелеген компоненттерді біртұтас модельге қосуды білдіреді, және компоненттердің әрқайсысының өзінің шешетін тапсырмалары болады және модельдің басқа бөліктерінен оқшауланған. Сондықтан да классикалық тәсіл салыстырмалы түрде қарапайым модельдерді (онда нақты объекті қызметінің жекелеген жақтарын бөліп алып, өзара тәуелсіз қарастыруға болады) жүзеге асыру үшін қолданылуы мүмкін. Күрделі объект моделі үшін шешілетін тапсырманы жіктеп қарастыруға да болмайды, себебі модельді нақты бағдарламалық –

техникалық жабдықтар базасында жүзеге асырған кезде ресурстар шығынын едәуір өсіріп жібереді. Классикалық тәсілдің екі ерекше жағын бөліп қарауға болады: жекеден жалпылыққа қозғалыс байқалады, құрылатын модель (жүйе) оның жекелеген компоненттерін біріктіру арқылы құрылады және жаңа жүйелік әсердің пайда болуы ескерілмейді. Жүйелік тәсілі базасында *М* моделін синтездеу үрдісі шартты түрде 4.1 б суретте көрсетілген. Сыртқы жүйені талдау кезінде белгілі болған *Д* бастапқы деректер негізінде, жүйеге жоғарыдан келетін немесе оны жүзеге асыру мүмкіндігінен туындайтын шектеулер негізінде, және жұмыс істету мақсаты негізінде *S* жүйесі моделіне *Т* бастапқы деректер қалыптасады. Осы талаптардың негізінде шамамен қандай да бір *П* ішкі жүйесі, *Э* элементі қалыптасады да, синтездің күрделірек кезеңі – жүйені құрушы *В* таңдалады, ол үшін *КВ* таңдаудың арнайы критерийі қолданылады.



4.1 сурет - Классикалық (а) және жүйелік (б) тәсілдер негізіндегі модельді синтездеу үлгісі

Модельдерді әзірлеу стадиялары.

Жүйелік тәсіл негізінде модельді әзірлеудің қандай да бір тізбегі ұсынылуы мүмкін, онда жобалаудың екі стадиясы жіктеліп беріледі: макрожобалау және микрожобалау.

Макрожобалау стадиясында *S* нақты жүйесі және *Е* сыртқы орта туралы деректер негізінде сыртқы орта моделі құрылады, жүйе моделін құруға арналған ресурстар мен шектеулер анықталады, жүйе моделі және *S* нақты жүйесіндегі *М* модельдің адекваттылығын бағалауға мүмкіндігін беретін критерийлер таңдалады.

Микрожобалау көп дәрежеде таңдалған модельдің нақты типіне байланысты. Имитациялық модель жағдайында модельдеу жүйелерінің ақпараттық, математикалық, техникалық және бағдарламалық қамтамалары құрылуы керек.

М қолданылатын модель типіне тәуелсіз, оны құру кезінде жүйелік тәсіл қағидаларын басшылыққа алған дұрыс:

1) модельді құру кезеңдері және бағыттары бойынша пропорциональды тізбекті қозғалу;

2) ақпараттық, ресурстық, сенімділікке байланысты және басқа да сипаттамаларды келісу;

3) модельдеу жүйесіндегі иерархиялық жекелеген деңгейлерінің дұрыс қатынасы;

4) модельді құрудың жекелеген стадияларының тұтастығы.

Жүйелік модельдеудің математикалық сұлбасы.

Жүйенің жұмыс істеу үрдісін *ММ* құру кезіндегі бастапқы ақпарат кезінде зерттелетін (жобаланатын) *S* жүйесінің белгіленуі және жұмыс жағдайы туралы деректер қолданылады. Бұл ақпарат модельдеудің негізі мақсатын, *ММ* қойылатын талаптарды, абстракциялау деңгейін анықтап, модельдеудің математикалық сұлбасын таңдауға мүмкіндік береді.

Математикалық сұлба түсінігі математиканы есептеу әдісі ретінде емес, ойлану әдісі түсініктер қалыптастыру жабдығы ретінде қарастыруға мүмкіндік береді, бұл сөзбен сипаттаудан үрдісті қандай да *ММ* түрінде қалыптастыруда маңызды болып табылады. Математикалық сұлбаны қолданған кезде, зерттеу жүйенің бірінші кезекте қызықтыратын мәселесі – зерттеудің нақты сұрағына жауап алу (шешім) мүмкіндігі емес, зерттелетін жүйедегі нақты үрдістердің нақты сұлбалары түрінде қалыптасатын түсініктің адекваттылығы туралы мәселе.

Мысалы, ұжымдық қолдануға арналған АЕЖ жұмыс үрдісін жаппай қызмет көрсету сұлбалары желісі түрінде көрсету жүйедегі болып жатқан үрдістерді жақсы сипаттауға мүмкіндік береді, бірақ кіріс ағымдарының және қызмет көрсету ағымдарының күрделі заңдарында анық нәтиже алуға мүмкіндік бермейді.

Математикалық сұлбаны мазмұндалған жүйе жұмысының қалыптасқан сипаттамасына (сыртқы орта әсерін ескере отырып) ауысу кезіндегі звено ретінде де анықтауға болады. Яғни, мынандай тізбек орындалады: сипаттаушы модель – >математикалық сұлба –> имитациялық модель.

S әрбір нақты жүйесі модельденетін тізбектің (нақты жүйенің) ахуалын бейнелейтін шамалардың, яғни қасиеттердің жиынымен сипатталады және оның *E* сыртқы ортамен (жүйемен) өзара әрекеттестігіндегі жұмыс жағдайы ерекшеленеді. *S* жүйесінің *ММ* құру кезінде оның толықтығы туралы мәселе шешімін табу керек.

Модельдеу толықтығы негізінен *S* жүйесі – *E* ортасы шекаралар топтарымен реттеледі. Сонымен қатар *ММ* оңайлату тапсырмасы шешілу керек, ол модельдеу жоспарындағы екініші дәрежелі мақсаттарды лақтырып тастап, жүйенің негізгі қасиеттерін бөліп алуға мүмкіндік береді.

Модельдеу объектісінің *ММ*, яғни *S* жүйесін нақты жүйенің жұмыс үрдісін сипаттаушы шамалар жиыны түрінде көрсетуге болады, ол келесі ішкі жүйелерді құрайды:

- *X* жиынтығы – *S*-ке кіріс әсерлері $x_i \in X,\ i=1 \ldots n_x$;
- сыртқы орта әсерлерінің жиынтығы $v_l \in V,\ l=1 \ldots n_v$;
- жүйенің ішкі параметрлерінің (жеке өзінің) жиынтығы $h_k \in H,\ k=1 \ldots n_h$;
- жүйенің шығыс сипаттамаларының жиынтығы $y_j \in Y,\ j=1 \ldots n_y$.

Берілген жиындардан басқарылатын және басқарылмайтын шамаларды бөліп қарауға болады. Жалпы жағдайда *X, V, H, Y* қиылыспайтын жиындар, детерминирленген және сондай-ақ стохастикалық құраушыларды қамтиды.

E кіріс әсері және *S* ішкі параметрлері тәуелсіз (экзогенді) сипаттамалар болып табылады. $\overline{X}(t);\overline{V}(t);\overline{H}(t)$. шығыс сипаттамалары- тәуелді айнымалылар (эндогенді) $\overline{Y}(t)$. *S* жұмыс жасау үрдісі F_S операторымен сипатталады

$$\overline{Y}(t) = F_S(\overline{X},\overline{V},\overline{H},t). \qquad (1)$$

$\overline{Y}(t)$ шығыс траекториясы. F_S - жұмыс істеу заңы. F_S жүйесі, функционал, логикалық шарт, алгоритм, кесте немесе сөзбен сипатталатын ережелер болуы мүмкін.

A_S жұмыс істеу алгоритмі - $\overline{X}(t);\overline{V}(t);\overline{H}(t)$. кіріс әсерлерін ескере отырып $\overline{Y}(t)$ шығыс сипаттамаларын алу әдісі. Таңқаларлығы, бір ғана сол F_S бірнеше тәсілмен жүзеге асырылуы мүмкін, яғни түрлі A_S жиынының көмегімен (1) қатынас *S* модельдеу объектісінің *t* уақыттағы ахуалының математикалық сипаттамасы болып табылады, яғни оның динамикалық қасиеттерін көрсетеді. (1)-бұл іс жүйесінің динамикалық моделі *ММ* статикалық шарттары үшін *Y*-тегі *X, V, H* бейнеленуі қолданылады, яғни

$$\vec{Y} = f(\vec{X},\vec{V},\vec{H}) \qquad (2)$$

(1) және (2) қатынастары теңдеулермен, кестелермен және тағы басқалай берілуі мүмкін. Сондай-ақ бір қатар жағдайларда қатынастар уақыттың нақты сәтіндегі жүйе қасиеттері арқылы (оны күйі деп атайды) алынуы мүмкін.

S жүйесінің күйі векторлармен сипатталады: $\vec{Z}^l(\vec{z}_1^{\,l},\ldots\vec{z}_k^{\,l})$ және $\vec{Z}^{ll}(\vec{z}_1^{\,ll},\ldots\vec{z}_k^{\,ll})$ мұндағы $z_1^l = z_1(t^l)\ldots z_k^l = z_k(t^l)$ бұл $t^l \in (t_0,\ T)$ сәтіндегі күй, ал $z_1^{ll} = z_1(t^{ll})\ldots z_k^{ll} = z_k(t^{ll})$ $t^{ll} \in (t_0,\ T)$ сәтіндегі күй т.с.с. $к=1 \ldots n_Z$.

$Z_1(t),\ Z_2(t) \ldots\ Z_k(t)$ – бұл *К* өлшемді фазалық кеңістіктегі нүкте координаталары. Үрдістің әрбір жүзеге асырылуына қандай да бір фазалық троектория сәйкес болмақ.

$\{\vec{Z}\}$ күйінің барлық мүмкін болатын мәндер жиынтығы $\vec{Z}$ модельдеу объектісінің күйлер кеңістігі деп аталады және $z_k \in Z$.

$t_0 < t \le T^l$ уақыт аралығындағы *S* жүйесінің күйі толықтай $\vec{Z}^0 = (z_1^0,\ldots z_k^0)$ бастапқы шарттармен анықталады, мұндағы $z_1^0 = z_1(t_0)\ldots$ сонымен қатар $\vec{X}(t)$

кіріс, $\vec{H}(t)$ ішкі параметрлермен, $\vec{V}(t)$ сыртқы орта әсерлерімен (екі векторлық теңдеулер көмегімен t^* - t_0 уақыт аралығында орын алатын) анықталады.

$$\vec{Z}(t) = \Phi(\vec{Z}^0, \vec{X}, \vec{V}, \vec{h}, t); \quad (3)$$

$$\vec{Y}(t) = F(\vec{Z}, t). \quad (4)$$

басқаша: $$Y(t) = F(\Phi(\vec{Z}^0, \vec{X}, \vec{V}, \vec{h}, t)) \quad (5)$$

S моделіндегі уақыт (t_0, T) модельдеу интервалында үздіксіз және дискретті ретінде де қарастырыла алады (яғни Δt ұзындық қиығында квантталған). Осылайша, объектіні *ММ* дегеніміз { $\vec{X}, \vec{Z}, \vec{h}$ } айнымалыларының ақырғы жиыны, олардың арасындағы математикалық байланыстан және $\vec{Y}$ сипаттамалары.

Модельдеу детерминирленген деп аталады, егер *F, Ф* операторлары детерминирленген болса, яғни нақты кіріс үшін шығыс детерминирленген. Детерминирленген модельдеу – стохастикалық модельдеудің жеке жағдайы.

Объектілерді модельдеу тәжірибесінде жүйелік талдау саласындағы бастапқы зерттеу кезеңдерде типтік математикалық сұлбаларды қолданған тиімдірек: дифференциал теңдеулер, ақырғы және ықтимал автоматтар, ЖҚКЖ және т.б.

(3) және (4) модельдердегі сияқты мұндай жалпыламаның дәрежесін қамтымайтындарда математикалық сұлбалар қарапайым және көрнекілік сияқты артықшылықтардан ала, бірақ ықшамдап қолдануға болады.

Зерттеу кезінде кездейсоқ факт ескерілмейтін жағдайдағы детерминирленген модельдер ретінде үздіксіз уақытта жұмыс істейтін жүйені көрсету үшін дифференциалдық, интегралдық және т.б. теңдеулер қолданылады, ол дискретті уақытта жұмыс істейтін жүйелерді көрсету үшін ақырға автоматтар және ақырғы айырымды сұлбалар қолданылады. Стохастикалық модельдердің басында (кездейсоқ факторды ескергендегі) дискретті уақытты жүйелерді көрсету үшін ықтимал автоматтар қолданылады. Ол үздіксіз уақытты жүйені көрсету үшін – жаппай қызмет көрсету жүйелері (ЖҚКЖ) қолданылады. Күрделі дербес басқару жүйелерін зерттеуде (оған АЖЖ жатады) агрегативті модельдер үлкен тәжірибелік мәнге ие. Агрегативті модельдер (жүйелер) зерттеу объектілерінің (осы объектілердің жүйелік сипатын көрсете отырып) кең көлемін сипаттауға мүмкіндік береді. Нақ осы агрегативті сипаттауда күрделі объект ішкі жүйелерге (бөліктердің ақырғы санына) жіктеледі; және бұл жағдайда олардың арасындағы байланыс сақталады және бөліктердің өзара әрекеттестігі қамтамасыз етіледі.

Дәріс 5. Үздіксіз детерминирленген модельдер (Д - сұлбалары). Дискретті детерминирленген модельдер (F - сұлбалары)

Дәрістің мақсаты: үздіксіз детерминирленген тәсілдің ерекшеліктерін мысалмен қарастыру, *ММ* ретінде дифференциалдық теңдеуді қолдану.

Үздіксіз детерминирленген модельдер (Д - сұлба).

Үздіксіз детерминирленген тәсілдің ерекшеліктерін мысалмен қарастыралық, ол үшін *ММ* ретінде дифференциалдық теңдеуді қолданамыз. *Дифференциалдық теңдеу* дегеніміз – бір немесе бірнеше айнымалылардың функциялары белгісіз болатын, және теңдеуге олардың функциялары ғана емес, сондай-ақ түрлі ретті туындылары да кіретін теңдеулер.

Егер көп айнымалы функциялары белгісіз болса, онда теңдеу жеке туындылардағы деп аталады. Егер функция белгісіз бір тәуелсіз айнымалы болса, онда қарапайым дифференциалдық теңдеу орын алады.

Детерминирленген жүйе үшін математикалық қатынас жалпы түрде былай көрсетіледі:

$$\vec{y}^{\,l} = \vec{f}(\vec{y},t), \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

Мысалы, маятниктің аз тербелістер үрдісі қарапайым дифференциалдық теңдеумен былай беріледі:

$$m_1 l_1^2 \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} + m_2 g l \Theta(t) = 0,$$

мұндағы, m_1, l_1 маятник аспасының салмағы мен ұзындығы, Θ - маятниктің тепе-теңдік жағдайдан ауытқу бұрышы. Осы теңдеуден кажетті сипаттамаларды бағалауға болады, мысалы тербеліс кезеңі $T = 2\pi\sqrt{l/g}$;

Д – сұлбаның дифференциалдық теңдеуі автоматты реттеу, басқару жүйелері теорисының математикалық аппараты болып табылады.

АБЖ жүйесін жобалау және пайдалану кезінде басқарудың талап етілетін дәлдігін қамтамасыз ететін жүйе параметрлерін таңдау керек.

АБЖ-де жиі қолданылатын дифференциалдық теңдеулер жүйесі объектіні (жүйені) басқаруды инерциялау жолымен (түрі күрделірек және сызықтық еместікті қамтитын) анықталатынын ескеру керек.

$$F(y^n, y^{n-1}, \ldots y, x^m, x^{n-1}, \ldots x_n) = 0:$$

$$\frac{dF}{dy_0^n}\Delta y^n + \frac{dF}{dy_0^{n-1}}\Delta y^{n-1} \ldots \frac{dF}{dy_0}\Delta y + \Delta y = \frac{dF}{dx_0^m}\Delta y^m + \ldots \frac{dF}{dx_0}\Delta x + \Delta x.$$

Дискретті – детерминирленген модельдер.

Дискретті детерминирленген модельдер автоматтар теориясын (АТ) қарастыру көзі болып табылады. АТ – теориялық кибернетиканың бөлімі, дискретті ақпаратты қайта өңдеуге және өзінің ішкі күйін тек мүмкін болатын уақыт сәтінде ғана өзгертетін құрылғыны зерттейді.

Ақырғы автомат көптеген ішкі күйлерді және ақырғы жиын болып табылатын кіріс сигналдарының жиынын қамтиды. Автомат *F* сұлбамен беріледі:

$$F = \langle z, x, y, \varphi, \psi, z_0 \rangle, \qquad (1)$$

мұндағы X,Y,Z –кіріс, шығыс сигналдарының ақырғы жиыны (әліпбидің) және ішкі күйлердің (әліпбидің) ақырғы жиыны болмақ. $z_0 \in Z$ – бастапқы күй: $\varphi(z,x)$ – көшу функциялары; $\psi(z,x)$ – шығыс функциясы. Автомат дискретті автоматты уақытта жұмыс істейді, оның уақыт сәті тактылар болып табылады, яғни бір-біріне тең уақыт аралығында қабысқан, оның әрқайсысына кіріс, шығыс сигналдарының және ішкі күйдің тұрақты мәндері сәйкес болмақ. Абстрактылы автоматтың бір кіріс және бір шығыс арнасы бар. t уаықт сәтінде $z(t)$ күйінде тұрған автомат $x(t)$ сигналын қабылдап, $z(t+1)=\varphi[z(t),z(t)]$, $z(t)\in Z$; $y(t)\in Y$; $x(t)\in X$ күйіне көше отырып $y(t)=\psi[z(t),x(t)]$ сигналын беруге қабілетті.

Абстрактылы ақырғы автомат *(АА)* z_0 бастапқы күйінде $x(0), x(1), x(2)$ … сигналдарын қабылдай отырып, $y(0), y(1), y(2)$… (кіріс сөздері) сигналдарын береді.

1-ші ретті (мили) F-автоматы бар, ол мына сұлба бойынша жұмыс істейді:,

$$z(t+1)= \varphi[z(t),z(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (1)$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (2)$$

2-ретті F - автомат:

$$z(t+1)= \varphi[z(t),z(t)],\ t=0,1,2\ldots \quad (3)$$

$$y(t)=\psi[z(t),x(t-1)],\ t=1,2,3\ldots \quad (4)$$

2-ретті автомат $y(t)=\psi[z(t)],\ t=0,1,2,\ldots$ (5)

яғни шығыстар функциясы $x(t)$ кіріс айнымалыларынан тәуелсіз, бұл Мур автоматы деп аталады.

Осылайша F-автоматын беретін 1-5 теңдеулер мына теңдеудің жеке жағдайы боп табылады:

$$\vec{z}(t) = \Phi(\vec{Z}_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t),$$

мұндағы z-күй векторы;

x-тәуелсіз кіріс айнымалылардың векторы;

v-сыртқы орта әсерлерінің векторы;

h-жүйенің өзінің ішкі параметрлерінің векторы;

z_0-бастапқы күй векторы;

t-уақыт; және теңдеу:

$$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t)$$

жүйе S-денормаланған жағдайда оның кірісіне X дискретті сигнал келіп түседі.

Күйлер саны бойынша ақырғы автоматтар жадылы және жадысыз болып бөлінеді. Жадылы автомат бірнеше күйі, ал жадысыз автоматтың (комбинациялық немесе логикалық сұлбалар) тек бір күйі болады. Сондай-ақ (2) теңдеуге сәйкес комбинациялық сұлбаның жұмысы былай түсіндіріледі, ол әрбір $x(t)$ –кіріс сигналына белгілі бір $y(t)$ – шығыс сигналын сәйкестендіреді, яғни мына түрдегі логикалық функция жүзеге асырылады: $y(t)=\psi[x(t)]$, $t=0,1,2,\ldots$ егер x және y әліпбилеріне x және y сигналдарының мәндері кіретін

болса (екі әріптен тұрса) онда бұл Бульдік функция деп аталады. Уақытты есептеу сипаты (дискретті) бойынша F-автоматтар синхронды және асинхронды болып бөлінеді. Синхронды автоматтарда автоматтың сигналдарын «оқитын» уақыт сәті мәжбүрлі синхрондаушы сигналдармен анықталады. Кіріс сигналының әрбір мәнін автоматтың реакциясы (әсері) синхрондаудың бір тактысында аяқталады. Асинхронды F-автомат кіріс сигналын үздіксіз оқиды, сондықтан да X шаманың жеткілікті дәрежедегі ұзақ кіріс сигналына әсер бере отырып, 1-5 теңдеулерга сәйкес, ол күйін бірнеше рет өзгерте алады (тұрақты күйге ауысқанға дейін кіріс сигналдарының сәйкес санын бере отырып).

F-автоматын беру үшін $F=<z,x,y,\varphi,\psi,z_0>$ жиынының барлық элементтерін сипаттау керек, яғни кіріс, ішкі және шығыс әліпбилері, сондай-ақ көшулер мен шығыстар функциялары.

F-автоматтарының жұмысын беру үшін кестелік, графикалық және матрицалық тәсілдер жиі қолданылады. Кестелік беру тәсілінде көшулер және шығыстар кестесі қолданылады, ондағы қатарлар – автоматтың кіріс сигналына ал бағандар – оның күйлеріне сәйкес болмақ. Сондай-ақ әдетте сол жақтағы бір баган z_0 бастапқы күйіне сәйкес болады. Көшу кестесінің i-ші қатары мен j-ші бағанының қиылысында $\varphi(z_k,x_i)$ көшулер функциясының сәйкес мәні, ал шығыстарының кестесінде - $\psi(z_k, x_i)$ шығыстар фүнкциясы орналасады. *F-автоматы Мур* үшін екі кестені біріктіруге (белгіленген көшулер кестесін алу арқылы) болады, онда автоматтың z_k әр күйінің үстінде (кесте бағанын белгілеуші) осы күйге сәйкес (5 теңдеуге сәйкес) $\psi(z_i)$ шығыс сигналы тұрады.

φ көшулер және ψ шығыстар кестесімен берілген *F-автоматы Мили* жұмысын сипаттау (5.1) кестесімен көрсетіледі, ал *F-автоматы Мур* (5.2) көшу кестесімен берілген.

5.1 кесте

x_j	z_k			
	z_0	z_1	…	z_k
Көшуі				
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_k,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_k,x_2)$
……				
x_l	…	…	…	…
Шығысы				
x_1	$\psi(z_0,x_1)$	$\psi(z_1,x_1)$	…	$\psi(z_k,x_1)$
……				
x_l	$\psi(z_0,x_l)$	$\psi(z_1,x_l)$	…	$\psi(z_k,x_l)$

5.2 кесте

x_i	$\psi(z_k)$			
	$\psi(z_0)$	$\psi(z_1)$	…	$\psi(z_k)$
	z_0	z_1	…	z_k
x_1	$\varphi(z_0,x_1)$	$\varphi(z_1,x_1)$	…	$\varphi(z_k,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0,x_2)$	$\varphi(z_1,x_2)$	…	$\varphi(z_k,x_2)$
……				
x_l	$\varphi(z_0,x_l)$	$\varphi(z_1,x_l)$	…	$\varphi(z_k,x_l)$

Екі кіріс және екі шығыс сигналдары бар, үш күйлі F1 *F- автоматын Мили* кестелік беру тәсілі 5.3 кестеде, ал F2 *F- автоматы Мур* үшін 5.4 кестеде көрсетілген.

5.3 кесте

x_j	z_0		
	z_0	z_1	z_2
Көшуі			
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
Шығысы			
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

5.4 кесте

x_i	y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

Дәріс 6. Үздіксіз стохастикалық модельдер (Q-сұлбалары)

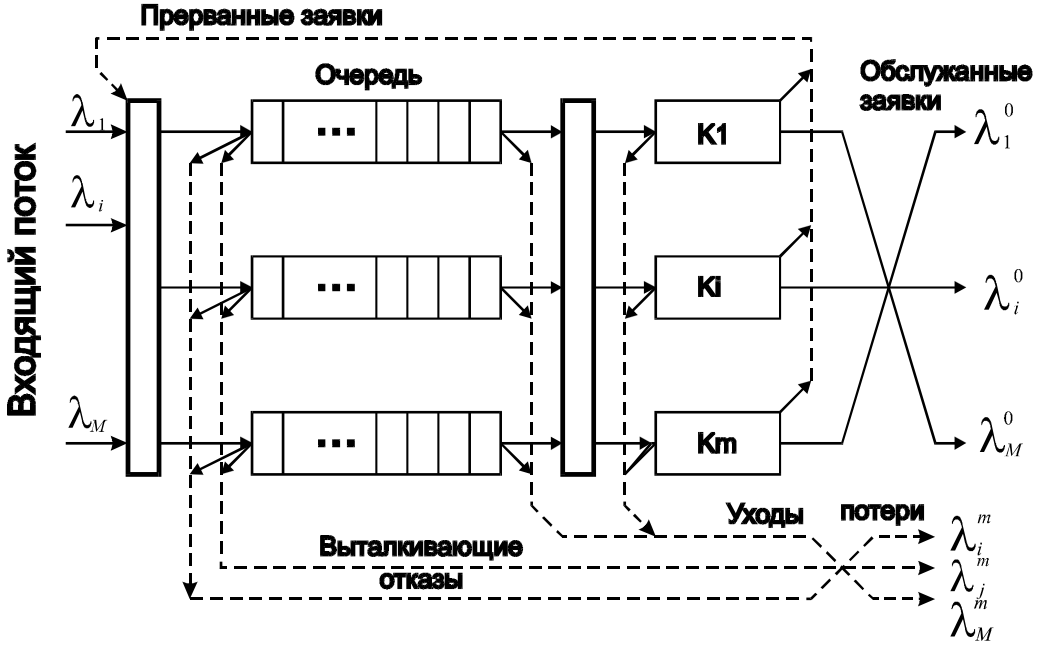
Дәрістің мақсаты: жаппай қызмет көрсету теориясының (ЖҚКТ) әдістері. Біртекті және біртекті емес жағдайлар ағындарын айыра білу.

Үздіксіз-стохастикалық модельдерге *Q*-сұлбалар деп аталатын, жаппай қызмет көрсету жүйесі (ЖҚКЖ) (ағылшынша -queuing sistem) жатады

Жаппай қызмет көрсету теориясының (ЖҚКТ) әдістері.

ЖҚКТ көзі-жаппай қызмет көрсету(жққж) және жаппай қызмет көрсету желісі. ЖҚКЖ дегеніміз жүйе ресурстары шектеулі болған жағдайдағы, тапсырыстардың кездейсоқ ағынына тиімді қызмет көрсетуге арналған динамикалық жүйе.

ЖҚКЖ жалпы құрылымы 6.1суретте көрсетілген.



6.1 сурет - ЖҚКЖ сұлбасы

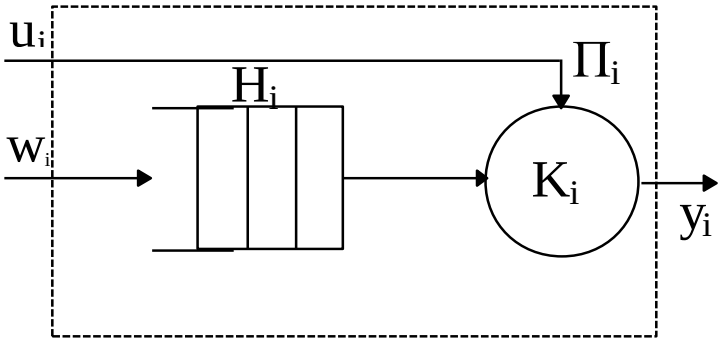
ЖҚКЖ кірісіне келіп түсетін біртекті тапсырыстар туындау себептеріне байланысты типтерге бөлінеді (*i*-типті тапсырыстар ағынының интенсивтілігі) *(i=1..m)* λ_i арқылы белгіленген. Барлық типтер тапсырыстарының жиынтығы - ЖҚКЖ кіріс ағыны. Тапсырыстарға қызмет көрсету *m* арналармен орындалады. Қызмет көрсету арналарының 2 түрі бар: *әмбебап* және *мамандандырылған*. *j* типті әмбебап арна үшін еркін типті тапсырыстарға қызмет көрсету ұзындығын $F_{ji}(\tau)$ үлестіру жүйесі танымал болып табылады. Мамандандырылған арналар үшін кейбір типті тапсырыстар арналарына қызмет көрсету ұзақтығын үлестіру жүйесі анықталмаған (осы тапсырмалардың сол арнадағы орны) болып табылады.

Қызмет көрсету үрдісі ретінде өзінің физикалық табиғаты бойынша ерекшеліктері бар экономикалық өндірістік, техникалық және басқа да жүйелердің жұмыс істеу үрдістері берілуі мүмкін, мысалы: кейбір кәсіпорындарға өнімдер жеткізу ағындары, цехтың жинақтау конвейеріндегі бөлшектер және жинақтауыш бұйымдар ағыны, қашықтағы терминалдардан ЭЕМ-ден ақпаратты өңдеуге тапсырыстар және т.с.с. Мұндай обьектілер жұмысына тән нәрсе-қызмет көрсетуге келіп түсетін тапсырыстардың (талартардың) кездейсоқтығы және қызмет көрсету уақытының аяқталуының кездейсоқтығы болады.

Q - сұлбаны аналитикалық және имитациялық модельдермен зерттеуге болады. Соңғысы екі үлкен әмбебаптықты қамтамассыз етеді.

Жаппай қызмет көрсету түсінігін қарастыралық.

Қызмет көрсетудің кез келген қарапайым актісінде екі құраушыны атауға болады. Тапсырысқа қызмет көрсетуді күту және тапсырысқа қызмет көрсету. Мұны $П_i$ қызмет көрсетудің қандай да бір *i*-ші аспабы түрінде көрсетуге болады, ол тапсырыстар жинақтауышынан тұрады, жинақтауышта бір мезетте $l_i=0...L_i^H$ тапсырыс бола алады, мұндағы L_i^H *i*-ші жинақтағыштың және $к_i$ тапсырыстарға қызмет көрсету арнасының сыйымдылығы.



6.2 сурет -ЖҚКЖ аспабының сұлбасы

$П_i$ қызмет көрсету аспабыныңәр элементіне оқиғалар ағыны келіп түседі: H_i жинақтағышына w_i тапсырыстар ағыны, k_i арнасына u_i қызмет көрсету ағыны келіп түседі.

Оқиғалар ағыны (ОА) дегеніміз қандай да бір кездейсоқ уақыт сәтінде бірінен соң бірі орын алатын оқиғалар тізбегі. Біртекті және біртекті емес оқиғалар ағыны бар. Біртекті оқиғалар ағыны тек осы оқиғалардың (сол сәтпен шақырылатын) келіп түсу сәтімен сипатталады және $\{t_n\}=\{0\le t_1\le t_2\ldots\le t_n\le\ldots\}$ тізбегімен беріледі, мұндағы t_n оқиғаның келіп түсу сәті, теріс емес нақты сан БТОА сонымен қатар *n*-ші және *n-1*-ші оқиғалар арасындағы $\{\tau_n\}$ уақыт аралығындағы тізбек түрінде берілуі де мүмкін.

Біртекті емес ОА дегеніміз - $\{t_n, f_n\}$, мұндағы t_n- тізбегі, t_n - шақырушы мезеттер; f_n - оқиғалар белгілерінің жиыны. Мысалы, тапсырыстың қандай да бір типімен қызмет көрсетілу мүмкіндігін және т.б. берілуі мүмкін.

БТОА- қарастыралық, бұл үшін $\tau_i\in\{\tau_n\}$ - бір-біріне тәуелсіз кездейсоқ шамалар. Олай болса ОА *шектелген әрекеті* ОА ординарлық деп аталады, егер *t* уақыты сәтінде жанасқан Δt аз уақыт интервалында бірден артық $P_{\ge1}(t, \Delta t)$ оқиғаның келіп түсу ықтималдығы елеусіз аз болса.

Егер Δt кез келген интервалы үшін оқиға $P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) + P_{\ge1}(t, \Delta t)=1$, онда Δt интервалына түсу ықтималдығы $P_1(t, \Delta t)$ бір оқиғаға тең. Толық топты құрайтын (және бірікпеген) оқиғалар ықтималдықтарының қосындысы ретінде оқиғаның ординарлық ағыны үшін $P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) \approx 1$, $P_{\ge1}(t,$

$\Delta t)=\Theta(\Delta t)$, мұндағы $\Theta(\Delta t)$ - аздық реті жоғары шама (Δt мен салыстырғанда), яғни $\Delta t \to 0$ болғанда $lim(\Theta(\Delta t))=0$.

Стационарлық ОА дегеніміз - τ уақыт интервалында оқиғаның қандай да бір санының пайда болу ықтималдығы осы участоктың ұзындыгына тәуелді және осы участок алынған t уақыт осіне тәуелсіз.

БТОА үшін $0 \cdot P_0(t, \Delta t) + 1 \cdot P_1(t, \Delta t) = P_1(t, \Delta t)$ дұрыс, бұл Δt интервалындағы оқиғалардың орташа саны. Δt уақыт бірлігінде участокқа келіп түсетін оқиғалардың орташа саны мынаны құрайды: $P_1(t, \Delta t)/\Delta t$. $\Delta t \to 0$ болғандағы осы өрнектің шегін қарастырамыз.

$$\lim P_1(t, \Delta t)/\Delta t=\lambda(t) \cdot (1/\text{уақыт бір.}).$$

Егер бұл шек бар болса, онда ол БТОА интенсивтілігі (тығыздығы) деп аталады. Стандартты ОА үшін $\lambda(t)=\lambda=const$ κ_i қызмет көрсетудің қарапайым арнасына байланысты, $w_i \in W$ тапсырыстар ағыны, яғни k_i кірісінде тапсырыстардың пайда болу сәттері арасындағы уақыт интервалдары басқарылмайтын айнымалылардың ішкі жиынын түзеді, ал қызмет корсету ағыны $u_i \in U$, яғни тапсырыстарға қызмет көрсетуді бастау және аяқтау арасындағы уақыт интервалдары басқарылатын айнымалылар ішкі жиынын құрайды.

k_i арасындағы қызмет көрсетілген тапсырыстар және түрлі себептерге байланысты қызмет көрсетілмей, Π_i аспабын тастап шыққан тапсырыстар $y_i \in Y$ шығыс ағынын түзеді.

Π_i қызмет көрсету аспабының жұмыс істеу үрдісін $Z_i(t)$ уақытындағы оның элементтер күйлерінің өзгеру үрдісі ретінде түсінуге болады. Π_i үшін жаңа күйге көшу ондағы тапсырыстар санының озгергендігін білдіреді (k_i рнасында және H_i жинақтағышында).

Осылайша, Π_i үшін күйлер векторы мынадай түрге ие: $\vec{Z}_i = (z_i^H, z_i^K)$, мұндағы z_i^H - жинақтағыш күйі, (z_i^H =0 - жинақтағыш бос, z_i^H =1 - жинақтағышта 1 тапсырма бар..., $z_i^H = L_i^H$ - жинақтағыш толық бос емес); Z_i^k - K_i арнасының арнасының күйі ($Z_i^k=0$ – арна бос, $Z_i^k=1$ арна бос емес). Нақты объектілердің Q сұлбасы Π_i қызмет көрсетудің көптеген қарапайым аспаптар композициясымен құрылады. Егер қызмет көрсетудің K_i түрлі аспаптары параллель жалғанған болса, онда көпарнналық қызмет көрсету (көпарналы) орын алады, ал егер Π_i аспаптары және олардыңолардың параллельді композициялары тізбектей қосылса, онда көпфазалық қызмет көрсету (көпфазалы Q сұлба) орын алмақ.

Осылайша, Q сұлбаны беруберу үшін құрылым элементтерінің өзара байланысын көрсету үшін R түйіндесу операторы керек. Q сұлбадағы байланыстарбағыттаушы сызық түрінде бейнеленеді (тапсырыстар қозғалысының бағытын бейнелейді). Тұйықталмаған және тұйықталған Q сұлбалар бар. Тұйықталмағанында шығыс ағыны қандай да бір элементке қайтадан келіп түсе алмайды, яғни кері байланыс жоқ. Q сұлбаның өзінің параметрлері бар (ішкі), олар:

- L_{Φ} _фазалар саны;
- L_{kj}, $j=1 \ldots L_{\Phi}$ - әр фазадағы арналар саны;
- L_{kj}, $k=1 \ldots L_{\Phi}$ - әр фазадағы жинақтағыштар саны;
- I-ші жинақтағыштың (L_i^H сыйымдылығы).

Мынаны айта кету керек, жаппай қызмет көрсету теориясында жинақтағыш сыйымдылығына байланысты келесі терминология қолданылады:

- жоғалтуды қамтитын жүйе (L_i^H =0, жинақтағыш жоқ);
- күтуді қамтитын жүйе ($L_i^H \rightarrow \infty$);
- H_i-жинақтағыштың шектелген сыйымдылығын қамтитын жүйе (аралас).

Q сұлбаның өзінің жеке параметрлерінің барлық жиынтығын H ішкі жиын ретде белгілейміз.

Q сұлбаны беру үшін оның жұмыс алгоритмін сипаттау керек, ол түрлі бірмәнді емес жағдайларда тапсырыстардың жұмыс тәртібін анықтайтын болады.

Осындай жағдайлардың пайда болу орындарына байланысты алгоритмдер (тәртібі) былайша жіктеледі:

- H_i жинақтағышындағы тапсырыстар күтуі;
- K_i арнасында тапсырыстарға қызмет көрсету. Тапсырыстар ағынының біртексіздігі приоритеттер класын енгізу көмегімен ескеріледі.

Приоритеттер динамикасына байланысты Q – сұлбалар статикалық және динамикалық болып бөлінеді. Статикалық приоритеттер алдын ала тағайындалады және Q – сұлбаның күйіне тәуелді емес, яғни олар нақты модельдеу тапсырмасын шешу көлемінде тиянақты болып табылады.

Динамикалық приоритеттер модельдеу кезінде пайда болады. H_i-жинақтағышынан K_i арнасымен қызмет көрсету үшін тапсырманы таңдау ережесіне байланысты салыстырмалы және абсолютті приоритеттер деген жіктеу туындайды.

Салыстырмалы приоритет мынаны білдіреді, H жинақтағышына келіп түскен приоритеті жоғары тапсырма K_i арнасында қызмет көрсетіліп жатқан тапсырманың аяқталуын күтеді, сонан соң ғана арнаға түседі. Абсолютті приоритеттіде, жинақтағышқа келіп түскен приоритеті жоғарырақ тапсырма K_i арнада орындалып жатқан приоритеті төмен тапсырманың қызмет көрсетілуін тоқтатады да, арнаға өзі орналасып алады. Арнадан ығыстырылып шығарылған тапсырма жүйені тастап шығады, немесе H_i жинақтағышына қайтып келіп, ондағы қандай да бір орынға қайтадан жазылуы мүмкін. H_i және K_i-ді тапсырыстардың тастап шығу ережелерін де білу қажет, H_i үшін - H_i-дегі тапсырыстардың күту уақытының өтіп кеуіне байланысты кезекті тастап кету ережесі немесе аса толу ережесі; K_i үшін – бағыттарды таңдау ережесі немесе кету бағыты. Сонымен қатар, K_i арнасында тапсырыстардың қалуы бойынша ережелерді де беру қажет, яғни арнайы бөгеттеу ережесі. Мұнай бөгеттеулер Q – сұлба күйлеріне байланысты тапсырыстар ағынын реттеуші, басқару байланыстарының Q – сұлбада бар екендігін көрсетеді. Q – сұлбадағы

тапсырыстардың жағдаяттарын көрсететін мүмкін алгоритмдердің жиынын *A* тапсырыс жағдаяты алгоритмдерінің қандай да бір алгоритмі түрінде көрсетуге болады.

Осылайша, кез келген күнделікті ЖҚКЖ жұмыс үрдісінің *Q* – сұлбасы мына жиындар түрінде беріледі: $Q = \langle W, U, H, Z, R, A \rangle$.

Дәріс 7. Жүйелерді имитациялық модельдеу

Дәрістің мақсаты: модельденетін жүйелер сипаттамаларын анықтау әдістері. Модельденетін жүйелердің өлшенетін сипаттамалары.

Имитациялық модельдеу процедурасы.

Имитациялық модельдеу әдісінің анықтамасы. ИМ әдісінің мәні – жүйе жұмысын имитациялау, логикалық-аналитикалық моделін (жүйе мен сыртқы әсерлердің математикалық модельдерін) құруда, яғни сыртқы әрекеттер әсерінен жүйе күйінің уақытша өзгерісін анықтау және шығыс параметрлерінің мәндерін таңдауды үйретуде болып табылады (осы параметрлер бойынша олардың негізгі ықтималдық сипаттамалары анықталады). Бұл анықтама стохастикалық жүйелер үшін тиімді.

Детерминирленген жүйелерді зерттеу кезінде шығыс параметрлерінің мәндерін таңдауды зерттеу қажеттілігі керек болмай қалады.

Басқарудың құрылымдық принципін қамтитын жүйе моделі элементтер модельдерінің жиынтығы мен олардың функционалдық өзара байланыстарын білдіреді.

Элемент моделі (агрегат, қызмет көрсетуші жабдық) – бұл, бірінші кезекте, шығыс әрекеттерге тапсырыстарға қатысты құрылғының жұмыс ережелері (алгоритмдері) мен элемент күйінің өзгеріс ережелерінің жиынтығы.

Элемент нақтылаудың қандай да бір деңгейінде функционалдық құрылғыны бейнелейді. Қарапайым жағдайда құрылғы жұмысқа қабілетті күйде немесе тоқтап тұрған күйде болуы мүмкін. Жұмысқа қабілетті күйде құрылғы бос емес болуы мүмкін, мысалы, тапсырысқа қызмет көрсету операциясын орындау немесе бос болуы мүмкін. Құрылғының жұмыс жағдаяты ережелеріне мыналар жатады: кезектен тапсырыстарды таңдау ережесі; құрылғы бос немесе бос емес (оған тапсырыстар кезекте тұруы мүмкін) кездегі, құрылғы тапсырмасының келіп түсуіне әсері; тапсырысқа қызмет көрсету үрдісінде тоқтап қалудың пайда болуына (отказ) құрылғының әсері (реакциясы) және т.б.

Имитациялық модельдеу (ИМ) – бұл зерттеу әдісі, талданатын динамикалық жүйе имитатормен алмастырылып, онымен зерттелетін жүйеге сараптама жүргізілетін жағдайға негізделген. Иммитатор ролін көбіне ЭЕМ бағдарламасы орындайды. *ИМ* әдісінің негізгі идеясы мынада. *У* кездейсоқ шамасын үлестіру функциясын анықтау қажет болсын. *У* ізделінетін шамасы мына тәуелділік түрінде берілкі мүмкін делік.

$$y=f(\alpha,\beta,....,\omega),$$

мұндағы $\alpha,\beta,....,\omega$ үйлестірудің белгілі функцияларын қамтитын кездейсоқ шамалар.

Осы түрдегі тапсырмаларды шешу үшін келесі алгоритм қолданылады:

1) $\alpha,\beta,....,\omega$ шамаларының әрқайсысы бойынша кездейсоқ сынақ жүргізіледі, әрқайсысының нәтижесінде $\alpha_i,\beta_i,....,\omega_i$ кездейсоқ шамасының қандай да бір нақты мәні анықталады;

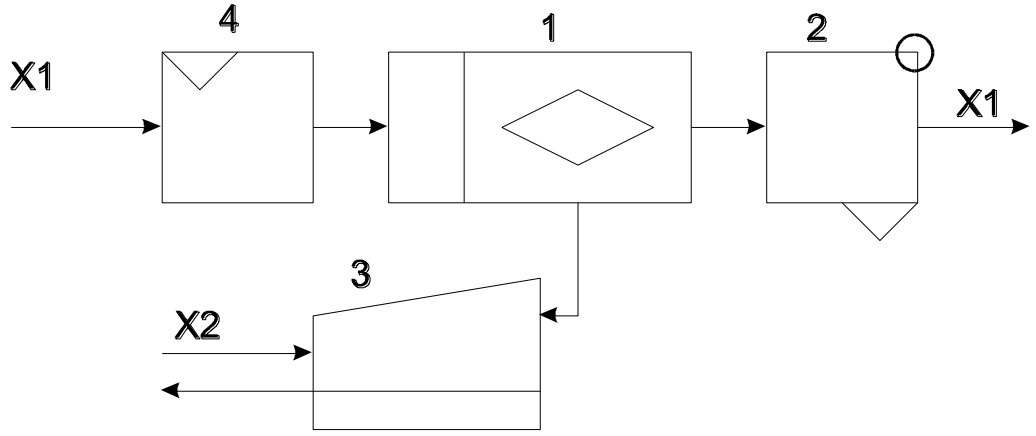
2) табылған шамаларды қолдана отырып, жоғарыда келтірілген тәуелділік бойынша y_i бір жеке мән анықталады;

3) алдыңғы операциялар N рет қайталанады, нәтижесінде у кездейсоқ шамасының мәні анықталады;

4) шаманың N мәнінің негізінде оның эмпирикалық үлестіру функциясы табылады.

Жүйенің жұмысын имитациялау.

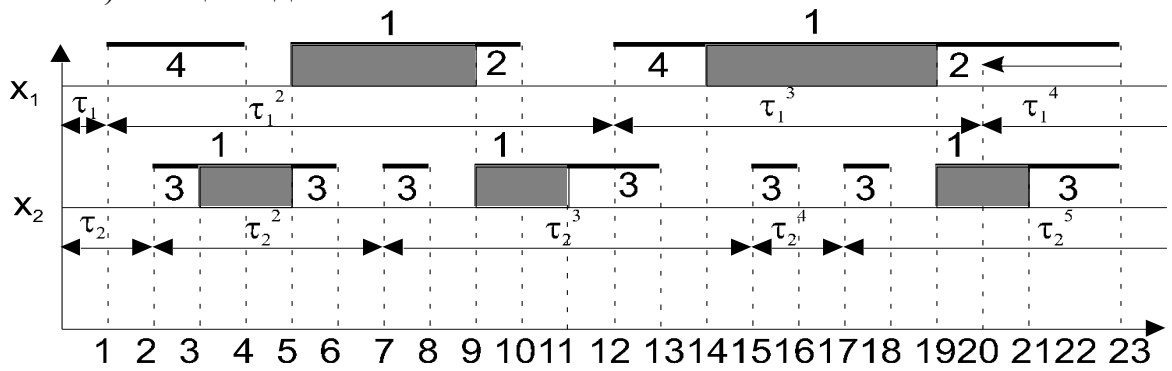
Айталық, негізгі жадылы процессордан 1 тұратын есептеу желісі (ЕЖ), перфокартаны енгізу құрылғысы 4, АЦБҚ 2, дисплей 3 (7.1 суретті қара) зерттеледі делік.



7.1 сурет - Модельденетін жүйенің ықшамдалған сұлбасы

4 құрылғы арқылы *X1* тапсырмалар ағыны келіп түседі. Процессор тапсырманы өңдейді және нәтижені АЦБҚ-ға (2) береді. Осымен бір мезгілде ЕЖ қолданылады, мысалы, ақпараттық-анықтамалық жүйе. Дисплейде жұмыс істеп отырған оператор қолданушы жүйеге *X2* сұранысын жібереді, ол процессорда өңделеді және жауаптары дисплей экранына шығарылады. Процессор 2 бағдарламалық режімде жұмыс істейді: бір бөлімде *X1* тапсырмасы өңделеді, басқасында приоритеті салыстырмалы түрде жоғарырақ *X2* сұранысы өңделеді. Қолданыстағы ЕЖ-ні ықшамдалған нұсқада 4 ЖҚКЖ-дан тұратын стохастикалық желі түрінде елестетелік. Тапсырмалар мен сұраныстар ағындарын тапсырыстар ағыны деп атаймыз. *X1* және *X2* ағындарын тәуелсіз деп есептейміз. τ_1 и τ_2 тапсырыстардың келіп түсу периодтары және T_{1K} , T_{2K} (арналық құрылғылардағы тапсырыстар) қызмет көрсету ұзақтығы белгілі. Әрбір құрылғының жүктеу уақытын және ағындарының әрқайсысы бойынша әсер беру уақытын табу керек болсын.

Басында жүйеге *X1* ағынының 1-тапсырысының келіп түсу сәті (тапсырыстардың кезектелу кезенің ф.р-на сәйкес кездейсоқ сынақ нәтижелері бойынша) анықталады.



7.2 сурет - ЕЖ жұмысының уақыттық диаграммасы

7.2 суретте бұл уақыт сәті $t_1=0+\tau_1^1$ (осы жерде және алдағы уақытта жоғарғы индекс сол ағындағы тапсырыстың реттік нөмірін белгілейді). Осы жағдай *X2* ағыны үшін де жасалады. 7.2-суреттегі *X2* ағынының 1-тапсырысының келіп түсу сәті $t_2=0+\tau_2^1$ сонан соң минимальды уақыт, яғни ертерек болған оқиға табылады. Мысалда бұл уақыт - t_1. *X1* ағынының 1-тапсырысы үшін перфокартаны енгізу құрылғысындағы қызмет көрсету уақыт T^1_{14} (кездейсоқ сынақ арқылы) анықталады және қызмет көрсетуді аяқтау сәті белгіленеді: $t_4=t_1+T^1_{14}$.

Суретте 4-құрылғының «бос емес» күйіне ауысуы көрсетілген. Бір мезгілде *X1* ағынының келесі тапсырысының келіп түсу сәті анықталады: $t_{12}=t_1+\tau_1^2$ келесі минимальды уақыт бұл *X2* ағыны тапсырысының келіп түсіу сәті - t_2. Бұл тапсырыс үшін дисплейде T^1_{23} қызмет көрсету уақыты болады және $t_3=t_2+T^1_{23}$ қызмет көрсетуді аяқтау уақыты қадағаланады. *X2* ағынының екінші тапсырысының келіп түсу сәті анықталады: $t_7=t_2+\tau_2^2$. Қайтадан минимальды уақыт таңдалады – бұл t_3. Бұл сәтте *X2* ағынының тапсырысы процессорда өңделе бастайды. Кездейсоқ сынақ нәтижесі бойынша оның қызмет көрсету уақыты - T^1_{21} анықталады және қызмет көрсетуді аяқтау сәті $t_5=t_3+T^1_{21}$ белгіленеді.

Келесі минимальды уақыт t_4 – 4-құрылғыда *X1* ағыны тапсырысына қызмет көретуді аяқтау сәті. Осы сәттен бастап тапсырыс процессормен өңделуді бастай алады, бірақ ол бос емес, себебі ол *X2* ағынына қызмет көрсетуде. Онда *X1* ағынының тапсырысы күту күйіне көшеді, кезекке тұрады. t_5 келесі уақыт сәтінде процессор босайды. Осы сәттен бастап процессор *X1* ағынының тапсырысын өңдеуді бастайды, ал *X2* ағыны дисплейге ауысады, яғни қолданушының сұранысына жауап негізгі жадыдан дисплейдің буферлік жинақтағышына беріледі. Әрі қарай сәйкесінше T^1_{11} және T^1_{23} қызмет көрсету уақыттары анықталады да, $t_9=t_5+T^1_{11}$ және $t_6=t_5+T^1_{23}$ уақыт сәттері белгіленеді. t_6 сәтінде *X2* ағынының бірінші тапсырысын өңдеу толығымен аяқталады. t_6 және t_2 уақыттарының айырымы бойынша осы

тапсырыс бойынша әсер уақыты есептеледі: $u^1_2 = t_6 - t_2$. Келесі минимальды уақыт t_7-бұл *X2* ағынының 2 тапсырысының келуі. Осы ағынның кезекті тапсырысының келіп түсу уақыты анықталады: $t_{15} = t_7 + \tau_2^3$. Сонан соң дисплейде 2-тапсырысқа қызмет көрсету уақыты есептеледі - T^2_{23} және $t_8 = t_7 + T^2_{23}$ сәті белгіленеді, осыдан кейін процессор бос емес болғандықтан, тапсырыс кезекке қойылады. Бұл тапсырыс t_9 сәтінде процессор босағаннан кейін процессорға қызмет көрсетілуге түсетін болады. Бұл сәтте *X1* ағынының тапсырысына АҚБҚ-да қызмет көрсетіле бастайды. Кездейсоқ сынақ нәтижелері бойынша T^2_{21} және T^1_{12} қызмет көрсету уақыттары анықталады және $t_{11} = t_9 + T^2_{23}$ мен $t_{10} = t_9 + T^1_{12}$ қызмет көрсетуді аяқтау сәттері белгіленеді. t_{10} уақыт сәтінде *X1* ағынынының 1-ші тапсырысына толық қызмет көрсету аяқталады. Осы сәт пен t_1 уақыт сәтінің айырымы *X1* ағыны бойынша әсер уақытының 1-ші мәнін береді: $u^1_1 = t_{10} - t_1$.

Көрсетілген процедуралар модельдеу уақыты аяқталғанға дейін орындалады. Нәтижесінде 1-ші және 2-ші ағындар бойынша әсер уақыттарының (u_1) және (u_2) кездейсоқ мәндерінің қандай да бір саны (таңдау) алынады. Осы мәндер бойынша үлестірудің эмпирикалық функциялары анықталып, әсер уақытының сандық ықтимал сипаттамалары есептелуі мүмкін. Модельдеу үрдісінде әр құрылғының барлық ағынға қызмет көрсету уақыттарының ұзақтығын қосып шығаруға болады. Мысалы, 7.2 суретте процессордың (1) бос еместігі штрихталған сатылармен белгіленген. Егер қосындылау нәтижесін модельдеу уақытына бөлсек, онда құрылғының жүктеу коэффициенттері шығады. Тапсырыстардың кезектегі күту уақытын (жүйеде қызмет көрсетілген), әр құрылғыға тапсырыстар кезегінің орташа және максимальды ұзындығын, жадының қажет көлемін және т.б. анықтауға болады. Имитация ЕЖ-ң сенімді сипаттамаларын ескеруге мүмкіндік береді. Соның ішінде тоқтауға (отказ) берілетін уақыт және жүйеге кіретін барлық құрылғыларды қалыпқа келтіру уақыты белгілі болса, модельдеу және қалыпқа келтіру кезеңдегі құрылғылардың тоқтап қалуының туындау сәттері аяқталады. Егер құрылғы тоқтаса, онда мынадай шешімдер қабылдануы мүмкін:

- тапсырысты процесстен қайтарымсыз шығарып тастау;
- тапсырысты кезекке қойып, қалыпқа келтірілгеннен кейін оған қызмет көрсетуді жалғастыру;
- қайта қызмет көрсетілу үшін, кезекке келіп түсу.
-

Модельденетін жүйелер сипаттамаларын анықтау әдістері.

Модельденетін жүйелердің өлшенетін сипаттамалары. Имитациялық модельдеу кезінде зерттеушіні қызықтыратын кез келген сипаттамалар мәндерін өлшеуге болады. Әдетте есептеу нәтижелері бойынша барлық жүйенің, әр ағын мен құрылғының сипаттамалары анықталады. Барлық жүйе үшін жүйеге келіп түсетін тапсырыстарды санау толық қызмет көрсетілген, қызмет көрсетілмей жүйені тастап шыққан (себептеріне байланысты) тапсырыстарды санау жүзеге асырылады. Осы шамалардың қатынасы белгілі

бір жұмыс жүктемесіндегі жүйе сенімділігін сипаттайды. Тапсырыстардың әрбір ағыны бойынша әсер (реакция) және күту уақыты, қызмет көрсетілген және жоғалған тапсырыстар саны есептелуі мүмкін. Әр құрылғы бойынша бір тапсырмаға қызмет көрсету негізіндегі жүктеу уақыты, құрылғыда қызмет көрсетілген тапсырыстар саны, тоқтау нәижесінде құрылғының бос тұрып қалу уақыты, тоқтаулар саны (модельдеу үрдісінде туындайтын), кезектер ұзындығы, жадының жүктелген сыйымдылығы анықталады. Статистикалық модельдеудегі сипаттамалардың көп бөлігі – бұл кездейсоқ шамалар. Осындай у әрбір сипаттама бойынша *N* мән анықталады, осы мән бойынша салыстырмалы жиіліктер гистограммасы құрылады, математикалық күту, дисперсия және жоғары ретті басқа да сәттер есептеледі, орташа уақыт пен максимальды мән анықталады. Құрылғының жүктеу коэффициенттері мына теңдеумен есептеледі:

$$\rho_k = V_k \cdot N_{ok} / T_m, \qquad (1)$$

V_k – *К*-шы құрылғының бір тапсырысқа қызмет көрсетуінің орташа уақыты.

N_{ok} - T_m модельдеу уақытында құрылғыда қызмет көрсетілген тапсырыстар саны.

Имитациялық модельдеу кезінде стохатикалық шектеулерді қанағаттандыру шартын анықтау мүмкін болатын шектен шығып кеткен және шықпаған өлшемдер санын қарапайым есептеу арқылы жүргізеді.

Шығыс сипаттамаларының математикалық күтуі мен дисперсиясын есептеу.

Жүйе жұмысының стационарлық эргодикалық үрдісі жағдайында *у*-тің *М(у)* және *Д(у)* шығыс сипаттамаларын есептеу уақыт бойынша емес, жеткілікті ұзындықта жүзеге асырылуы бойынша өлшенген $N_{мән}$ жиыны бойынша жүргізіледі. ЭЕМ ЖЖҚ үнемдеу мақсатында *М(у)* және *Д(у)* рекуренттi теңдеулер бойынша есептеледі:

$$m_n = m_{n-1} \cdot (n-1)/n + y/n, \qquad (2)$$

мұндағы m_{n-1} - алдыңғы қадамда есептелген математикалық күту.

$$d_n = d_{n-1} \cdot (n-2)/(n-1) + 1/n \cdot (y_n - m_{n-1})^2, \qquad (3)$$

мұндағы d_{n-1} – алдыңғы қадамда есептелген дисперсия.

Өлшеулер саны көп болған жағдайда бұл бағалар қисынды және тұрақты болып табылады.

Шығыс сипаттамаларының уақыт бойынша орташа мәнін есептеу.

Мысалы, әр құрылғыға кезектің орташа ұзындығы мына теңдеумен есептеледі:

$$l_N = \sum_{i=1}^{N} l_i \tau_i \Big/ T_m . \qquad (4)$$

Мұндағы *i*-кезек күйінің кезекті өзгеріс нөмірі (тапсырысты кезекке қою кезектен алып тастау күйлері); *N*-кезек күйі өзгерістерінің саны; τ_i - кезектің соңғы екі өзгерісі арасындағы уақыт интервалы.

Жинақтағыш сыйымдылығы:

$$q_n = \sum_{i=1}^{N} q_i \tau_i \Big/ T_m \quad . \qquad (5)$$

Мұндағы q_i-тапсырысты енгізу/шығаруға арналған жинақтағышқа соңғы құрылған екі қатынастың арасындағы интервалда бос емес, жинақтағыш сыйымдылығы.

Дәріс 8. Кездейсоқ әсерлерді модельдеу

Дәрістің мақсаты: кездейсоқ оқиғаларды модельдеу ерекшеліктерін қарастыру. Кездейсоқ шамаларды түрлендіру.

ЭЕМ-де жүйелерді имитациялық модельдеу тәжірибесіндегі маңызды тапсырма – кездейсоқ шамаларды есептеу. Бағдарламалау тілдерінде {0,1} интервалында тең үлестірілген кездейсоқ шамалар датчигі болады. $\{X_i\}$ кездейсоқ шамалар тізбегін түрлі кездейсоқ оқиғаларды үлестіру және модельдеу заңдылығы қамтылған $\{Y_i\}$ тізбегіне түрлендіру сұрағына тоқталамыз.

Кездейсоқ оқиғаларды модельдеу ерекшеліктерін қарастыралық.

x_i кездейсоқ саны болсын, яғни {0,1} интервалында тең үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері. Берілген *P* ықтималдықпен келіп түсетін *A* кездейсоқ оқиғасын жүзеге асыру керек. *A*-ны оқиға ретінде анықтаймыз, ондағы x_i таңдалған мәні мына теңсіздікті қанағаттандырады:

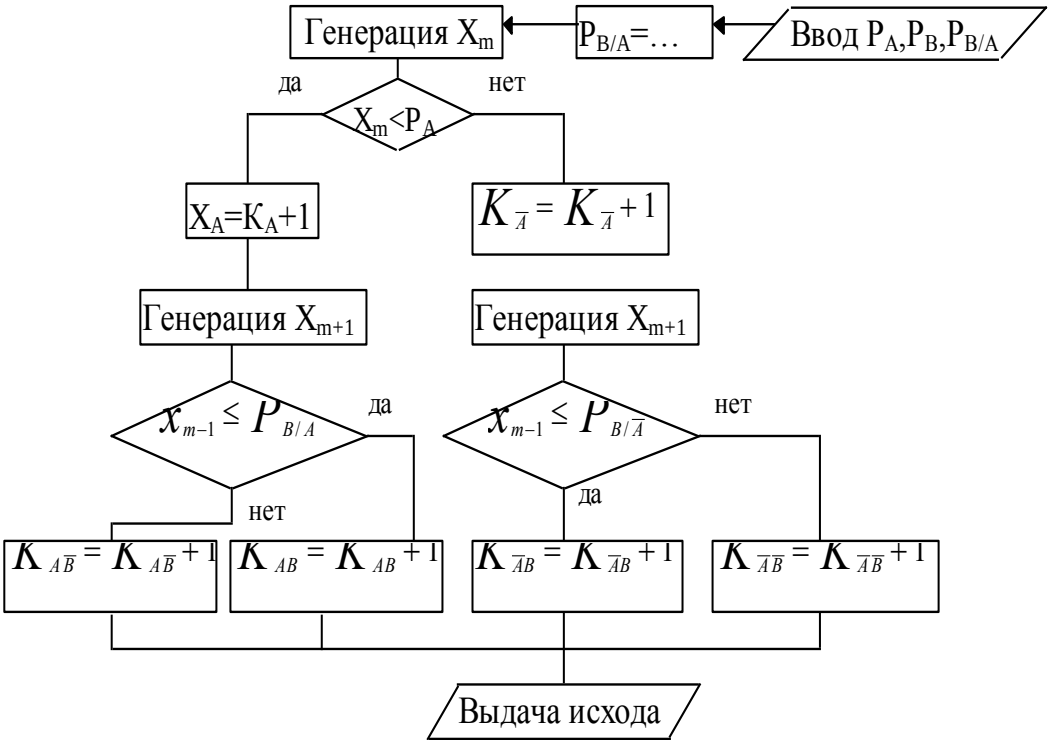
$$x_i \le P. \qquad (1)$$

Онда *A* оқиғасының ықтималдығы: $P(A) = \int_0^p dx = p$. *A* оқиғасына қарама-қарсы жағдай $x_i > p$ онда $P(\overline{A}) = 1 - P$. Модельдеу процедурасы бұл жағдайда x_i мәндерін таңдап, оларды *P*-мен салыстырудан тұрады. Сондай-ақ бұл кезде, егер (1) шарты қанағаттандырылса, онда сынақтың нәтижесі *A* оқиғасы болмақ. Осылайша оқиғалар тобын қарастыруға болады. $A_1, A_2 \ldots A_n$ – оқиғалардың толық тобы болсын, сәйкесінше $P_1, P_2, \ldots P_n$ ықтималдықтармен келіп түседі. A_m-ді оқиға ретінде анықтаймыз, ξ кездейсоқ шамасының x_i таңдалған мәні төменде теңсіздікті қанағаттандырады:

$$l_{m-1} < x_i < l_m, \text{ где } l_k = \sum_{i=1}^{k} p_i. \qquad (2)$$

Онда $P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = P_m$. Бұл жағдайдағы сынақтарды модельдеу процедурасы x_i кездейсоқ сандарын l_k мәнімен тізбекті салыстырумен көрсетіледі. Сынақ нәтижесі A_m оқиғасы болмақ, егер (2) шарты орындалса. Бұл процедураны $P_1, P_2, \ldots P_n$ ықтималдылықтарына сәйкес жеребе бойынша нәтижесінің анықтамасы деп аталады. Жүйені модельдеу кезінде ізделінетін нәтиже екі және одан да көп қарапайымдардан құралған күрделі оқиға болатын сынақтар жүргізу қажеттігі жиі туындайды. Мысалы, *A* және *B* тәуелсіз оқиғаларының келіп түсу ықтималдығы P_A және P_B болсын. Бұл жағдайда біріккен сынақтардың мүмкін болатын нәтижелері P_AP_B, $(1-P_A)P_B$, $P_A(1-P_B)$, $(1-P_A)(1-P_B)$ ықтималдылықты $AA, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{AB}$ оқиғалары болмақ. Біріккен сынақтарды модельдеу үшін (1) шартты тізбектегі тексеру мүмкіндігін қолдануға болады. Ол x_i екі санды талап етеді. *A* және *B* оқиғалары тәуелді және P_A және P_B ықтималдықтармен келіп түсетін жағдайды қарастыралық. *B* оқиғасының шартты ықтималдығын (А оқиғасы болып кетті деген болжаммен) $P(B/A)$ арқылы белгілейміз. $P(B/A)$ берілген деп санаймыз. $\{X_i\}$ кездейсоқ сандар тізбегінен x_m анықталған саны алынады және $x_m<P_A$ теңсіздігінің дұрыстығы тексеріледі. Егер бұл теңсіздік дұрыс болса, онда *A* оқиғасы келіп түсті. *B* оқиғасымен байланысты сынақ үшін $P(B/A)$ ықтималдығы қолданылады. $\{X_i\}$ сандар жиынтығынан кезекті x_{m+1} саны алынады және $x_{m+1} \leq P(B/A)$ шарты тексеріледі. Осы теңсіздіктің орындалуына немесе орындалмауына байланысты, сынақ нәтижесі *AB* немесе $\overline{AB}$ болып табылады. Егер $x_m<P_A$ теңсіздігі орындалмаса, онда $\overline{A}$ оқиғасы пайда болады. Сондықтан *B* оқиғасымен байланысты сынақ үшін мына ықтималдық анықталу керек: $P(B/\overline{A}) = [P(B) - P(A) / P(B/A)] / (1 - P(A))$.

$\{X_i\}$ жиынтығынан x_{m+1} саны таңдалып, $x_m \leq P(B/\overline{A})$ теңсіздігінің дұрыстығы тексеріледі. Осы шарттың орындалу/орындалмауына байланысты $\overline{A}B$ сынағының нәтижесі алынады. Есептеу алгоритмін 8.1-суреттегі сұлба түрінде көрсетуге болады:



8.1 сурет - Кездейсоқ оқиғалар тобын модельдеу сұлбасы

Кездейсоқ шамаларды түрлендіру.

η дискретті кездейсоқ шама P_1, P_2..., P_l ықтималдықты $y_1 \le y_2$ y_3... y_l мәндерін қабылдайды, ықтималдықты дифференциалды үлестіруді құрайды:

y $\quad y_1\, y_2 \ldots\ldots y_j \ldots$

$P(\eta=y)$ $\quad P_1, P_2 \ldots\ldots P_j \ldots$

Бұл кездегі интегралды үлестіру функциясы:

$$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = \sum_{j=1}^{m} P_j; \qquad (3)$$

$y_m \le y_{m+1}$; $m=1,2,...$

$$F_\eta(y)=0,\ y<y_1. \qquad (4)$$

Дискретті кездейсоқ шамаларды алу үшін кері функция әдісін қолдануға болады. Егер ξ-(0.1) интервалында тең үлестірілген болса, η кездейсоқ шамасы мына түрлендіру арқылы алынады

$$\eta=F_\eta^{-1}(\xi), \qquad (5)$$

мұндағы F_η^{-1}-функция F_η -кері функция.

(4) және (5) бойынша есептеу алгоритмі келесі әрекеттердің орындалуына әкеледі:

егер $x_1<P_1$ онда $\eta=y_1$ қарама-қарсы жағдай ,

егер $x_2<P_1+P_2$ онда $\eta=$ е,y_2 қарама-қарсы жағдай (6)

.....

егер $x_j<\sum_{j=1}^{m} P_j$ онда $\eta=y_m$ қарама-қарсы жағдай

.....

(6) теңдеу бойынша санағанда салыстыру циелдарының орташа саны мынаған тең: $\sum_{j=1}^{\infty} j\, P_j$.

1 мысал. (0.1) интервалында тең үлестірілген, $\{x_i\}$ кездейсоқ сандарының базалық тізбегі негізінде кері функция әдісін қолданып, биноминальды үлестіруді қамтитын, $\{y_i\}$ сандар тізбегін алу керек, бұл *N* сынақта сәтті нәтижелер алу ықтималдығын береді: $P(\tau_i=y)=P_N(y)=C_N^y P^y(1-P)^{N-y}$, *где* $P=0.5$ *и* $N=6$; $C_N^y=N!/y!(N-y)!$

Биноминальды үлестірудің математикалық күтуі мен дисперсиясы M[y]=np(1-P) болмақ. (6)-да қабылданған белгілерді қолдана отырып, P_j үшін есептейміз:

j	1	2	3	4	5	6	7
y_j	0	1	2	3	4	5	6
P_j	0.01562	0.09375	0.23438	0.3125	0.23438	0.09375	0.01562
$\sum_{j=1}^{m} P_j \cdots$	0.01562	0.10937	0.34375	0.65625	0.89063	0.98438	1.0000

Мысалы, $X_i=0.89063$ тең үлестірілген санын алып, (6) алгоритм бойынша салыстыра отырып, мынаны табамыз: $0.85393<0.89063$, яғни $y_i=4$. $\bar{\mu}=1\cdot0.01562+2\cdot0.09375+3\cdot0.23438+4\cdot0.31250+5\cdot0.23438+6\cdot(0.09375+0.01562)\approx3.98$.

Үздіксіз кездейсоқ шамаларды есептеу.

η үздіксіз кездейсоқ шама үлестірудің интегралды функциясымен берілген:

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)dy,$$

мұндағы $f_\eta(y)$ - ықтималдықтар тығыздығы. Үлестіру заңы берілген үздіксіз кездейсоқ шамалар алу үшін (дискреттік шамалардағы сияқты) кері функция әдісін қолдануға болады. Өзара бірмәнді монотонды функция:

$\eta=F_\eta^{-1}(\xi)$ (η-ге қатысты, $F_\eta(y)=\xi$ шешілуімен алынған) (0.1) интервалында тең үлестірілген ξ шамасын $f_\eta(y)$ тығыздықты η-шамасына түрлендіреді. Шынында да, егер η кездейсоқ шамасы $f_\eta(y)$ үлестіру тығыздығына ие болса, онда $\xi=\int_0^{\eta} f_\eta(y)dy$ кездейсоқ шамаларды үлестіру тең қалыпты болмақ. Осылайша, $f_\eta(y)$ тығыздық функциясын қамтитын, {y} кездейсоқ сандар тізбегіне жататын сан алу үшін:

$$\int_{-\infty}^{y_i} f_\eta(y)dy=x_j \qquad (7)$$

2 мысал. Үлестірудің көрсеткіштік заңымен y_i кездейсоқ санын алу керек:

$$f_\eta(y)=\lambda e^{-\lambda y},\ y>0.$$

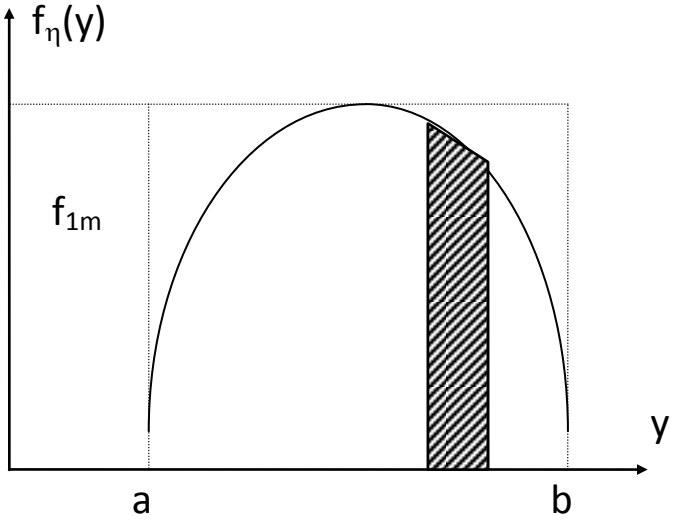
(7) қатынасқа байланысты аламыз: $\lambda\int_0^{y_i} e^{-\lambda y}dy = x_i$, мұндағы x_i – (0.1) интервалына тең үлестірілген кездейсоқ сан, онда $1-e^{\lambda y_i}=x_j, y_j=-\ln(1-x_j)/\lambda.$

Үздіксіз кездейсоқ сандарды модельдеудің әмбебап әдісін қарастыралық. (ерекшелік әдісі). $a\le y\le b$ интервалында $f_\eta(y)$ ықтималдықты үлестіру тығыздығын қамтитын y кездейсоқ шамасын модельдеу кезінде x_m және x_{m+1} тәуелсіз мәндері мына мәндерге түрленеді:

$$y_{1m}=a+(b-a)\cdot x_m, \qquad (8)$$

$$z_{1m+1}=f_{1\eta}(y)\cdot x_{m+1}, \qquad (9)$$

мұндағы $f_{1\eta}(y)=max|\ f_\eta(y)|$ және y_{1m}, z_{1m+1} – (a,b) мен $(0,f_{1m})$ интервалында тең үлестірілген кездейсоқ шамалар мәні. Бұл мәндерді b-a және f_{1m} тікбұрыш ішінде тең үлестірілген, кездейсоқ нүктелердің абсциссасы мен ординатасы ретінде қарастыруға болады (қисықтың ішінде $f_\eta(y)$ –пен үлестірілген, 8.2 суретті қара).



8.2 сурет - Ерекшелік әдісінің көрінісі

Егер $z_{1m+1}\le f_\eta(y_{m1})$, онда y_{1m}, z_{1m+1} жұбы f_η қисығының астындағы кездейсоқ нүктені анықтайды. (10) шартын қанағаттандырушы кездейсоқ нүктенің f_η қисығының астына түсу ықтималдығы бірге тең, ал штрихталған элементар ауданға түсу ықтималдығы $f_\eta(y_{1m})\cdot\Delta y_{1m}$ тең. Бұл мынаны білдіреді, f_η қисығының астына түсетін кездейсоқ нүктелердің y_{1m} абсциссасы - $f_\eta(y)$ ықтималдық тығыздығымен берілген y кездейсоқ шаманың мәні болып табылады. Модельденетін алгоритм фунциялардан тұрады:

1) датчикпен x_{m1} және x_{m+1}-ді алу;
2) (8) және (9) теңдеулерге сәйкес y_{1v} және z_{1m+1}-ді есептеу;
3) $f_\eta(y_{1m})$ – ді есептеу;

4) z_{1m+1} мен $f_\eta(y_{1m})$ –ді салыстыру.

Егер (10) шарты орындалса, онда $y=y_{1m}$; егер орындалмаса, онда y_{1m} және z_{1m+1} орындалмайды (болмайды) және үрдіс 1-бөлімнен бастап қайталанады. Ықтималдық тығыздығы $f(y_1,y_2)$, $a_1 \le y_1 \le b_1$; $a_2 \le y2 \le b_2$ болатын (y_1,y_2) екі кездейсоқ шамаларжүйесін модельдеу кезінде, бір кездейсоқ шаманы модельдеу сияқты, *E* датчигі беретін x_m, x_{m+1}, x_{m+2} үш мәні мына мәндерге түрленеді:

$$y_{1m}=a_1+(b_1-a_1)x_m. \quad (11)$$

$$y_{2m}=a_2+(b_2-a_2)x_{m+1}. \quad (12)$$

$$z_{3m}=f_{\eta m}x_{m+2}, \text{ мұнда } f_{\eta m}=\max[f(x_1,x_2)]. \quad (13)$$

Егер $z_{3m} \le f(y_{1m},y_{2m})$, (14)

онда $y_1=y_{1m}$; $y_2=y_{2m}$.

Бұл жағдайда y_{1m}, y_{2m}, z_{3m} координаталы кездейсоқ нүктелер, жақтары $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$, $f_{\eta m}$ –ге тең параллелепипед шегіне тең үлестірілген және (14) шарты нүктелердің f_η жазығын түскендігін білдіреді. $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ кездейсоқ шамаларды қамтитын *n* жүйесі де осы секілді модельденеді.

Дәріс 9. Модель сапасын бағалау

Дәрістің мақсаты: корреляцияның сызықтық және сызықтық емес коэффициенттері. Екі динамикалық қатар корреляциясының коэффициенті.

Сапалы бағалау құрылған модель бойынша теориялық есептеулердің сараптамалық деректерден қаншалықты ауытқығанын білдіреді. Екі айнымалы арасында байланыстың болуы корреляция деп аталады.

Егер сапаны бағалау зерттеуге дейін қолданылатын болса, онда ол мынадай тапсырманы шешеді: *X* кірісі мен *У* шығысының арасында байланыс бар ма, осыны және осы байланыстың күшін бағалайды.

Корреляцияның сызықтық коэффициенті.

Корреляцияның сызықтық коэффициенті мынаны көрсетеді, *X* және *У* екі қатардың арасында сызықтық тәуелділік бар ма, бар болса күші қандай. Ол мына теңдеу бойынша есептеледі:

$$KR = \frac{m_{xy} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y}.$$

m_x , m_y , m_{xy} - *x, y, xy* –тің математикалық күтуі:

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i m_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

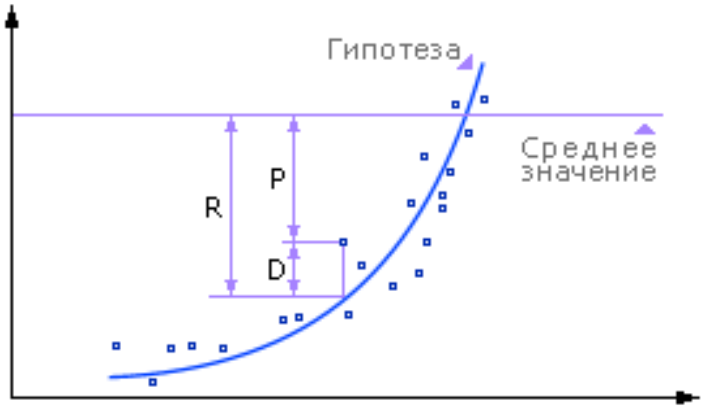
σ_x^2 және σ_y^2 дисперсиясы нүктелердің орташа шамадан қаншалықты алыстығын көрсетеді:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_x)^2}{n} \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m_y)^2}{n}.$$

Корреляцияның сызықтың коэффициенті плюс немесе минус таңбалы болуы мүмкін. Шамасы оң болса *X* және *У* арасыда тура байланыс бар. *KR* к *+1*-ге неғұрлым жақын болса, соғұрлым байланыс тығызырақ. Теріс мән кері байланыстың бар екенін көрсетеді; бұл жағдайда шекара – 1 болып табылады. *KR*-дің 0-ге жақындығы *X* және *У* арасында әлсіз байланыс бар дегенді білдіреді (9.1 суретке қараңыз).

9.1 сурет - Корреляция түрлері

Корреляцияның сызықтық емес коэффициенті.



9.2 сурет - Корреляцияның сызықтық емес коэффициенті

Корреляцияның сызықтық емес коэффициенті келесі теңдеу бойынша есептеледі:

$$\mathrm{KNR} = \sqrt{P - \frac{D}{P}}.$$

P – нақты нүктелер мен орташа шама арасындағы шашыраңқылық

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{P.} - y_i^{C.})^2}{n}.$$

D – гипотетикалық қисық пен нақты нүктелер арасындағы шашыраңқылық

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{Г} - y_i^{С})^2}{n}.$$

R – гипотеза мен орташа шама арасындағы шашыраңқылық

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i^{Г} - y_i^{С})^2}{n}.$$

Екі динамикалық қатар корреляциясының коэффициенті.

X және *У* шамалары z_i және u_i қатарлары түрінде беріледі, тұрақты құраушыны алып тастау үшін: $z_i = x_i - m_x$, $u_i = y_i - m_y$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i^2}}.$$

r –> 1 болғанда тығыз корреляция орын алады. *r –> 0* болғанда, үрдіс өзара ортогональды, корреляция жоқ, үрдістер бір-бірімен байланыспаған.

Динамикалық қатар ішіндегі корреляция.

Бір үрдістің өткені мен қазіргісі арасындағы байланыс күші зерттеледі. Бұл үшін уақыт бойынша жылжыған сигнал өзімен өзін салыстырады және екі динамикалық қатар арасындағы корреляция коэффициенті есептеледі.

Қатар периодтылығын іздеу.

Динамикалық қатарда периодтылық бар ма, оны Фурье тура түрлендіруін орындап және зерттелетін сигнал спектрін қарастырып анықтауға болады.

Z қатары динамикасының X және У екі динамикалық факторлардан тәуелділігі.

R жиындық корреляциясының коэффициенті

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{xy}^2 - 2 r_{xy} \cdot r_{xz} \cdot r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}},$$

$$r_{xz} = \frac{m_{xz} - m_x m_z}{\sigma_x \sigma_z} r_{xy} = \frac{m_{xy} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$r_{yz} = \frac{m_{yz} - m_y m_z}{\sigma_y \sigma_z}.$$

Екі белгі арасындағы байланыс былай анықталады:

$$K = \frac{ad - bc}{ad + bc}.$$

Мұндағы *к* – ассоциация коэффициенті, екі белгінің арасында қандай да бір байланыс бар ма, соны анықтауға мүмкіндік береді. Егер берілген коэффициент бірге жақын болса, онда ондай байланыс бар деуге болады.

Мысал. Берілген теңдеудің көмегімен адамның бойы мен салмағы арасындағы байланыс бар ма, соны анықталық. Бізде 500 адамның салмағы мен бойы туралы деректер бар делік.

9.1 кесте

	Салмақ < 67 кг.	Салмақ > 67 кг.
бойы < 167 см.	a = 304 адам	b = 17 адам
бойы > 167 см.	c = 112 адам	d = 67 адам

Теңдеу бойынша: $K = (304 \cdot 67 - 17 \cdot 112)/(304 \cdot 67 + 17 \cdot 112) = 0.83.$ Бұл шама 1-ге жақын, онда бой мен салмақтың арасында байланыс бар деген сөз.

Дәріс 10. Рунге - Кутта әдісі

Дәрістің мақсаты: Рунге – Кутта әдісін стандартты модельдерді есептеу үшін жиі қолданамыз, себебі есептеу көлемі шағын жағдайда $O^4(h)$ әдісінің дәлдігіне ие екенін қарастыру.

Рунге – Кутта әдісі стандартты модельдерді есептеу үшін жиі қолданылады, себебі есептеу көлемі шағын жағдайда ол $O^4(h)$ әдісінің дәлдігіне ие. Интегралдаудың айырым сұлбасын құруда функцияны жіктеуді қолданамыз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)),\ 0 < x \le T,\ y(0) = y_0 \qquad (1)$$

Тейлор қатарына жіктеу:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Осы жіктеудегі екінші туындыны мына өрнекпен алмастырамыз:

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x}.$$

Мұндағы $\tilde{x} = x_k + \Delta x,\ \tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$ және Δx жазылған өрнектің ең үлкен дәлдігіне қол жеткізу шартынан алынады. Әрі қарай «у-ті стильмен» шамаларын Тейлор қатарына жіктей отырып, алмастырамыз.

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \ldots$$

Бастапқы теңдеу (1) үшін есептеу сұлбасын құрамыз:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2\Delta x} \cdot (f(x_k + \Delta x,\ y_k + y_k'\Delta x) - f(x_k, y_k)).$$

Оны мына түрге түрлендіреміз:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x,\ y_k + y_k'\Delta x)\right] =$$

$$= y_k + h \cdot \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \frac{\Delta x}{h} h,\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h} h)\right].$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x},\ \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x},\ \gamma = \frac{\Delta x}{h},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}.$$

Бұл белгілеулер алдыңғы өрнекті мына түрде жазуға мүмкіндік береді:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[\beta \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \gamma \cdot h,\ y_k + \delta \cdot h)\right].$$

Таң қаларлығы, барлық енгізілген коэффициенттер Δx шамасына тәуелді және бұл жағдайда параметр рөлін ойнайтын α коэффициенті арқылы анықталуы мүмкін:

$$\beta = 1 - \alpha,\ \gamma = \frac{1}{2\alpha},\ \delta = f(x_k, y_k)\frac{2}{\alpha}.$$

Соңында Рунге-Кутта сұлбасы мынандай:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[(1 - \alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha})\right].$$

Сол сұлба, (1) айырымды аналогы формасында:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = (1 - \alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha}\right).$$

$\alpha = 0$ болғандағы Эйлер сұлбасын аламыз:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

$\alpha = 1$ болғанда, интегралдаудың келесі қадамындағы есептеулерді келесі операциялар тізбегі түрінде қарастыруға болады.

1) Эйлер сұлбасы бойынша интегралдаудың жарты қадамын білдіретін өрнек есептеледі, яғни $x_k + h/2$нүктесіндегі ізделетін функцияның жуықталған сәні анықталады:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k).$$

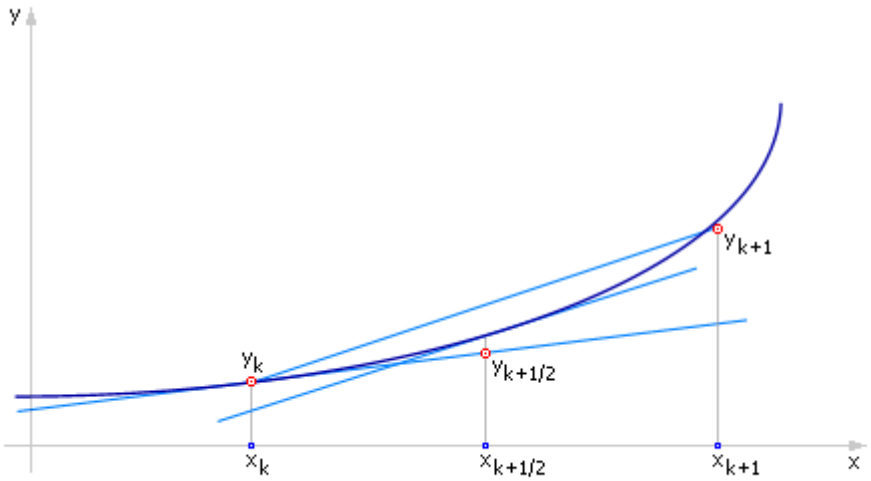
2) Сол аралық нүкте үшін туындының жуықталған мәні табылады:

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_{k+1/2}\right).$$

3) Барлық қадамның соңғы нүктесіндегі функцияның нақтыланған мәні анықталады (Эйлер сұлбасы бойынша туынды мәнімен алдыңғы қадамда есептелген):

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}.$$

Геометриялық көрініс (10.1 суреттен қараңыз) көрсеткендей, осындай тізбекте алынған шешім Эйлер сұлбасымен есептелгенге қарағанда, шындыққа «жақынырақ» жатыр, яғни Рунге – Кутта әдісімен алынған шешімнің дәлдігі жоғарырақ. Бұрынырақ біз бұл сұлбаны «Эйлер модифицирленген әдісі» деп атадық.



10.1 сурет - α = 1 болғандағы Рунге – Кутта әдісімен (қадамдағы) есептеу көрініс

Енді *α = 0.5* кезіндегі сұлбаны қарастыралық (нәтижесінің геометриялық интерпретациясы 10.2 суретте көрсетілген).

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \right].$$

1) Интегралдау қиығының соңында ізделетін функцияның жуықталған мәнін анықтау мақсатында Эйлер әдісінің толық қадамы орындалады:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

2) Осы нүкте үшін туындының жуықталған мәні есептеледі:

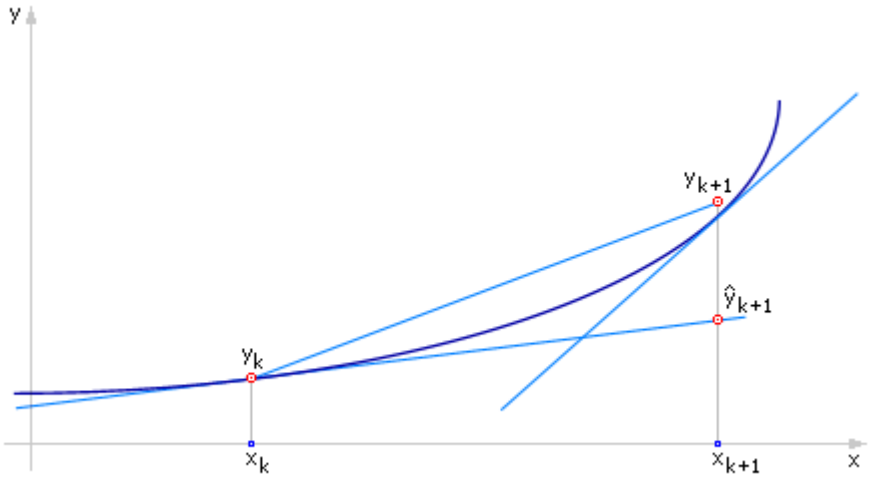
$$y'_{k+1} = f(x_k + h, \hat{y}_{k+1}).$$

3) Қиық шеттерінде анықталған екі туындының орташа мәні табылады:

$$y'_{k+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left[y'_k + y'_{k+1} \right].$$

4) Соңғы нүктеде ізделетін функция мәнін есептеу (Эйлер сұлбасы бойынша барлық қадамға, туындының орташа мәнін қамти отырып):

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}.$$



10.2 сурет - α = 0.5 мәнінде Рунге – Кутта әдісімен (қадамдағы) есептеу көрінісі

Кей жағдайда, алынған өрнекті Эйлер – Коши сұлбасы деп атайды. Көрсетілген тәсілмен алынған нәтиже ақиқат шешімге «жуық» болу керек екендігі (Эйлер сұлбасы бойынша алынған нәтижеге қарағанда) геометриялық түсінікті.

Мысал. $dy/dx = -y$, $y(0) = 1$ теңдеуін Рунге – Кутта әдісімен шешу керек. Дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x, y) = -y$ болғандықтан, $\alpha = 0.5$ болғандағы әдіс сұлбасы келесі түрде көрсетілмек:

$$y'_k = f(x_k, y_k) = -y_k,$$

$$\hat{y}_{k+1} = y_k - h \cdot y_k = y_k \cdot (1 - h),$$

$$y'_{k+1} = f(x_k + h, \hat{y}_{k+1}) = -y_k \cdot (1 - h),$$

$$y'_{k+1/2} = \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2} = -\frac{y'_k}{2} \cdot (2 - h),$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2} = y_k - y_k \cdot \frac{h}{2} \cdot (2 - h) = y_k \frac{(h-1)^2 + 1}{2}.$$

Ізделінетін функцияның мәндер тізбегін құрамыз:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y_0 \frac{(h-1)^2 + 1}{2} = \frac{(h-1)^2 + 1}{2},$$

$$y_2 = y_1 \frac{(h-1)^2 + 1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2 + 1}{2}\right]^2,$$

$$y_3 = y_2 \frac{(h-1)^2 + 1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2 + 1}{2}\right]^3,$$

...

$$y_n = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^n.$$

Интегралдаудың түрлі қадамдарындағы $x = 10$ аргумент мәні үшін алынған сандық шешім нәтижелері 10.1-кестеде берілген. $h = 0.01$. қадамы үшін үш дұрыс мәнді сандар алынды (10.1 кестені қара). Бастапқы шарт $y(0) = 1$, екінші ретті дифференциалдық теңдеуді $y' = -y$ Рунге –Кутта әдісімен сандық шешу y_n нәтижелері:

10.1 кесте

Қадам үлкендігі h	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.0001
Қадам саны n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$y_n \cdot 10^4$	0.827181	0.514756	0.462229	0.454076	0.454000	0.453999

Теңдеу (1) аппроксимациясының қатесін бағалаймыз (Рунге-Кутта әдісінің айырым сұлбасымен).

Дәл шешімді бастапқы дифференциалдық теңдеудің айырымды аналогына қойып, бірікпеушілікті есептейміз:

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - (1-\alpha)\cdot f(x_k, y(x_k)) - \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y(x_k))\right)$$

Функцияны жіктейміз,

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot \frac{h^2}{2} + \ldots$$

$$f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y(x_k))\right) =$$

$$= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + \ldots$$

Алынған нәтижені өрнекке қоямыз:

$$\psi_k = \frac{y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot \frac{h^2}{2} + K - y(x_k)}{h} - (1-\alpha) f(x_k, y(x_k)) -$$

$$- \alpha \cdot \left\{ f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + \ldots \right\} =$$

$$= y'(x_k) + y''(x_k)\cdot\frac{h}{2} - f(x_k, y(x_k)) + \alpha\cdot f(x_k, y(x_k)) - \alpha\cdot f(x_k, y(x_k)) -$$

$$-\frac{h}{2}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + O(h^2) =$$

$$= y'(x_k) - f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2}\cdot\left[y''(x_k) - \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} - \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + O(h^2)$$

Теңдеу (1) ескере отырып, сондай-ақ туынды үшін өрнекті ескеріп,

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = (f(x_k, y(x_k)))' = \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k)).$$

Соңғы нәтижені аламыз, $\psi_k = O(h^2)$, яғни, Рунге-Кутта әдісі, α параметрінің мәніне тәуелсіз, аппроксимацияның екінші тәртібіне ие.

Бір сол ғана тапсырманың шешімдерін салыстыру мынадай тұжырым жасауға мүмкіндік береді, дифференциалдық теңдеу (айырымды аналогты) *аппроксимациясының жоғары дәрежесі*, үлкен қадамдарда дәлірек шешім алуға мүмкіндік береді, яғни *ЭЕМ-нің талап етілетін ресурстарын төмендетуге* мүмкіндік жасайды.

Дәріс 11. Жеке туындылардағы теңдеулер

Дәрістің мақсаты: диффузия теңдеуі бойынша дене бойына қандайда бір субстанцияның (жылу немесе концентрациялар) уақыт өте келе таралуын сипаттау.

Математика мен физикада жеке туындыдағы теңдеулердің үлестірілген параметрлерін қамтитын жүйелерді аналитикалық сипаттау түсінігі танымал. Оған диффузиялар, жылу-масса тасымалдау және т.б. жатады. Олардың компьютердегі имитациялау нұсқаларын қарастыралық.

Үлестірілген параметрлі жүйелер дегеніміз кейбір зерттелетін параметр мәні тек уақыт бойынша ғана емес, сондай-ақ қандай да бір заңдылық бойынша кеңістіктегі де (бір, екі немес көпөлшемді) өзгеріп отыратын жүйе. Мұндай параметрге энергия, зат концентрациясы, өріс кернеулігі және басқа да физикалық шамалар мысал бола алады. Кеңістіктің шексіз аз аумағындағы ғана зерттелетін параметр өзгермейтін болып саналады. Сондықтан үлестірілген параметрлі жүйені кеңістіктегі элементтердің реттелген жиынынан тұратын жүйе ретінде жиі көрсетеді (оның ішіндегі сипатталатын параметр бірдей, ал элементтер әртүрлі). Жүйе элементтері кеңістіктік құрылымды түзеді. Үлестірілген параметрлі жүйелердің жекелеген қасиеттерін сипаттауға арналған типтік теңдеулер бар. Соларды қарастыралық.

Диффузия теңдеуі.

Диффузия теңдеуі дене бойына қандайда бір субстанцияның уақыт өте келе таралуын сипаттайды, мысалы, жылу немесе концентрациялар.

Бір өлшемді жағдайда дене x осінің бойында көрсетіледі. Егер өлшенетін параметр (жалпы жағдайда) y ретінде, параметр өзгерісі қадағаланатын уақыт t ретінде, ал параметр өзгерісі өтетін бойлық ось x деп белгіленсе, онда диффузия теңдеуі мынадай түрге ие:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x,t)$$

және шеттері мен шекараларында y айнымалысының мәндерімен толықтырылады (әдеттегі толықтыру шарттары): сол жақ шетінде $x = 0$, оң жақ шетінде $x = L$, ал шекарасында бастапқы шарт ($t = 0$).

$$y(x, 0) = f_1(x),$$
$$y(0, t) = f_2(t),$$
$$y(L, t) = f_3(t),$$

мұндағы $f_1(x)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ – берілген функциялар. α коэффициенті жылу өткізгіштік коэффициенті мәніне ие; $f(x, t)$ – жылу көзі мен ағу жұмыстарын сипаттаушы функция. Температураның таралуын сипаттаушы y шамасы екі айнымалы функциясы болып табылады – x денесінің және t уақытының ұзақтығы $y(x, t)$. Егер туынды өрнегін олардың дискретті аналогымен алмастырса, онда айырма түріндегі теңдеу мынадай түрге ие:

$$\frac{y(x,t)-y(x,t-\Delta t)}{\Delta t}=\alpha\cdot\frac{y(x+\Delta x,t-\Delta t)-2y(x,t-\Delta t)+y(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x^2}+f(x,t-\Delta t)$$

немесе белгілі шамалар арқылы белгісіздерді өрнектейді

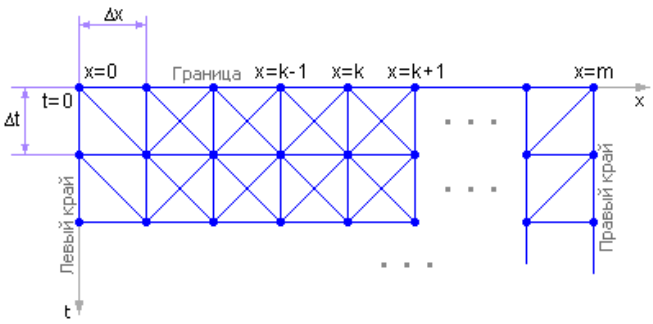
$$y(x,t)=\frac{\Delta t\cdot\alpha}{\Delta x^2}y(x-\Delta x,t-\Delta t)+(1-\frac{2\Delta t\cdot\alpha}{\Delta x^2})\cdot y(x,t-\Delta t)+\frac{\Delta t\cdot\alpha}{\Delta x^2}y(x+\Delta x,t-\Delta t)+\Delta t\cdot f(x,t-\Delta t)$$

немесе

$$y(x,t)=a\cdot y(x-\Delta x,t-\Delta t)+b\cdot y(x,t-\Delta t)+c\cdot y(x+\Delta x,t-\Delta t)+f(x,t-\Delta t)\cdot\Delta t.$$

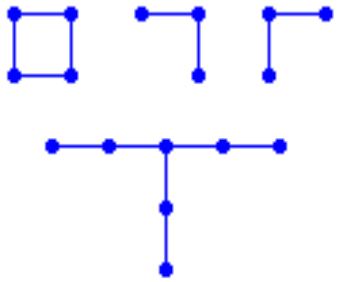
Нәтижесінде цифрлық есептеу машинасында жүзеге асырылған есептеу теңдеуі алынды. Осы теңдеудің арқасында y параметрінің кез келген (x, t) нүктедегі мәнін есептеуге болады. $y(x, t)$ мәнін есептеу түйіні деп атаймыз. Олай болса, есептеу сұлбалық түрде дене бөлігінен және уақыт қиығынан тұратын, өрістегі тор секілді болады (11.1 суретті қараңыз). Бір түйінді есептеу теңдеудің өзі үш түйін күйіне тәуелді (сол жақ $y(x - \Delta x, t - \Delta t)$, оң жақ $y(x + \Delta x, t - \Delta t)$, өзіндік $y(x, t - \Delta t)$) алдыңғы уақыт сәті - $(t - \Delta t)$ және үшбұрышты шаблонды еске түсіреді. Есептеу басталғанға дейін $t = 0$ үшін барлық түйіндер күйлері белгілі. Келесі уақыт сәті үшін барлық түйіндерге теңдеуді біртіндеп қолдана отырып, келесі уақыт қабатының $(t + \Delta t)$ барлық түйіндеріндегі температураны анықтауға болады.

Ең сол жақ және ең оң жақ түйіндерден басқалары – олардың күйлері есептелмейді, бірақ ол шеттік шарттармен беріледі.



11.1 сурет - Үлестірімді параметрлері бар бір өлшемді динамикалық жүйені анық шаблонды қолдана отырып, ақырғы айырымдар әдісімен есептеу сұлбасы

X денесінің бір нүктесінен басқасына, әрі қарай бір уақыт қабатынан басқасына көше отырып, процедураны қайталайтын болса, онда берілген теңдеу бойынша дененің кез келген бөлігінде кез келген уақыт сәтіндегі температура мәнін есептеуге болады. Осылайша, барлық өріс (L x T) есептеледі. Бұл жағдайда белгісіз мәндерді біртіндеп (тізбектей) анықтауға болады, себебі шаблонмен анық өрнек түріне ие – теңдеудегі жалғыз белгісіз бұрынырақ есептелген мән арқылы өрнектелген. Туындылар мәндері үлкен және қадамдар мәні үлкен жағдайда есептеу қате шешім беруі мүмкін. Модельдеу кезінде басқа да айырымдық теңдеулерды қолдануға болады (11.2 суретті қараңыз). Шаблонды таңдаған кезде мынаны назарда ұстау керек: анық шаблон ба, жоқ па, ол қандай дәлдікті қамтамасыз етеді, қадамдардың қандай мәндерінде есептеу тұрақтылығы қамтамасыз етіледі. Сонымен, мысалы, тікбұрыш түріндегі шаблон – анық емес; бір есептеу теңдеуінде екі бірдей белгісіз шама қамтылады. Сондықтан мұндай шаблонды пайдаланған кезде (L · T) өлшемді алгебралық теңдеулер жүйесін шешу қажет.



11.2 сурет - Үлестірілген параметрлі теңдеулерді шешуге арналған типтік шаблондар сұлбасы

Тәжірибеде тұрақтылыққа әрі қарай дәлдікке қол жеткізу түрлі шаблондарды және әртүрлі қадам мәндерін қолданып шешім алумен жүзеге асырылады. Егер *h* қадаммен және *h/2* қадаммен есептелген ізделінетін айнымалы мәндері бірдей индексті түйіндерде 1-5% аралығында ерекшеленетін болса, онда есептелген мән тапсырманың жуықталған шешімін қабылдайды. Әйтпесе қадамды екі есеге азайтып, бағалау процедурасын қайталайды. Егер тапсырма стационарлық болса, яғни үрдістер барлық ауыспалы үрдістер аяқталып үлгеретіндей (уақыт бойынша туынды 0-ге тең) ұзақ жүретін болса, онда диффузия теңдеуі (екі өлшемді кеңістік үшін – *x* және *z* осьтері) тапсырма көзі мен ағуынсыз мына түрге ие болмақ:

$$\partial^2 y/\partial x^2 + \partial^2 y/\partial z^2 = 0.$$

Айырым түрінде теңдеу мына түрге келеді:

$$(Y_{i+1,j} - 2 \cdot Y_{i,j} + Y_{i-1,j})/\Delta x^2 + (Y_{i,j-1} - 2 \cdot Y_{i,j} + Y_{i,j+1})/\Delta z^2 = 0.$$

Егер $\Delta x = \Delta z$ деп қабылданса, онда теңдеу былай көрсетіледі:

$$4 \cdot Y_{i,j} - Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j} - Y_{i,j-1} - Y_{i,j+1} = 0.$$

Теңдеуді есептеу шаблоны анық емес және крест түрін иемденетін түсіну жеңіл (тор түйініндегі температура мәнін есептеу үшін, оның сол жақ, оң жақ, жоғары және төмендегі көршілерінің температураларын білу керек).

Егер үй қабырғасы 2х2 метр өлшемді құраса, ал қадам $\Delta x = \Delta z = 20$ мм болса, онда қабырғаның температуралық режімін есептеу үшін 10000 сызықтық теңдеулер жүйесін ($Y_{i,j}$ белгісіздікті қамтитын) осынша жүйені шешу қажет.

$4 \cdot Y_{i,j} - Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j} - Y_{i,j-1} - Y_{i,j+1} = 0$, для $i = 1 \div 100$ и $j = 1 \div 100$.

Оған 400 дана шеткі шарттарды қосу қажет:

$$Y_{0,j} = f_1(j);$$
$$Y_{101,j} = f_2(j);$$
$$Y_{i,0} = f_3(i);$$
$$Y_{i,101} = f_4(i).$$

Жылусалмақтасымал теңдеуі.

Бірқатар физикалық үрдістерде зат салмағы немесе энергия қиялдағы жүйенің ішінде, оның бір бөлігінен басқа бөліктеріне ауыса отырып жылжиды. Мұндай үрдістер жылусалмақтасымал теңдеуімен сипатталады. Бірөлшемді жағдай үшін бұл теңдеу мынадай түрге ие: $\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = B$, мұндағы $\rho(x, t)$ — зат немесе энергия тығыздығы; $q(x, t)$ — зат немесе энергия ағыны; $B(x, t)$ — заттың көзі мен ағу функциясы. $\rho(x, t)$, $q(x, t)$, $B(x, t)$ — сәйкес айнымалылардың x кеңістігі мен t үлестірілу функциялары.

Ағынды x осін жағалай, бір-бірімен өзара әрекеттесуші элементар ұяшықтарға бөлеміз. Әр ұяшық өз құрамындағы заттың тығыздығымен және q зат ағынымен (оның сол жақ және оң жақ шекаралары арқылы) сипатталады. Ұяшықтарды i индексімен нөмірлейміз. Ұяшықты *элементар көлем* деп атау қабылданған.

Айырымды түрде (туындыны сандық есептеу өрнегін қойғаннан кейін) жылу өткізгіштік теңдеу мына түрге келеді:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (q(x + \Delta x, t) - q(x, t) + b(x, t)).$$

Теңдеу Δt уақытында элементар көлемге $\partial\rho/\partial t$ қанша зат қосылатынын (егер осы участоктың х сол жақ шекарасы арқылы осы уақытта $q(x) \cdot \Delta t$ зат бөлшектері ағып өтсе және егеросы участоктың $(x + \Delta x)$ оң жақ шекарасы арқылы осы уақытта $q \cdot (x + \Delta x) \cdot \Delta t$ зат бөлшектері ағып өтсе және участокта b шамалы зат көзі немесе ағуы бар болса) көрсетеді.

Шешілетін тапсырмаға байланысты теңдеу толықтырылуы мүмкін. Әдетте $b(x, t)$ функциясы берліген. $\rho(x, t)$ уақытында x осі бойынша заттың (қолданушы берген) таралуын қаматамасыз ету үшін, $q(x, t)$ заттың қозғалыс заңын анықтау талап етілсе, онда мұндай есептеу үшін бір теңдеу жеткілікті.

Егер $q(x, t)$ заттың қозғалыс заңы берілсе және осы қозғалыстың нәтижесінде зат $\rho(x, t)$ қайда, қашан және қанша болу керектігін анықтау талап етілсе, мұнда да бір теңдеу жеткілікті. Бірақ бастапқы шарттары берілген жағдайда, бір мезгілде $\rho(x, t)$ және $q(x, t)$ екеуін бірдей анықтау талабы жиі

туындайды, бұл заттың белгілі бір x нүктесінде қандай дәрежеде тез $q(x, t)$ және қанша $\rho(x, t)$ болу керектігін анықтау деген сөз. Олай болса екі белгісізді есептеу үшін бір теңдеу жеткіліксіз. Сондай-ақ негізгі теңдеу $\rho(x, t)$ және $q(x, t)$ өзара қалай байланысқанын көрсететін, қосымша өрнектермен толықтырылу керек. Мұндай өрнек егер саны көрсетілген болса, зат қалай жылдам қозғалады, соны көрсету керек. Өндіріс пен техникада мұндай өрнекті реттегіш деп атаймыз: x участогындағы ρ бөлшектер саны (осындай бөлшектерді q өңдеудің қажетті жылдамдығындағы участок) қалай байланысқан. Қандай затпен жұмыс жасалатынына байланысты, q ағыны мен ρ тығыздықтың арасында түрлі қосымша байланыс (қосымша теңдеу) өрнектері болуы мүмкін. Мысалы, барлық бөлшектері бір мезгілде қозғалатын суйық үшін: $q = \rho \cdot v$, мұндағы v – ағындағы бөлшектердің жылжу жылдамдығы немесе күрделі қозғалыс теңдеулері, ағынның қозғалыс жылдамдығын $v(x,t)$ осы қозғалыс себебімен (F-күш) байланыстыратын теңдеу:

$$\partial v/\partial t + v \cdot \partial v/\partial x = F/\rho.$$

Өз кезегінде F-күші қысымның құлауына әкеп соғуы мүмкін. P: $F = \partial P/\partial x$.

Бұл теңдеуден (оның негізі ретінде) Ньютонның екінші заңын көруге болады, ол $\partial v/\partial t$ жылдамдығын және F күшін ρ салмақ арқылы байланыстыратын заңдылық. Қосымша $v \cdot \partial v/\partial x$ қосындысы пайда болады, себебі қозғалыс кезінде элементар участоктың x және $(x + \Delta x)$ шекаралары арқылы зат келіп түседі, ол өзімен $v \cdot \partial v/\partial x \cdot \rho$ импульсін ала келеді.

Айырымды түрде, $q = \rho \cdot v$ теңдеуі орындалғанда, тасымал мына түрге ие

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot (\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x, t) + b(x, t)).$$

Теңдеу дифференцияның теңдеуіне ұқсас есептеледі.

Дәріс 12. Статистикалық нәтижелерді өңдеу

Дәрістің мақсаты: барлық статистика класстық интервалдарда есептеледі (бұл әдіс әмбебапты, әрі үнемді).

Модельденетін объектінің қасиеттері туралы сенімді ақпарат алу үшін, сараптама нәтижесінде статистикалық шамалардың қалай өңделіп, тиянақталатынын қарастыралық. Еске саламыз, кездейсоқ үрдістің немесе құбылыстың жалпы сипаттамасы орташа шамалар болып табылады.

Бірнеше рет қайталанатын, ал нәтижесінің орташа мәні анықталатын сараптама жүргізу кезінде *орташа мәндерді есептеу* бірнеше тәсілдермен ұйымдастырылуы мүмкін:

- барлық статистика соңында есептеледі;
- барлық статистика есептеу үрдісінде есептеледі (рекурсивті қатынас бойынша);

- барлық статистика класстық интервалдарда есептеледі (бұл әдіс бірінші әдістің әмбебаптығын, екіншінің үнемділігін біріктіреді).

1 тәсіл. Барлық статистиканы соңында есептеу.

Мұндағы сараптама үрдісінде шығыс (зерттелетін) кездейсоқ шамасының x_i мәні деректер массивіне жинақталады. Сараптама аяқталған соң x математикалық күту (орташа) және $Д$ дисперсия (осы математикалық күтуге қатысты шамаларды шашырату) есептеледі

$$X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2 \qquad (2)$$

Орташа квадраттық ауытқу жиі қолданылады σ = sqrt(D).

Айта кету керек, әдістің кемшілігі - жадыны тиімсіз пайдалану, себебі сараптама барысында шығыс шамаларының саны өте үлкен, оларды жинақтап, сақтап отыру қажет және бұл ұзаққа созылуы мүмкін. Екінші кемшілігі x_i массивін екі екі рет оқуға тура келеді, себебі (2) теңдеуді сол жазылған түрде пайдалану үшін (1) теңдеу (1-ден n-ге дейін) оқылу керек, сонан соң x_i массивіне (2) теңдеуді қайта қолдану керек.

Артықшылығы – барлық деректер массивін сақтау, бұл алдағы уақытта қандайда бір әсерлер мен нәтижелерді зерттеу қажеттілігі туындаған кезде, оны нақтырақ зерттеуге мүмкіндік береді.

2 тәсіл. Барлық статистиканы есептеу үрдісінде (рекурсивті қатынас бойынша) есептеу.

Бұл тәсіл тек x_i математикалық күтудің ағымдағы мәнін және әрбір итерацияда түзетіліп отыратын D_i дисперсия мәнін сақтауға мүмкіндік береді. Бұл бізді сараптамалық деректердің барлық массивін тұрақты сақтап отыру қажеттілігінен құтқарады. X_i әрбір жаңа дерек салмақтық коэффициентті қосындыда ескеріледі - X_i қосындыда қосылатын i неғұрлым көп жинақталса, оның мәні X_i кезекті түзетуінде соғұрлым маңызды, сондықтан $i/(i + 1) : 1/(i + 1)$ салмақтық коэффициенттер қатынасы:

$$X_{i+1} = \frac{X_i \cdot i + X_{i+1}}{i+1} = X_i \cdot \frac{i}{i+1} + X_{i+1} \cdot \frac{1}{i+1},$$

$$D_{i+1} = \frac{(X_{i+1} - X_i) + i \cdot D_i}{i+1} = \frac{(X_{i+1} - X_i)}{i+1} + \frac{i}{i+1} \cdot D_i.$$

Мұндағы X_i - сараптамалық шығыс санының кезекті мәні.

3 тәсіл. Барлық статистиканы класстық интервалдарда есептеу.

Бұл тәсілдің ерекшелігі, массивке X_i мәндерінің барлығы жинақталмайды, тек X_i кездейсоқ шығыс шамасы үлестірілген маңызды интервалдары бойынша ғана мәндер жинақталады. X_i өзгерісінің жалпы интервалы m ішкі интервалдарға бөлінеді, оның әрқайсысында n_i саны тиянақталған, бұл сан X_i-дің i-ші интервалдан неше рет мән қабылдағанын көрсетеді. Интервалдар саны аз ($m \approx 1$) жағдайда, біз бірінші тәсілді аламыз, $m = n$ екінші тәсілді аламыз. $1 < m < n$ жағдайда орташа шешім аламыз – бос

емес жады мен шығыс деректері массивінің информативтігі арасындағы компромисс.

$$X = \frac{n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2 + \ldots + n_m \cdot X_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i X_i,$$

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (n_i \cdot X_i - X)^2.$$

Үлестіру геометриясын есептеу.

Кездейсоқ шамаларды үлестіру геометриясын есептеу информативтігі де жоғары. Ол үлестірудің дәлдігі жоғарырақ сипатын көрсету үшін қажет. Статистикалық сәт мәні бойынша үлестірудің геометриялық түрі туралы нақтырақ шешім алуға болатындығы белгілі.

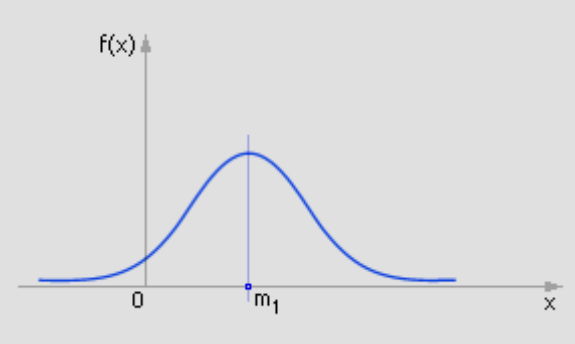
Бірінші сәт (немесе орташа арифметикалық былай есептеледі):

$$m_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - A)^1, \text{ где } A = \begin{cases} 0, (\text{начальный момент}) \\ X, (\text{центральный момент}) \end{cases}$$

Егер *A* сәті 0 мәнін қабылдаса, онда бірінші сәт деп аталады, егер *A* сәті *X* мәнін қабылдаса, онда бірінші сәт орталық деп аталады (жалпы А зерттеуші беретін кез келген сан болуы мүмкін).

Тәжірибеде бірінші сәттің өзін емес, оның нормаланған шамасын қолдану қабылданған. $R_1 = m_1/\sigma^1$.

Бірінші сәт үлестіру геометриясындағы ауырлық ортасын көрсетеді, 12.1 суретті қараңыз.



12.1 сурет - Статистикалық шаманы үлестіру графигіндегі бірінші сәттің ерекшелік жағдайы

Екінші сәт (немесе дисперсия, шашыраңқы) былай есептеледі:

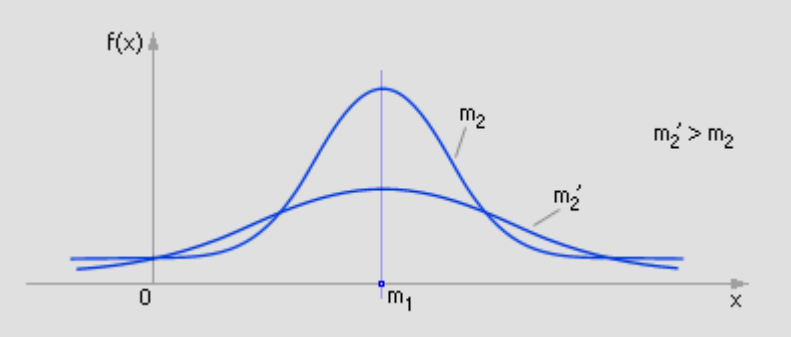
$$m_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2.$$

Орташа квадраттық ауытқу түсінігі екінші сәтпен байланысты:

$$\sigma = \sqrt{m_2}.$$

Тәжірибеде екінші сәттің өзін емес, нормаланған шамасын қолдану қабылданған: $R_2 = m_2/\sigma^2$.

Дисперсия сараптамалық деректердің m_1 ауырлық ортасына қатысты шашыраңқылық шамасын сипаттайды. Осылайша, m_2 шамасы бойынша үлестіру геометриясының екінші параметрі туралы әңгімелеуге болады. (12.2 суретке қараңыз).



12.2 сурет - Екінші сәт шамаларына қатысты статистикалық шаманы үлестіру түрінің ерекшелік өзгерісі

Үшінші сәт асимметрияны сипаттайды (12.3 суретке қараңыз), былай есептеледі

$$m_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \boldsymbol{X})^3 .$$

Тәжірибеде екінші сәттің өзін емес, оның нормаланған шамасын қолдану қабылданған $R_3 = m_3/\sigma^3$.

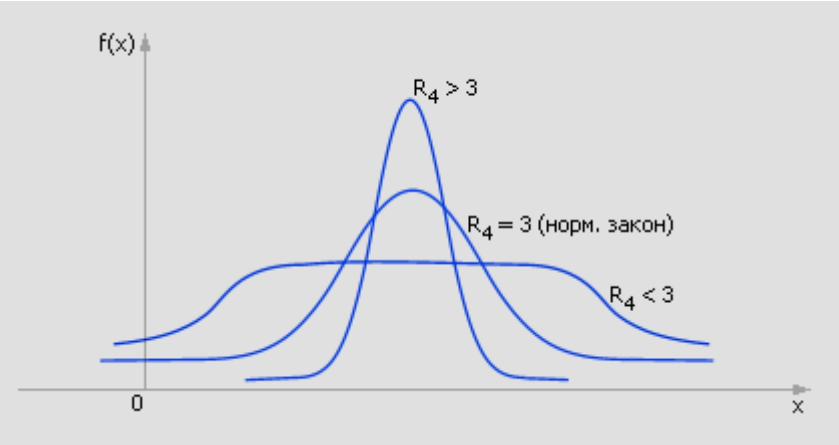
12.3 сурет - Үшінші сәт шамаларына қатысты статистикалық шаманы үлестіру түрінің өзіне тән өзгерісі

R_3 белгісін анықтай отырып, үлестіруде асимметрия бар ма, соны анықтауға болады (12.3 суретті қараңыз), егер бар болса ($R_3 \neq 0$), оның қай жаққа бағытталғаны анықталады.

Төртінші сәт (12.4 суретке қараңыз) экцессті сипаттайды және былай есептеледі:

$$m_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \boldsymbol{X})^4 .$$

Нормаланған сәт мынаған тең: $R_4 = m_4/\sigma^4$.



12.4 сурет - Төртінші сәт шамаларына қатысты статистикалық шаманы үлестіру түрінің өзіне тән өзгерісі

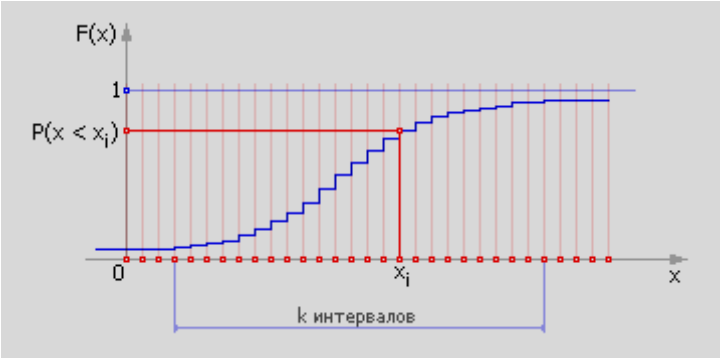
Кездейсоқ шаманың алынған сараптамалық үлестіруі қандай үлестіруге көбірек келетінінанықтау өте маңызды болып табылады. Эмпирикалық үлестіру заңының теориялық пен сәйкестік дәрежесін бағалау екі кезеңде жүргізіледі: сараптамалық үлестіру параметрлері анықталады және әрі қарай Колмогоров бойынша сараптамалық үлестірудің таңдалған теориялықпен сәйкестігі бағаланады.

Эмпирикалық үлестіру заңының теориялықпен сәйкестігін бағалау (Колмогоров бойынша):

1) m_1, m_2, m_3, … сәттерін есептейміз. Сәттер (момент) саны теориялық үлестіру заңындағы белгісіздер санына тең;

2) бағалау үздіксіз үлестіруге қатысты болғандықтан, ал біз сараптамалық жолмен алынған дискретті үлестірумен айналысамыз, олай болса қай үлестіруді болмасын, оны дискреттеу кезінде қанша интервалға бөлу керектігін шешіп алу керек. Ол үшін тәжірибеде өзін жақсы көрсеткен Стерджес ережесін қолдану ұсынылады: $K = 1 + \log_2 n = 1 + 3.322 \cdot \log_{10} n$ мұндағы n –кездейсоқ мәндер (тәжірибелер) саны, K-үлестіру интервалдарының (аралықтар) саны;

3) $F(x) = P(x \le x_i)$ эмпирикалық үлестіру үшін интегралдық (12.5 суретке қараңыз) заң құрылады:



12.5 сурет - Эмпирикалық үлестірудің интегралдық заңы

4) n сараптамалар санына және $1 \le i \le k$ интервалдар санына байланысты интервалдардың әрқайсысындағынәтижелер санын есептеуге болады: $N_i = P_i \cdot n$;

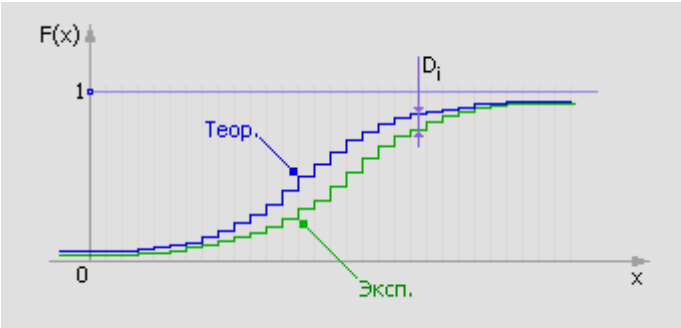
5) әрі қарай жиілікті теориялық үлестіру есептелу керек: $N_i^{\text{ТЕОР.}} = P_i \cdot n$. Егер теориялық ретінде үлестірудің қалыпты заңы қабылданса, онда былай жасауға болады:

$$P_i(x < x_i) = F\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

мұндағы F- Лаплас функциясы, a және σ (заң) параметрлері, 1-ші бөлімде есептелген;

6) алынған жиіліктерді салыстырамыз: барлық k интервалдардағы $N_i^{\text{ТЕОР.}}$ және N_i (12.6 суретке қараңыз) және сараптамалық үлестірудің тексерілетін теориялықтан ең үлкен ауытқуын таңдаймыз:

$$D = \max_i \left| N_i - N_i^{\text{теор.}} \right|;$$



12.6 сурет - Кездейсоқ шаманы теориялық және эмпирикалық интегралдық үлестірулерін салыстыру (дискреттік нұсқа)

7) λ Колмогоров параметрі теориялық үлестірудің сараптамалықтан ауытқуын сипаттайды:

$$\lambda = (\sqrt{k} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{k}}) \cdot D.$$

Әрі қарай 12.1. Колмогоров кестесін пайдалана отырып, біз берген Q ықтималдықты эмпирикалық үлестіру теориялық болып табылады ма, жоқ па, осы жөнінде болжам қабылдап немесе жоққа шығару керек.

Болжам гипотез қабылдау үшін $\lambda < \lambda_{\text{табл}}$ кесте болу керек.

12.1 кесте - Колмогоров Критериінің кестесі

Q	0.85	0.90	0.95	0.99
λ	1.14	1.22	1.36	1.63

Айта кету керек, Колмогоров критерийі бағалау кезіндегі жалғыз ғана мүмкіндік емес, X_u-квадрат критерийін, Андерсон Дарлинг және т.б. критерийлерін қолдануға болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Шукаев Д.Н. Компьютерное моделирование. -Алматы: КазНТУ, 2004. 136 с.
2. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. - СПб.: Питер, Киев: Издательская группа BHV, 2004.
3. Варфоломеев В.И., Назаров СВ. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2004.
4. Прудников В.В., Вакилов А.Н., Прудников П.В.Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования: учебное пособие -М: ФИЗМАТЛИТ, 2009 г.
5. Сарафанов А.В., Глинченко А.С., Егоров Н.М., Комаров В.А. Исследование параметров и характеристик полупроводниковых приборов с применением интернет-технологий: учебное пособие М: ДМК Пресс, 2008 г.
6. Бахвалов Л.А. Моделирование систем: Учебное пособие для вузов: МГГУ, 2006 г.

2013 ж. жиынтық жоспары, реті 299

Алпамыс Туякович Ибраев
Шайқұл Әсел Әлиқызы

ПРИБОРЛАР МЕН ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

5В071600 – Приборлар жасау мамандығының студенттері үшін
дәрістер жинағы

Редакторы Б. Қасымжанова
Стандарт бойынша маман Н. Молдабекова

Басуға _____ қол қойылды
Таралымы 75 дана.
Көлемі _4,3_ оқу-бас.ә..

Пішімі 60х84 1/16
№1 баспа қағазы
Тапсырыс _____ . Бағасы _2150_тн.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
Коммерциялық емес акционерлік қоғамы
Көшіру – көбейту бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынов көш, 126