Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра «Электроника»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций для студентов специальности
5В071600 − Приборостроение

Алматы 2016

СОСТАВИТЕЛИ: Б.С. Байкенов, З.В. Абдулина. Теория автоматического управления. Конспект лекций для студентов специальности 5В071600 – Приборостроение. – Алматы: АУЭС, 2016.– 59 с.

Конспект лекций предназначен для самостоятельного изучения курса «Теория автоматического управления». В конспекте рассмотрены основные законы управления, временные и частотные характеристики типовых динамических звеньев, критерии устойчивости замкнутых непрерывных и цифровых систем управления

Моделирование автоматизации технологического процесса производства реализовано в программных средах VisSim и MatLab.

Конспект лекций предназначен для студентов специальности 5В071600 – Приборостроение.

Ил.-49, табл.-1, библиогр.-8

Рецензент: доцент Гали К.О.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2016 г.

©НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2016 г.

Введение

Конспект лекций составлен в целях закрепления лекционного материала и применения теории управления в задачах инженерного проектирования систем автоматического управления.

В конспекте кратко изложены основы теории управления. Описан математический аппарат исследования различных систем автоматического регулирования, рассмотрены типовые динамические звенья, структурные схемы и способы их упрощения, временные и частотные характеристики разомкнутых и замкнутых систем, а также рассматриваются основные методы анализа и синтеза линейных систем управления с заданными показателями качества регулирования. Особое внимание уделено анализу и синтезу линейных цифровых систем, рассмотрены современные методы анализа систем на базе промышленных контроллеров.

Конспект может быть использован студентами не только для специальности 5В071600 – Приборостроение, но и всех электротехнических специальностей АУЭС для самостоятельного изучения теории управления с целью применения в задачах РГР, курсового и дипломного проектирования.

1 Лекция №1. Основные понятия и принципы управления

Цель лекции: изучить основные термины и определения, методы моделирования и классификации систем управления, построение структурных схем, принципы и законы управления.

1.1 Основные термины и определения

В теории автоматического управления рассматриваются вопросы анализа и синтеза систем автоматического управления с заданными требованиями по качеству на основе методов и специального математического аппарата. Поэтому необходимо ознакомиться с основными терминами и определениями.

Система автоматического управления (САУ) – это совокупность технических средств для управления регулируемым параметром, в которой вычисление сигналов управления осуществляется регулятором или программируемым контроллером.

Объект управления (ОУ) – это установка, в которой протекающие физические процессы, управляются (регулируются) с помощью специальных технических средств.

Регулируемый параметр – это технологический параметр, значением которого управляют с помощью специальных технических средств.

Воздействия – внешние факторы, изменяющие течение технологического процесса в объекте управления. Различают возмущающие и управляющие воздействия.

Возмущающие воздействия носят случайный характер. Например, изменение температуры окружающей среды, давления, скорости воздуха, колебания напряжения в электросети.

Управляющие воздействия на объект управления организуются техническим устройством в САУ для компенсации возмущающих воздействий.

Под сигналами понимают совокупность энергии или вещества, поступающих в объект управления, возмущающие и управляющие воздействия, а также регулируемые параметры. По направлению различают входные x и выходные y сигналы объекта управления (рисунок 1.1).

Так, возмущающие и управляющие воздействия будут входными сигналами для объекта управления; регулируемый же параметр всегда принимают за выходной сигнал, даже если он физически за пределы объекта не выходит (например, уровень жидкости в емкости, напряжение на обмотках электродвигателя).

На схемах (рисунок 1.1) функциональные элементы САУ обозначают прямоугольником, а сигналы – стрелками.

Рисунок 1.1 - Функциональный элемент САУ

Параметры физических процессов, определяющие сигналы, содержат информацию.

Структурной схемой называется символическое изображение элементов технологического процесса и связей между ними, отражающее последовательность процессов в системе.

1.2 Цели и принципы управления

Задача управления – изменять протекающие в объекте управления процессы посредством соответствующих команд для достижения поставленной цели.

Принципами управления являются:

- принцип разомкнутого управления;
- принцип компенсации – управление по возмущению;
- принцип обратной связи.

Таким образом, САУ – это система, стремящаяся сохранить в допустимых пределах рассогласование (ошибку) ε(t) между требуемыми x(t) и действительными y(t) значениями управляемых переменных с помощью их сравнения на основе принципа ОС и использования получаемых при этом сигналов управления.

Система, в которой входной сигнал x(t) – известная функция (детерминированный сигнал) на всем промежутке управления, называется системой программного управления.

Система, в которой задающий входной сигнал x(t) =const, называется системой стабилизации.

Система, в которой задающее входной сигнал x(t) – случайная функция, называется следящей системой.

Система, управляющая только одной выходной величиной, называются одномерной.

Одномерные системы могут быть системами программного управления, системами стабилизации и следящими системами.

Кроме того, на практике используются:

- системы с поиском экстремума показателя качества;
- системы оптимального управления;
- адаптивные системы.

1.3 Математические модели САУ

На первом этапе расчета и проектирования САУ ограничиваются их качественным описанием на основе анализа функциональных схем, т.е. неформальным описанием. Неформальным описанием называется совокупность сведений о САУ, достаточных для построения алгоритма ее работы, т.е. для построения функциональной схемы, служащей основой для разработки ее формального (математического) описания. Недостаток неформального описания САУ состоит в том, что в этом случае не оперируют количественными характеристиками, и таким образом не достигается необходимая точность. Под математической моделью САУ понимают количественную форматизацию абстрактных представлений об изучаемой системе.

Математическая модель – это формальное описание системы с помощью дифференциальных, интегральных, разностных, алгебраических уравнений, а также неравенств, множеств и т.д.

Пусть У и Х – множества входных и выходных сигналов САУ. Если каждому элементу $y \in Y$ ставится в соответствие определенный элемент $x \in X$, то говорят, что задан системный оператор А, посредством которого задается связь между входом и выходом САУ:

$$y = A \cdot x. \qquad (1.1)$$

Операторное уравнение (1.1) следует считать математическим уравнением САУ, поскольку оно устанавливает количественную связь между ее входным x(t) и выходным y(t) сигналами. Задать оператор системы - значит задать правило определения ее выходного сигнала по входному сигналу.

В большинстве случаев операторные уравнения систем принадлежат к классу дифференциальных уравнений или эквивалентных им интегральных уравнений. Для получения дифференциального уравнения системы в целом обычно описывают отдельные элементы, т.е. составляют дифференциальные уравнения для каждого входящего в систему элемента: элемента сравнения, регулятора, усилителя, привода, датчика и т.д.

1.4 Классификация САУ и законы управления

САУ можно классифицировать по классам и принципам действия.

По классам дифференциальных уравнений:

1) *Линейные и нелинейные системы.*

Линейными системами называются системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, в противном случае система входит в класс нелинейных. Линейные и нелинейные дискретные системы описываются соответственно линейными и нелинейными разностными уравнениями или системами разностных уравнений.

Линейные и нелинейные стационарные системы описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а нестационарные системы с переменными коэффициентами.

2) *Сосредоточенные и распределенные системы*.

Сосредоточенные системы или системы со средоточенными параметрами, описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Распределенные системы или системы с распределенными параметрами, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Существуют два закона управления: по отклонению выходной величины и по возмущению.

САУ по отклонению – принцип И.И.Ползунова, предложенный им в 1765 г. В настоящее время используется в 90% промышленных САУ.

Достоинством САУ по отклонению является то, что она компенсирует влияние любого возмущающего воздействия, которое вызвало изменение значения ее выходного сигнала y от заданного значения (рисунок 1.2).

Недостаток: сначала должно появиться отклонение ε выходного сигнала от заданного значения и только затем регулятор компенсирует возмущающе воздействие.

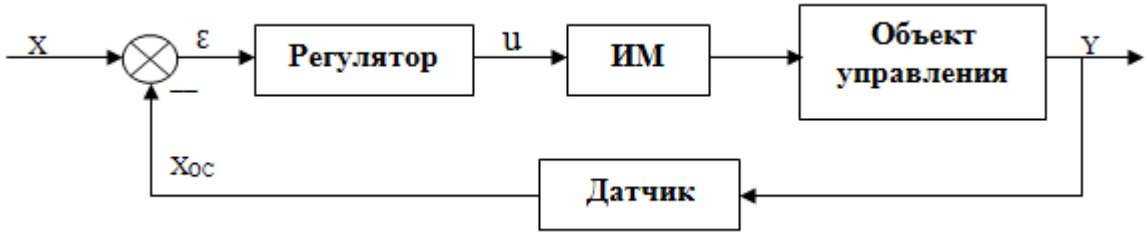


Рисунок 1.2 - Структурная схема САУ по отклонению

САУ по возмущению – принцип Ж.Понселе, предложенный им в 1830 г. Если f возмущающее действие на объект, его измеряют и подают на регулятор для сравнения с заданным значением и выработки управляющего сигнала, изменяющего значение входного сигнала (рисунок 1.3).

При таком принципе управления изменение возмущающего воздействия компенсируется регулятором до того, как оно нарушит технологический режим работы объекта. Однако есть существенный недостаток – неспособность компенсировать влияние других возмущающих воздействий.

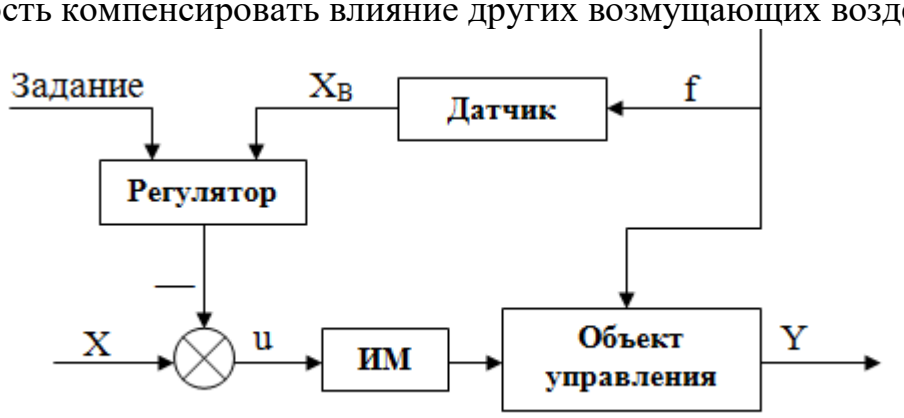


Рисунок 1.3 - Структурная схема САУ по возмущению

САУ по возмущению является разомкнутой, т.е. без обратной связи по выходному сигналу.

Комбинированные САУ совмещают оба закона управления и лишены многих недостатков рассмотренных схем (рисунок 1.4).

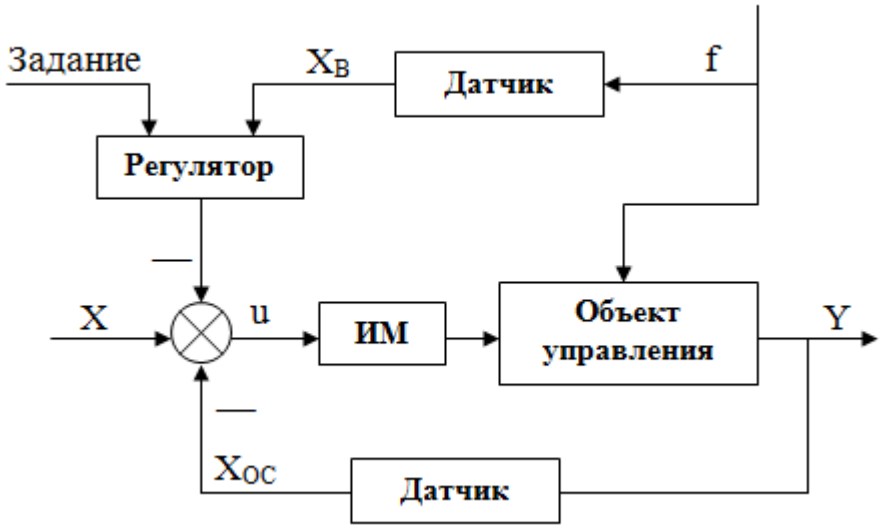


Рисунок 1.4 - Структурная схема комбинированной САУ

По закону изменения задающего сигнала различают САУ стабилизации, программные и следящие.

По закону изменения выходного сигнала регулятора различают САУ дискретные (двух, трехпозиционные) и непрерывные (аналоговые).

Двухпозиционные (вкл. – выкл.) САУ надежны (холодильные установки), дешевы, но мала точность регулирования.

2 Лекция №2. Передаточные функции систем управления

Цель лекции: изучение методов упрощения структурных схем систем управления, определение передаточных функций разомкнутых и замкнутых систем, а также передаточных функций в пространстве состояний.

2.1 Типы соединения звеньев

Любую сложную схему можно разбить на отдельные блоки с одним из трех типовых соединений: последовательным, параллельно-согласованным или параллельно-встречным.

Схема последовательного соединения звеньев представлена на рисунке 2.1. Выходной сигнал каждого из звеньев в последовательной цепи можно выразить через его передаточную функцию (ПФ):

$$x_1 = W_1(p)x_{ВХ}(p); \tag{2.1}$$

$$x_2 = W_2(p)x_1(p); \tag{2.2}$$

$$x_{ВЫХ}(p) = x_3(p) = W_3(p)x_2(p). \tag{2.3}$$

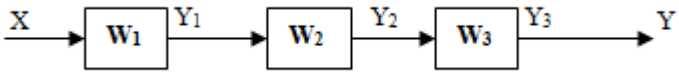


Рисунок 2.1 - Схема с последовательным соединением звеньев

Последовательно подставляя в последнее уравнение выражение входных сигналов, получим

$$У(p) = W_3(p)W_2(p)W_1(p)X(p), \tag{2.4}$$

т.е. ПФ цепи последовательно соединенных звеньев будет иметь вид

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p). \tag{2.5}$$

Схема параллельно-согласованного соединения звеньев приведена на рисунке 2.2. Выразим выходной сигнал для каждого звена через его ПФ:

$$y_1(p) = W_1(p)x(p); \tag{2.6}$$
$$y_2(p) = W_2(p)x(p); \tag{2.7}$$
$$y_3(p) = W_3(p)x(p). \tag{2.8}$$

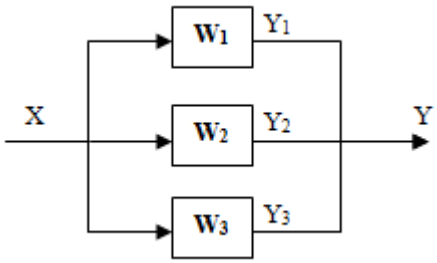


Рисунок 2.2 - Схема с параллельно-согласованным соединением звеньев

Просуммируем последние три уравнения:

$$y_1(p) + y_2(p) + y_3(p) = y(p) = (W_1(p) + W_2(p) + W_3(p))\, x(p). \qquad (2.9)$$

Взяв отношение выходного сигнала к входному, получим ПФ параллельно-согласованных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p). \qquad (2.10)$$

2.2 ПФ замкнутой системы

На рисунке 2.3 дана схема соединения двух звеньев с отрицательной обратной связью (ООС).

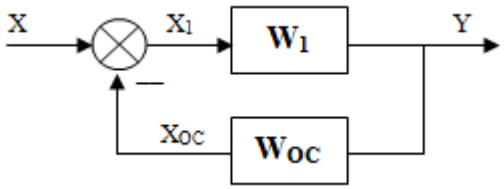


Рисунок 2.3 - Схема системы с отрицательной обратной связью

При отрицательной обратной связи $x_1 = x - x_{ОС}$.

Учитывая это условие, и путем несложных преобразований получим ПФ цепи с параллельно-встречным соединением звеньев с отрицательной обратной связью:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \qquad (2.11)$$

При положительной обратной связи знак в знаменателе ПФ изменяется на противоположный, т.е. на минус.

2.3 ПФ систем в пространстве состояний

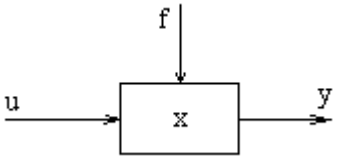
Ранее была рассмотрена математическая модель системы без учета внутреннего состояния X объекта управления, а ПФ системы описывала

взаимосвязь только входных и выходных сигналов. Это описание называется внешним.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n}. \quad (2.12)$$

Преимущество данного метода описания заключается в том, что, используя комплексные переменные, можно применять алгебраические методы. Полагая при этом, что начальные значения переменных состояния X – нулевые.

Дифференциальные уравнения, описывающие технологический процесс, всегда можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае говорят, что это описание в виде уравнений состояния или в пространстве состояний. Управляемую систему можно представить в виде общей модели



u – вектор входного сигнала управления; f – вектор входного сигнала возмущения; x – вектор состояния; y – вектор выходного сигнала.

Рисунок 2.4 – Блок-схема системы

Описание системы, учитывающей взаимосвязь входных и выходных сигналов через состояние объекта управления X , называется *внутренним*. Основным достоинством данного метода является возможность использования численного метода интегрирования (Эйлера, Рунге Кутта и т.д.) для решения дифференциальных уравнений.

Математическим аппаратом моделей в пространстве состояний является линейная алгебра: операции с векторами и матрицами. Если известны входные сигналы управления $u = (u_1\ u_2\ ...u_r)^T$ и возмущения $f = (f_1\ f_2\ ...f_m)^T$, текущее состояние системы $x = (x_1\ x_2\ ...x_n)^T$, то можно предсказать ее дальнейшее поведение, т.е. рассчитать выходной сигнал $y = (y_1\ y_2\ \ldots y_p)^T$, где буква Т означает матрицу-столбец.

В матричном виде уравнение состояния системы записывается как

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + ... + b_{1r}u_r \\ &..... \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + ... + b_{nr}u_r. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Матрицы коэффициентов A размерностью (nxn) и B размерностью (nxr) равны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ..... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}...b_{1r} \\ ..... \\ b_{n1}...b_{nr} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

При единственном входном сигнале, например, управляющим $u = u_1$ матрица B имеет только один столбец

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Между внутренними состояниями, сигналом управления и выходным сигналом существует зависимость

$$y = C\,x + D\,u, \tag{2.16}$$

где C и Д матрицы коэффициентов размерностью (pxn) и (pxr) соответственно равные

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}...c_{1n} \\ ..... \\ c_{p1}...c_{pn} \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11}...d_{1r} \\ ..... \\ d_{p1}...d_{pr} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} &y_1 = c_{11}x_1 + ... + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + ... + d_{1r}u_r \\ &..... \\ &y_p = c_{p1}x_1 + ... + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + .. + d_{pr}u_r. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Если в системе имеется один выход $y = y_1$, то матрица C состоит только из одной строки $C = (c_1 \ldots c_n)$, а матрица Д – нулевая.

ПФ системы можно рассчитать непосредственно из внутреннего описания в переменных состояния, используя формулы (2.13) и (2.16). Для этого представим уравнение (2.13) в изображениях Лапласа

$$pEx(p) = Ax(p) + Bu(p), \tag{2.18}$$

где E – единичная матрица размерностью (nxn);

$p = d/dt$ – оператор Лапласа.

Тогда вектор состояния будет равен

$$x(p) = (pE - A)^{-1} Bu. \tag{2.19}$$

Подставив x(p) в формулу (2.16), выраженное через изображения Лапласа, получим выходной сигнал

$$y(p) = C(pE - A)^{-1} Bu(p) + Du(p). \tag{2.20}$$

Тогда ПФ системы будет равна

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C(pE - A)^{-1} + D. \qquad (2.21)$$

Знаменатель ПФ называется характеристическим уравнением, корни которого называются полюсами (poles). Значения полюсов идентичны собственным числам матрицы А. Корни числителя называются нулями (zeros). Если нули обозначить $z_1, ..., z_m$, а полюса – $p_1,..., p_n$, то при n > m ПФ формулы (2.12) можно записать в виде

$$W(s) = \frac{K(s - z_1)...(s - z_m)}{(s - p_1)...(s - p_n)} = \frac{a_1}{s - p_1} + ... + \frac{a_n}{s - p_n}, \qquad (2.22)$$

где a_i – действительные или комплексные константы.

Это означает, что выходную переменную у можно представить суммой показательных функций (с помощью таблиц обратных переходов Лапласа), которые называются модами

$$y(t) = C_1 e^{-p_1 t} + ... + C_n e^{-p_n t}. \qquad (2.23)$$

Моды зависят от входного управляющего сигнала u(t). Вещественный полюс соответствует слагаемому с вещественным показателем степени, а два комплексно-сопряженных полюса всегда можно представить в виде одного слагаемого. Действительно, если два полюса имеют значения $p_{k,k+1} = -\sigma \pm j\omega$, то этой паре соответствует одно слагаемое $C_k e^{-\sigma t} \sin \omega t$.

Полюса или собственные числа матрицы А линейной системы полностью определяют устойчивость. Если вещественные части полюсов – отрицательные (лежат в левой части комплексной плоскости или просто левые), то реакция на ограниченный (например, единичный) входной сигнал u(t) всегда также ограниченна, т.е. система устойчива.

3 Лекция №3. Типовые динамические звенья

Цель лекции: изучение передаточных функций, частотных и временных характеристик типовых динамических звеньев систем управления.

3.1 Частотные и временные характеристики звеньев

Частотные характеристики звеньев (системы) получают путем подачи на вход гармонического сигнала с постоянной амплитудой и переменной частотой от нуля до ∞, при этом замеряя на выходе амплитуду и фазу сигнала.

Подставим в ПФ звена s = jω

$$W(j\omega) = \frac{y(s)}{x(s)} = U(j\omega) + V(j\omega) = |A| \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3.1)$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ - модуль ПФ;

$\varphi(\omega) = arctg\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$ - фаза ПФ или сдвиг фазы выходного сигнала.

Экспериментально для построения амплитудно-фазовой частотной характеристики или годографа требуются в генератор частоты, вольтметр и частотомер.

Для построения логарифмических амплитудно-частотных характеристик используется выражение

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \qquad (3.2)$$

По оси абсцисс откладываются частоты, выраженные в логарифмах lg ω, подекадно: 1, 10, 100…. или в логарифмах 0, 1, 2…

Временная характеристика звена (системы) определяется переходной функцией h(t) или кривой разгона, описывающей реакцию звена (системы) на единичный входной сигнал 1(t)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & при\ \ t \geq 0 \\ 0 & при\ \ t < 0. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Импульсной переходной или весовой функцией ω(t) звена (системы) называют функцию, описывающую реакцию на единичное импульсное воздействие или дельта функции $\delta(t) = \dot{1}(t)$ при нулевых начальных условиях.

Импульсная переходная функция и переходная функция связаны выражением

$$\omega(t) = \dot{h}(t). \qquad (3.4)$$

3.1.1 Пропорциональное (усилительное) звено.

Типовое уравнение взаимосвязи выходного и входного сигналов пропорционального звена является алгебраическим:

$$y(t) = k\, x(t). \qquad (3.5)$$

ПФ пропорционального звена имеет вид

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = k\,. \qquad (3.6)$$

Аналитическое выражение вектора АФХ этого звена $W(j\omega) = k$, из которого видно, что ПФ не зависит от частоты входного сигнала.

$$A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = \text{arctg } 0 = 0; \quad L(\omega) = 20 \lg k. \qquad (3.7)$$

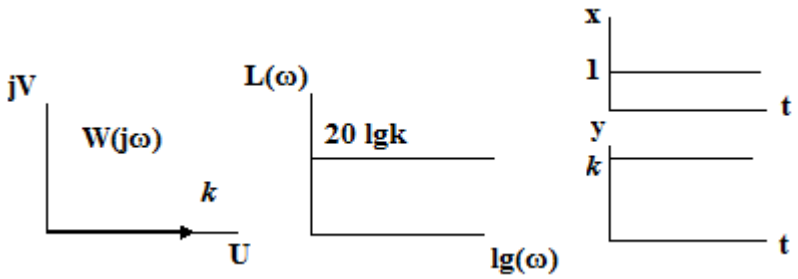


Рисунок 3.1 – Частотные и временные характеристики пропорционального звена

По кривой разгона видно, что выходной сигнал пропорционален входному и ордината выходного сигнала равна коэффициенту пропорциональности k.

3.1.2 Астатическое (интегрирующее) звено.

Типовое дифференциальное уравнение этого звена имеет вид

$$T\frac{dy(t)}{dt} = x(t)\,. \tag{3.8}$$

Операторная форма записи дифференциального уравнения

$$Tpy(p) = kx(p)\,. \tag{3.9}$$

Передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{Tp}\,. \tag{3.10}$$

Из ПФ путем замены p = jω получается аналитическое выражение вектора АФЧХ астатического звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega t};\quad \varphi(\omega) = arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2};\quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega T;\quad h(t) = kt.$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{T(j\omega)} = -j\frac{1}{T\omega}\,. \tag{3.11}$$

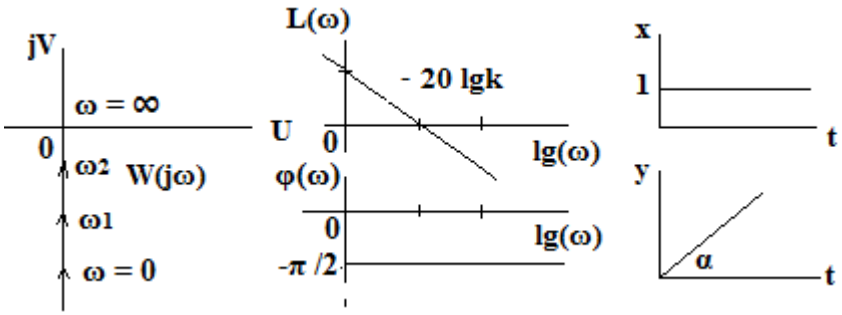


Рисунок 3.2 – Частотные и временные характеристики астатического звена

Объекты, которые описываются астатическим (интегрирующим) звеном, называют астатическими. Такие объекты не обладают свойством самовыравнивания.

3.1.3 Апериодическое звено первого порядка.

Дифференциальное уравнение апериодического звена первого порядка имеет вид

$$T\frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t)\,. \tag{3.12}$$

Из этого выражения можно получить передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}\,. \tag{3.13}$$

Примером ПФ апериодического звена может служить фильтр низкой частоты на RC или RL элементах.

После необходимых преобразований получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2} - j\,\frac{kT_0\omega}{1+T^2\omega^2}\,. \tag{3.14}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};\quad \varphi(\omega) = -arctgT\omega;\quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

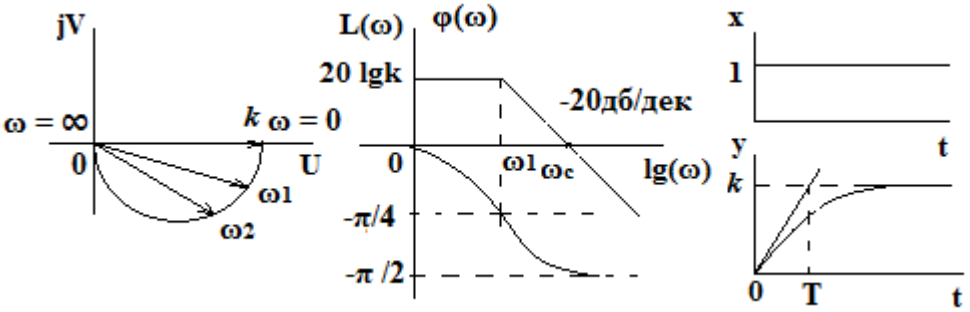


Рисунок 3.3 – Частотные и временные характеристики апериодического звена 1 порядка

Примером реализации апериодического звена является электродвигатель небольшой мощности, который после включения в электросеть (подачи единичного скачка) набирает обороты по экспоненте. Объекты с передаточной функцией апериодического звена называют статическими.

3.1.4 Апериодическое звено 2-го порядка.

Дифференциальное уравнение этого звена имеет вид

$$T_1\frac{dy^2}{dt^2} + T_2\frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t). \tag{3.15}$$

В операторной форме записи

$$(T_1 p^2 + T_2 p + 1) y(p) = kx(p)$$

или

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) y(p) = kx(p). \qquad (3.16)$$

где $T = T_1$; $\xi = \frac{T_2}{2T_1} = \frac{T_2}{2T}$.

Передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{y(p)}{x\ (p)} = \frac{k}{Tp^2 + 2\xi T p + 1}. \qquad (3.17)$$

Существуют три вида апериодических звеньев 2 порядка в зависимости от величины коэффициента демпфирования ξ :

1) $\xi \geq 1$ – апериодическое звено 2 порядка;
2) $0 < \xi < 1$ – колебательное звено;
3) $\xi = 0$ – консервативное звено.

3.1.4.1 Апериодическое звено 2 порядка ($\xi \geq 1$).

ПФ звена преобразуется как два последовательно соединенных апериодических звена 1 порядка.

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 + 1)}, \qquad (3.18)$$

где $T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$.

Таким образом, апериодическое звено 2 порядка при $\xi \geq 1$ ведет себя также как и 2 апериодических звена 1 порядка. Поэтому АФЧХ и ФЧХ аналогичны звену первого порядка, но с наклоном ЛАЧХ при $\omega_1 = 1/T_1$ -20 дб/дек и затем при $\omega_2 = 1/T_2$ еще раз -20дб/дек. Общий наклон составит -40дб/дек.

3.1.4.2 Колебательное звено ($0 < \xi < 1$).

Подставив p = jω в ПФ звена, получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega} = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} - j\frac{2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \qquad (3.19)$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}; \quad L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20\lg k \quad при \ \ \omega \leq \omega_1 \quad \omega_1 = \dfrac{1}{T} \\ 20\lg k - 40\lg T\omega \ \ при \ \ \omega > \omega_1 \end{cases}.$$

Фазо-частотная характеристика звена имеет следующие значения

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-arctg\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} & при\ \ \omega\le\omega_1\\ -\pi-arctg\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} & при\ \omega>\omega_1\end{cases}. \qquad (3.20)$$

Решив дифференциальное уравнения звена при x(t) =1 при нулевых начальных условиях, получим переходную функцию h(t) или кривую разгона

$$h(t)=k[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)], \qquad (3.21)$$

где $\alpha=\dfrac{\xi}{T};\quad \beta=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};\quad \varphi_0=arctg\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$

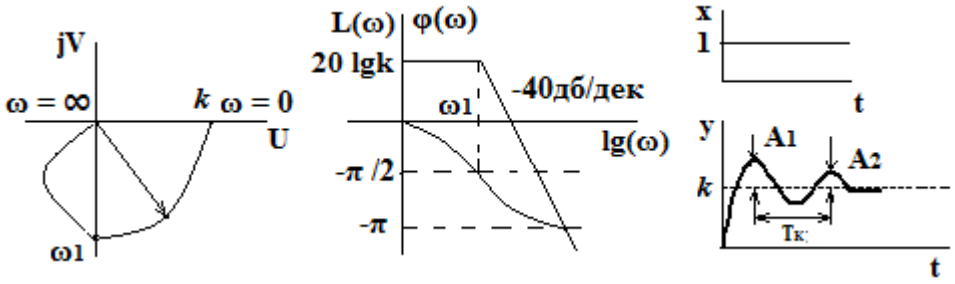


Рисунок 3.4 – Частотные и временные характеристики колебательного звена

По кривой разгона можно вычислить постоянную времени T и ξ колебательного звена. Измерив период колебаний $T_к$ и амплитуды колебаний A_1 и A_2 на кривой разгона, находят коэффициенты α и β по формулам

$$\alpha=\frac{1}{T_k}\ln\frac{A_1}{A_2};\quad \beta=\frac{2\pi}{T_k}. \qquad (3.22)$$

Подставив рассчитанные значения коэффициентов α и β в (3.21) и решая систему уравнений с двумя неизвестными, определяем T и ξ.

Объекты, описываемые колебательным звеном, обладают свойством самовыравнивания, т.е. способностью самостоятельно восстанавливать состояние равновесия после возмущающего воздействия.

3.1.4.3 Консервативное звено (ξ = 0).

ПФ звена равна

$$W(p)\frac{k}{T^2p^2+1};\quad W(j\omega)\frac{k}{1-T^2\omega^2};\quad A(\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2};\quad h(t)=k(1-\cos\omega t). \qquad (3.23)$$

Фаза ПФ звена при различных значениях частоты имеет вид

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & при\ \ \omega \le \omega_1 \\ -\pi & при\ \ \omega > \omega_1 \end{cases}. \qquad (3.24)$$

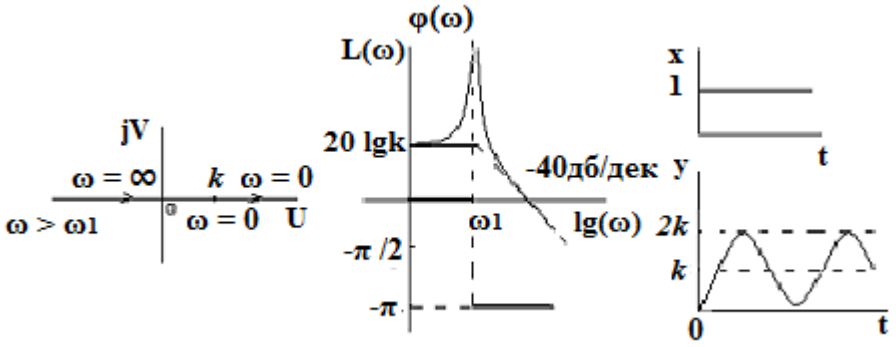


Рисунок 3.5 – Частотные и временные характеристики консервативного звена

Как видно из ЛАЧХ при сопрягаемой частоте амплитуда ПФ стремится к бесконечности, т.е. происходит явление резонанса. Переходная характеристика убеждает в нежелательности применения этого звена, т.к. при подаче единичного воздействия возникают незатухающие колебания.

3.1.5 Запаздывающее звено.

Типовое уравнение взаимосвязи входного и выходного сигналов запаздывающего звена имеет вид

$$y(t + t_{зап}) = kx(t). \qquad (3.25)$$

ПФ этого звена равна

$$W(p) = k \cdot e^{-pt_{зап}}. \qquad (3.26)$$

Вектор АФЧХ этого звена имеет вид

$$A(\omega) = k;\ \ \varphi(\omega) = -\omega t_{зап};\ \ L(\omega) = 20\lg k;\ \ h(t) = k\,1(t - t_{зап}). \qquad (3.27)$$

$$W(j\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_{зап}} = k[\cos(\omega t_{зап}) - j\sin(\omega t_{зап})]. \qquad (3.28)$$

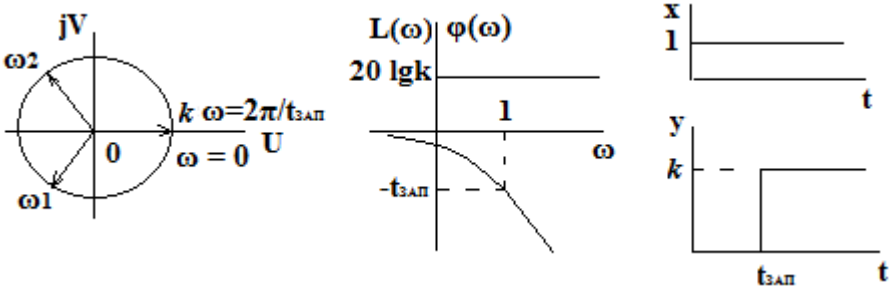


Рисунок 3.6 – Частотные и временные характеристики запаздывающего звена

Годограф запаздывающего звена представляет собой бесконечное число окружностей с единичным радиусом вокруг начала координат комплексной плоскости. Первая окружность замыкается, когда $\omega t_{зап} = 2\pi$ или при частоте $\omega = 2\pi/t_{зап}$.

4 Лекция №4. АФЧХ и ЛАЧХ

Цель лекции: изучение амплитудно-фазовых частотных разомкнутых и замкнутых систем, логарифмических амплитудных частотных характеристик.

4.1 АФЧХ разомкнутых и замкнутых систем

Рассмотрим замкнутую одноконтурную систему, структурная схема которой приведена на рисунке 4.1.

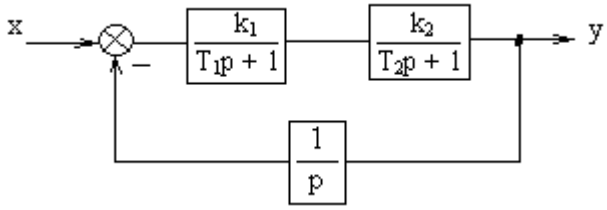


Рисунок 4.1 – Структурная схема замкнутой системы

ПФ разомкнутой системы равна произведению ПФ последовательно соединенных звеньев

$$W_p(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_1 k_2}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}. \quad (4.1)$$

Для простоты рассуждений рассмотрим частный случай, когда $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ и $T_1 = T_2 = T$. Тогда выражение (4.1) примет вид

$$W_p(p) = \frac{k^2}{T^2 p^2 + 2Tp + 1}. \quad (4.2)$$

Для построения частотных характеристик системы необходимо в формулу (4.2) вместо оператора p поставить $j\omega$ ($p = j\omega$). Комплексная переменная в знаменателе ПФ не допускается, поэтому числитель и знаменатель умножаются на комплексно-сопряженное число.

$$W_p(j\omega) = \frac{k^2}{[(1 - T^2\omega^2) + j2T\omega]} \cdot \frac{[(1 - T^2\omega^2) - j2T\omega]}{[(1 - T^2\omega^2) - j2T\omega]} = k^2 \left[\frac{1 - T^2\omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} - j \frac{2T\omega}{(1 + T^2\omega^2)^2} \right]. \quad (4.3)$$

В данном случае комплексная величина ПФ представлена в алгебраическом виде, т.е. состоящая из действительной и мнимой части W_p (jω) = X(ω) + jY(ω).

В показательном виде комплексная переменная примет вид

$$W_p(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi}, \qquad (4.4)$$

где A(ω) – амплитуда ПФ;

φ – угол между действительной осью комплексной плоскости и вектором ПФ.

Тогда формулу (4.3) можно представить и показательной форме

$$A(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 \frac{1}{1 + T^2\omega^2}; \qquad \varphi(\omega) = -arctg\frac{2T\omega}{1 - T^2\omega^2}. \qquad (4.5)$$

Для построения АФЧХ необходимо изменять частоту от 0 до ∞ в любом из выражений ПФ разомкнутой системы (4.3) или (4.5).

В начале построения кривой АФЧХ находят две крайние точки при ω = 0 и ω = ∞. Тогда, пользуясь формулой (4.3), получим:

1) при ω = 0 $x(\omega) = \kappa^2$; $y(\omega) = 0$ – точка лежит на действительной оси комплексной плоскости;

2) при $\omega = \infty$ $x(\omega) = 0$; $y(\omega) = 0$.

Если использовать показательную форму (4.5), то:

1) при $\omega = 0$ $A(\omega) = \kappa^2$; $\varphi(\omega) = 0$ – точка лежит на действительной оси комплексной плоскости;

2) при ω = ∞ $A(\omega) = 0$; $\varphi(\omega) = 0$.

Теперь необходимо определить точки пересечения кривой АФЧХ только с мнимой осью *Y* комплексной плоскости, т.к. координатную функцию *x* (ω) при пересечении с действительной осью уже определили при ω = 0. Для этого приравняем действительную часть *x* (ω) к нулю и найдем частоту ω_0, а затем подставим ее в мнимую часть *y*(ω) формулы (4.3).

$$x(\omega) = 0; \qquad 1 - T^2\omega^2 = 0. \qquad (4.6)$$

Тогда $\omega_0 = 1/T$ – частота, при которой действительная часть *x* (ω) = 0.

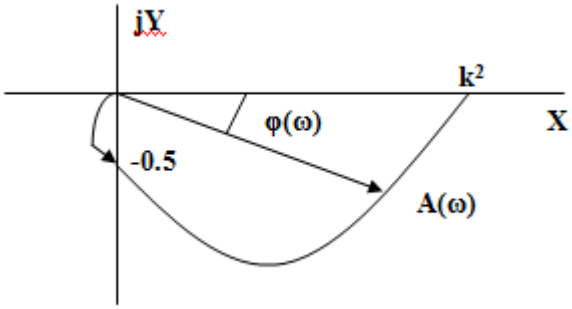


Рисунок 4.2 – АФЧХ разомкнутой системы

Подставив полученную частоту в мнимую часть формулы (4.3), получим значение координаты точки пересечения кривой АФЧХ с мнимой осью $y(\omega_0)$ = - 0,5. Через эти точки можно приблизительно показать кривую АФЧХ. Более точную кривую строят при частотах от ω= 0 до ω_0 с произвольным шагом.

ПФ замкнутой системы (рисунок 4.1) равна

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W_{oc}(p)} = \frac{k^2}{T^2 p^2 + 2Tp + 1 + k^2 k_{oc}}. \qquad (4.7)$$

Для построения АФЧХ используется не все выражение (4.7), а только знаменатель, называемый характеристическим уравнением замкнутой системы. Вид кривой характеристического уравнения лежит в основе частотного критерия Михайлова, а сама кривая АФЧХ называется кривой Михайлова.

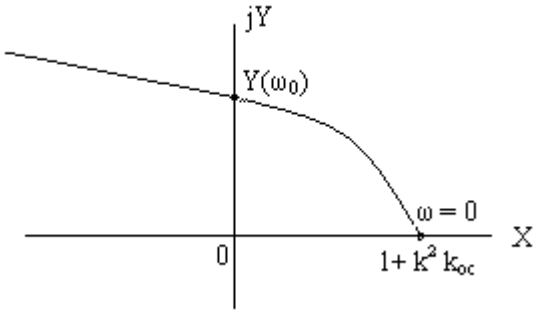


Рисунок 4.3 – АФЧХ замкнутой системы

Характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$T^2p^2 + 2Tp + 1 + к^2\,к_{ос} = 0. \qquad (4.8)$$

Подставим $p = j\omega$ в характеристический полином, получим

$$-T^2\omega^2 + j\,2T\omega + 1 + k^2\,k_{ос} = X(\omega) + jY(\omega) = (1 + k^2\,k_{ос} - T^2\omega^2) + j\,2T\omega, \qquad (4.9)$$

где $X(\omega) = 1 + k^2\,k_{ос} - T^2\omega^2$ – действительная часть вектора полинома;

$jY(\omega) = 2T\omega$ – мнимая часть вектора полинома.

Кривая АФЧХ строится аналогично: изменяя частоту ω от 0 до ∞, находят точки координат на комплексной плоскости, подставляя дискретные значения частот в выражение (4.9). Степень полинома характеристического уравнения определяет квадрант окончания АФЧХ, т.е. вектора знаменателя ПФ при ω = ∞.

Находим координаты при двух крайних частотах:

1) при ω = 0 $\quad X(0) = 1 + k^2 k_{oc}$; $\quad Y(0) = 0$;

2) при ω = ∞ $\quad X(\infty) = -\infty$; $\quad Y(\infty) = \infty$.

Частота ω_0, при которой происходит пересечение кривой с мнимой осью находится при $X(\omega) = 0$

$$1+ k^2 k_{oc} - T^2\omega^2 = 0, \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{1+k^2 k_{oc}}}{T}. \qquad (4.10)$$

Подставив найденную частоту ω_0 в мнимую часть $У(\omega)$, получим значение координаты точки пересечения кривой АФЧХ с мнимой осью комплексной плоскости

$$Y(\omega_0) = 2\sqrt{1+k^2 k_{oc}}. \qquad (4.11)$$

4.2 Логарифмические частотные характеристики систем

Амплитудно-фазовая частотная характеристика представляет собой выражение

$$W(j\omega) = A(\omega)\exp j\varphi(\omega). \qquad (4.12)$$

Логарифмируя левую и правую части уравнения, найдем

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \qquad (4.13)$$

Выражения $lnA(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют соответственно логарифмическую амплитудную (ЛАХ) и логарифмическую фазовую (ЛФХ) характеристики.

Для оценки отношения двух величин принято использовать логарифмическую единицу децибел (дБ). Связь между числом L и числом A дается формулой

$$L = 20\lg A. \qquad (4.14)$$

ПФ разомкнутых одноконтурных систем равна

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p). \qquad (4.15)$$

Если представить в модулях и аргументах, т.е. в показательном виде, то

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)$$

или в логарифмах

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 20\lg A_i(\omega), \qquad (4.16)$$

где $L(\omega)$ – логарифмическая частотная характеристика разомкнутой системы.

Из этого выражения вытекает следующее правило построения ЛАЧХ разомкнутых систем: строят ЛЧХ отдельных звеньев и затем их графически складывают.

Например: пусть дана ПФ разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{100(p+1)}{p(10p+1)(0,01p^2+0,1p+1)}.$$

Подставив вместо p = jω и, используя выражение (4.16), ЛАЧХ разомкнутой системы будет равна

$$L(\omega) = 40 - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{(10\omega)^2+1} + 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\sqrt{(1-0,01)^2+(0,1\omega)^2}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ состоит из четырех асимптот. Вычисляются сопрягающие частоты $\omega_1 = 1/10 = 0,1$; $\omega_2 = 1$; $\omega_3 = 1/0,1 = 10$.

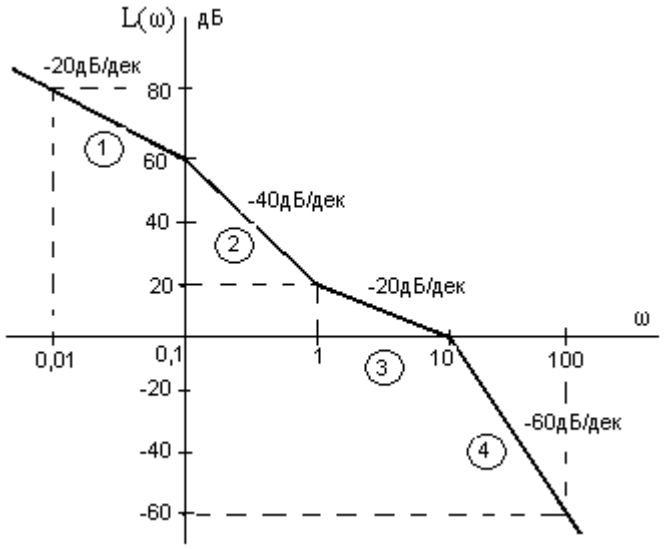


Рисунок 4.4 – ЛАЧХ разомкнутой системы

При частотах меньше сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают).

Поэтому при $\omega < \omega_1$ $L(\omega) \approx 40 - 20\lg\omega$ – уравнение первой асимптоты.

Первую асимптоту проводят до первой сопрягающей частоты ω_1 через точку с координатами $\omega_1 = 0,1$ и $L(\omega) = 60$ дБ с наклоном -20дБ/дек.

$$L(\omega_1) = 40 - 20lg0,1 = 40 + 20 = 60\ дБ.$$

Проводят вторую асимптоту от конца первой до второй сопрягающей частоты ω_2. Ее наклон определяется в зависимости от того, является ли ω_1 сопрягающей частотой форсирующего, апериодического или колебательного звеньев, т.е. +20, -20 или 40 дБ/дек. В данном случае ω_1 – сопрягающая частота апериодического звена, следовательно, наклон будет равен – 20дБ/дек.

При $\omega_1 \le \omega < \omega_2$ уравнение второй асимптоты примет вид:

$$L(\omega) \approx 40 - 20lg\omega - 20lg10\omega = 40 - 20lg\omega - 20lg10 - 20lg\omega = 20 - 40lg\omega.$$

Далее получают уравнение для третьей асимптоты аналогично второй.

Проводят третью асимптоту от конца второй до третьей сопрягающей частоты ω_3, наклон которой будет равен +20 дБ – форсирующее звено при ω_2.

При $\omega_2 \le \omega < \omega_3$ уравнение третьей асимптоты примет вид

$$L(\omega) \approx 20 - 40lg\ \omega + 20lg\ \omega = 20 - 20lg\ \omega.$$

Проводят четвертую асимптоту от конца третьей сопрягающей частоты ω_3 с наклон равным - 40 дБ – колебательное звено при ω_3.

При $\omega \ge \omega_3$ уравнение третьей асимптоты примет вид

$$L(\omega) \approx 20 - 20lg\ \omega - 40lg\ 0{,}1\omega = 20 - 20lg\ \omega - 40lg\ 0{,}1 - 40lg\ \omega = 60 - 60lg\ \omega.$$

ЛАЧХ разомкнутой системы примет вид, приведенный на рисунке 4.4.

5 Лекция №5. Алгебраические критерии устойчивости

Цель лекции: изучение условий устойчивости линейных систем, критериев устойчивости Рауса и Гурвица.

5.1 Понятие об устойчивости

Под устойчивостью понимают способность системы самостоятельно приходить к последующему установившемуся состоянию после приложения воздействия, которое вывело ее из состояния равновесия.

А.М. Ляпунов показал, что для устойчивости справедливы две следующие теоремы.

Теорема первая. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то система будет устойчивой независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Теорема вторая. Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то система будет неустойчивой независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Поскольку уравнение первого приближения можно рассматривать как линеаризованное дифференциальное уравнение, то условия устойчивости А.М.Ляпунова справедливы и для линейных систем. Пусть, например, система описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b. \qquad (5.1)$$

Решение этого уравнения:

$$x(t) = C_1 \exp p_1 t + C_2 \exp p_2 t + ... + C_n \exp p_n t + \frac{b}{a_0}, \qquad (5.2)$$

где p_1, p_2, …p_n – корни характеристического уравнения

$$a_n p + a_{n-1} p + ... + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (5.3)$$

Если система устойчива, то функция x(t) при t, стремящемся к бесконечности, будет приближаться к b/a0, что возможно лишь в том случае, если каждый из членов $\exp(p_i t)$ будет стремиться к нулю. Для этого все корни p_1, p_2, …p_n должны иметь отрицательную вещественную часть. Корни характеристического уравнения можно представить в виде векторов,

расположенных в комплексной плоскости (рисунок 5.1). Очевидно, что система будет устойчивой, если все корни располагаются слева от мнимой оси.

В случае, если один вещественный корень или пара комплексно-сопряженных корней располагаются на мнимой оси, система оказывается на границе устойчивости. Системы, у которых имеется одна пара мнимых корней, могут совершать незатухающие колебания (автоколебания). Эти системы часто относят к неустойчивым, так как они практически неработоспособны.

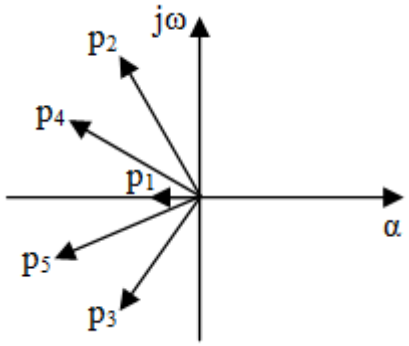


Рисунок 5.1 – Распределение корней в комплексной плоскости

Линейные системы, характеристические уравнения которых имеют один нулевой корень при всех остальных корнях, расположенных левее мнимой оси, называют нейтрально-устойчивыми. Для того чтобы все корни оказались в левой полуплоскости, можно воздействовать на коэффициенты характеристического уравнения, которые, согласно теореме Виета, связаны с корнями непрерывными зависимостями.

По Ляпунову А.М. достаточно убедиться только в отрицательности вещественных частей корней. Такие методы основываются на использовании критериев устойчивости, например алгебраических критериев Рауса и Гурвица, частотных критериев Михайлова и Найквиста, а также условий устойчивости, определяемых логарифмическими частотными характеристиками.

Для решения второй задачи могут быть использованы методы выделения областей устойчивости.

5.2 Алгебраические критерии устойчивости

5.2.1 Критерий Рауса.

Алгебраические критерии устойчивости позволяют установить, устойчива система или нет, по результатам алгебраических действий над коэффициентами характеристического уравнения. Условия, устанавливающие факт отрицательности вещественных частей корней, и будут являться критериями устойчивости. Впервые подобный критерий был предложен английским математиком Э. Раусом в 1877 году в виде алгоритма.

Пусть дано характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (5.4)$$

В первой строке таблицы Рауса записывают в порядке возрастания индексы коэффициентов характеристического уравнения (5.4), имеющие четный порядок: a_0 a_2 a_4 a_6 …

Во второй строке – коэффициенты с нечетным порядком: a_1 a_3 a_5 a_7 .. . Остальные строки состоят из элементов, определяемых по формуле

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i \; C_{k+1,i-1}, \quad (5.5)$$

$$r_i = C_{1,i-2} / C_{1,i-1}, \quad (5.6)$$

где k – номер столбца;

i – номер строки.

Число строк таблицы Рауса равно (n +1). Коэффициенты критерия Рауса сведены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 - Коэффициенты критерия Рауса

Коэффициент r_i	Строка i	Столбец k		
		1	2	3
	1	$C_{11} = a_0$	$C_{21} = a_2$	$C_{31} = a_4$
	2	$C_{12} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{32} = a_5$
$r_3 = C_{11}/C_{12} = a_0/a_1$	3	$C_{13} = C_{21} - r_3 C_{22}$	$C_{23} = C_{31} - r_3 C_{32}$	$C_{33} = C_{41} - r_3 C_{42}$
.....	....	.....	.....	.....
Rn+1 = C1n /C1n+1	ni +1	C1n+1 = C2n-1 – rn+1 C2n	C2n+1 = C3n-1 – rn+1 C3n	C1n+1 = C4n-1 – rn+1 C4n

Критерий Рауса: для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т.е. при $a_0>0$ были положительными:

$$C_{11} = a_0 > 0; \quad C_{12} = a_1 > 0; \; C_{13} > 0; \; ..... \; C_{1,n+1} > 0 . \quad (5.7)$$

5.2.2 Критерий Гурвица.

В 1895 году немецкий математик Гурвиц А. предложил следующий метод: из коэффициентов характеристического уравнения (5.4) сначала строят главный определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 a_7 ... 0 \\ a_0 a_2 a_4 a_6 ... 0 \\ 0 a_1 a_3 a_5 ... 0 \\ ..... \\ 0.0..0..0.....a_n \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Главный определитель составляется так, что по главной диагонали выписываются коэффициенты уравнения начиная с a_1 в возрастающем

порядке до a_n . От каждого коэффициента главной диагонали по вертикали вверх выписываются коэффициенты с возрастающими и вниз - с убывающими индексами. Места в матрице коэффициентов с индексами больше n и меньше 0 заполняются нулями. Вещественные части корней будут отрицательными в том случае, если все коэффициенты уравнения и диагональные миноры главного определителя будут положительными.

Отчеркивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получаем определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 . a_1 a_3 \end{vmatrix}; .... \qquad (5.9)$$

Критерий Гурвица: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента a0 характеристического уравнения, т.е. при $a_0 > 0$ были положительными

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 . a_1 a_3 \end{vmatrix} > 0; .... \qquad (5.10)$$

Обычно критерий Гурвица применяется для систем с $n \leq 4$, выше используется критерий Льенара – Шипара. В последнем столбце главного определителя (5.8) отличен от нуля только a_n , поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} . \qquad (5.11)$$

Поэтому для проверки устойчивости САУ достаточно найти $\Delta_1 - \Delta_{n-1}$. Если все определители $\Delta_1 - \Delta_{n-1} > 0$, а главный $\Delta_n = 0$, то САУ находится на границе устойчивости. Это возможно только в двух случаях: $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} > 0$. В первом ($a_n = 0$) САУ находится на границе апериодической устойчивости (один из корней $s_i = 0$); во втором ($\Delta_{n-1} > 0$) на границе колебательной устойчивости (2 комплексно-сопряженных корня находятся на мнимой оси $s_i = j\omega i$; $s_{i+1} = -j\omega i$).

Для систем, имеющих характеристические уравнения $n \geq 5$ удобно применять одну из модификаций критерия Гурвица, предложенную в 1914 году Льенаром П. и Шипаром Р.: для того чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_0 > 0, a_1 > 0, ...a_n > 0 \qquad (5.12)$$

$\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0.....$ – нечетные определители

или

$$a_0 > 0, a_1 > 0, ...a_n > 0 \qquad (5.13)$$

$\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0.....$ – четные определители.

Очевидно, что этот критерий требует в два раза меньше раскрытий определителей, чем критерий Гурвица, поэтому особенно удобен при исследовании устойчивости САУ высшего порядка.

Рассмотрим выражение критерия Гурвица для некоторых уравнений.

Уравнение третьего порядка

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0.$$

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 a_3 0 \\ a_0 a_2 0 \\ 0.a_1.a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_0a_3).$$

Условие Гурвица $(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$, $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$, $a_i > 0$, i=1, 2, 3.

Следовательно, система будет устойчивой, если все коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 положительны и $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, т.е. $a_1a_2 > a_0a_3$. Уравнение третьего порядка при положительных коэффициентах a_0, a_1, a_2, a_3 и выполнения условия $a_1a_2 > a_0a_3$ называется критерием устойчивости Вышнеградского.

Уравнение четвертого порядка

$$a_0p^4 + a_lp^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0.$$

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 a_3 .0.0 \\ a_0 a_2 a_4 0 \\ 0.a_1.a_3 0 \\ 0.a_0.a_2 a_4 \end{vmatrix}.$$

Условия Гурвица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3a_0 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 0 \\ a_0 a_2 0 \\ 0.a_1.a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0$$

или

$$\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2 a4 = a_3\,\Delta_2 - a_1^2 a4 > 0.$$

Определитель Δ_3 может быть положительным лишь при условии $\Delta_2 > 0$. Поэтому условие устойчивости для уравнения четвертого порядка может быть выражено соотношением

$$a_3\,(a_1a_2 - a_3\,a_0) - a_1^2\,a4 > 0.$$

Уравнение пятого порядка

$$a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5 = 0.$$

Система, описываемая уравнением пятого порядка, устойчива, если

$$\Delta_3 = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0.$$

$$\Delta_4 = (a_3a_4 - a_2a_5)(a_1a_2 - a_0a_3) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 > 0.$$

6 Лекция №6. Частотные критерии устойчивости

Цель лекции: изучение частотных критериев устойчивости систем Найквиста и Михайлова.

6.1 Критерий Найквиста

Критерий Найквиста, основанный на использовании частотных характеристик, позволяет судить об устойчивости замкнутой САУ по ее амплитудно-фазовой характеристике в разомкнутом состоянии. Установим связь между п.ф. одноконтурной системы в замкнутом и разомкнутом состояниях. Рассмотрим функцию

$$1+W(p)=1+\frac{D(p)}{G(p)}=\frac{G(p)+D(p)}{G(p)}, \tag{6.1}$$

где числитель представляет характеристический полином системы в замкнутом состоянии, а знаменатель — характеристический полином разомкнутой цепи главной обратной связи системы.

Выражение

$$W(p)=\frac{D(p)}{G(p)} \tag{6.2}$$

есть передаточная функция разомкнутой системы.

Так как порядок полинома D(p) для физически реализуемых систем не должен превышать порядок полинома G(p), то характеристическое уравнение замкнутой системы

$$G(p)+D(p)=0 \tag{6.3}$$

имеет столько же корней, сколько и характеристическое уравнение разомкнутой системы

$$G(p)=0. \tag{6.4}$$

При выводе критерия Найквиста будем исходить из того, что система устойчива как в замкнутом, так и в разомкнутом состоянии, т.е. вещественные части корней уравнений (6.3) и (6.4) отрицательны.

Заменив в уравнении (6.1) p на jω и разложив числитель и знаменатель на простейшие множители, получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы:

$$1+W(j\omega)=\frac{G(j\omega)+D(j\omega)}{G(j\omega)}=\frac{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)...(j\omega-p_m)}{(j\omega-s_1)(j\omega-s_2)...(j\omega-s_m)}=\frac{A\exp j\varphi_A}{B\exp j\varphi_B}, \tag{6.5}$$

где p_1, p_2, ..., p_m; s_1, s_2, ..., s_m — соответственно корни уравнении (6.3) и (6.4).

Множители числителя и знаменателя правой части выражения (6.5) представляют векторы, располагаемые в комплексной плоскости слева от мнимой оси (рисунок 6.1, а). Начало каждого вектора лежит в точке, соответствующей корню уравнения $p_к$, а конец — на мнимой оси.

При изменении частоты ω от -∞ до +∞ каждый из векторов повернется на угол π. Числитель выражения (6.5) представляет вектор, модуль которого A равен произведению модулей перемножаемых векторов, а аргумент φ_A — сумме аргументов тех же т векторов.

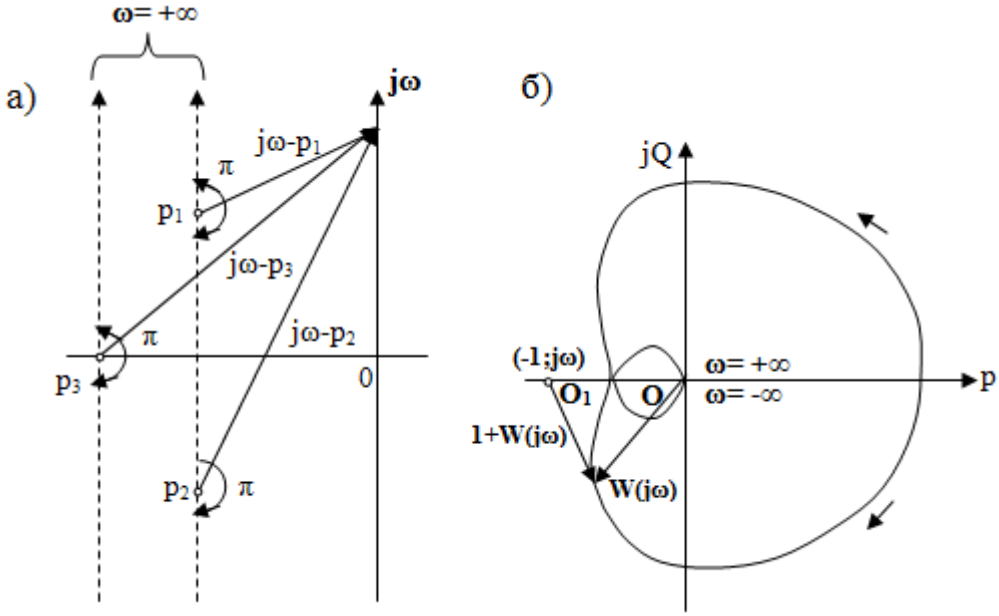
Поэтому при изменении ω от - ∞ до +∞ результирующий вектор D(jω) + G(jω) повернется на угол $\varphi_A = m\pi$. Так как по условию корни G(p) = 0 лежат слева от мнимой оси, угол поворота φB результирующего вектора, имеющего модуль B, при изменении ω от - ∞ до +∞ также будет равен mπ. Нетрудно заключить поэтому, что угол поворота вектора 1 + W(jω) при изменении ω от -∞ до +∞ равен

$$\varphi_A - \varphi_B = m\pi - m\pi = 0. \qquad (6.6)$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) разомкнутой системы получается путем замены p на jω в уравнении (6.2):

$$W(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a_n}{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + ... + b_m} = P(\omega) + jQ(\omega). \qquad (6.7)$$

Она отображает границу области устойчивости. При ω→0 $W(j\omega)\to a_n/b_m$, а при ω→∞ W(jω)→0, если порядок числителя меньше порядка знаменателя (n<m), и $W(j\omega)\to a_0/b_0$ при равенстве порядков числителя и знаменателя (n= m).



а) расположение векторов p-pi в комплексной плоскости; б) АФХ разомкнутой системы.

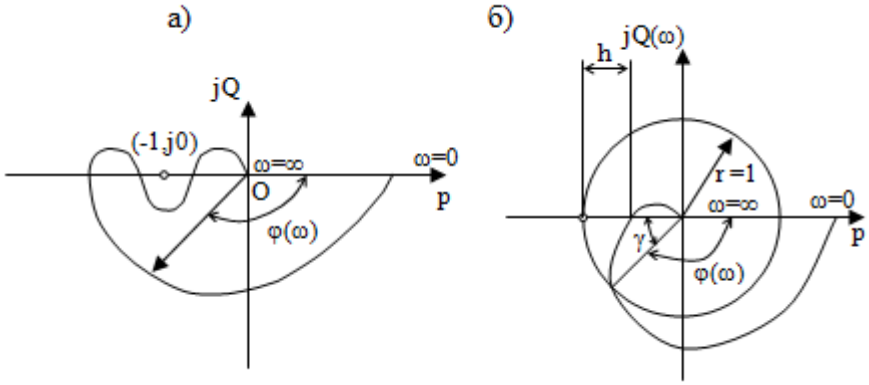
Рисунок 6.1 - Пояснения критерия Найквиста

Амплитудно-фазовая характеристика при изменении ω от - ∞ до +∞ симметрична относительно оси абсцисс (рисунок 6.1, б). Если из точки с координатами (-1; j0) провести вектор, который своим концом касается амплитудно-фазовой характеристики, то получим вектор 1 + W(jω), так как O_1A = OA - (-1) = 1 + OA = 1 + W(jω).

При изменении ω от - ∞ до +∞ конец вектора 1 + W(jω) будет скользить по амплитудно-фазовой характеристике, а сам вектор повернется на угол, результирующее значение которого равно нулю. Последнее возможно, если точка (-1;j0) лежит вне амплитудно-фазовой характеристики. Это условие согласуется с условием (6.6), которое возможно лишь в случае, когда система устойчива.

Первый критерий Найквиста: замкнутая система будет устойчивой в том случае, если устойчива разомкнутая система и ее амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку (-1; j0).

Кривая (рисунок 6.2,б), представляющая частотную характеристику устойчивой системы, пересекается с осью абсцисс справа от точки (-1;jO) и называется амплитудно-фазовой характеристикой первого рода. Кривая (рисунок 6.2,а), пересекающаяся с осью абсцисс и справа, и слева от точки (-1;jO), называется амплитудно-фазовой характеристикой второго рода. В этом случае система в замкнутом состоянии будет устойчивой при условии, если, разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов амплитудно-фазовой характеристики через ось абсцисс слева от точки (-1;jO) равна нулю.



а) АФХ второго рода; б) определение запаса устойчивости по модулю и фазе.

Рисунок 6.2 - Исследование устойчивости по АФХ

При анализе устойчивости системы по амплитудно-фазовым характеристикам целесообразно ввести понятие запаса устойчивости по модулю и по фазе. Если через точку (-1;jO) (рисунок 6.2,б) провести окружность единичного радиуса, получим точку пересечения ее с амплитудно-фазовой характеристикой (точка А). Запас устойчивости по модулю характеризуется отрезком h, а запас устойчивости по фазе — углом γ.

В общем случае, если степень полинома D(jω) в уравнении (6.7) меньше степени полинома G(jω) и они не имеют общих корней с неотрицательной вещественной частью, критерий Найквиста формулируется следующим образом: САУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии, является устойчивой в замкнутом состоянии, если разность между числам положительных и отрицательных переходов АФХ через ось абсцисс слева от точки (-1;j0) равна r/2. Сформулированный ранее критерий устойчивости Найквиста следует рассматривать как частный случай общей задачи при r = 0 (r – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

6.2 Критерий Михайлова

Критерий Михайлова дает возможность судить об устойчивости системы по годографу, описываемому концом характеристического вектора замкнутой системы, который может быть получен из уравнения (6.3):

$$M(p) = D(p) + G(p). \qquad (6.8)$$

Если заменить p на jω и изменять ω от 0 до ∞, то вектор своим концом опишет в комплексной плоскости кривую, называемую годографом Михайлова. Выражение (6.8) представляет полином m-го порядка, который может быть разложен (при p = jω) на множители по теореме Безу:

$$M(j\omega) = (j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\ldots(j\omega - p_m), \qquad (6.9)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – корни уравнения (6.3).

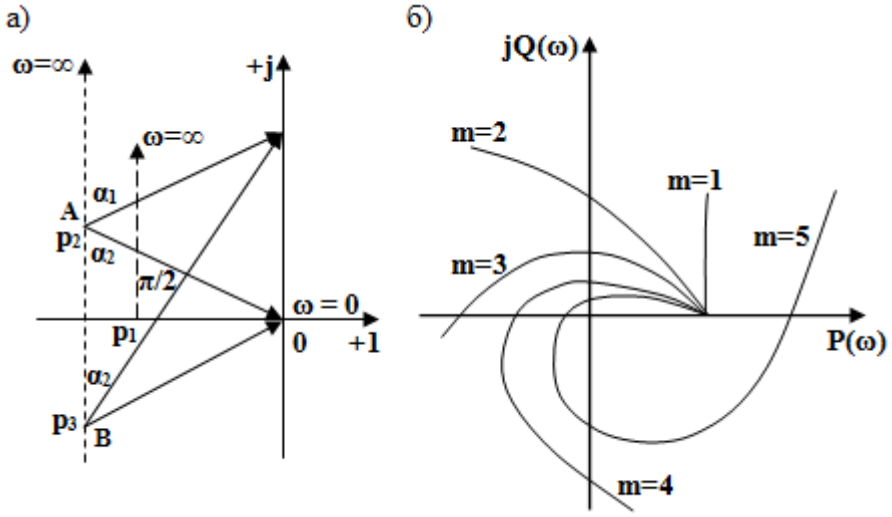
Уравнение (6.9) написано в предположении, что замкнутая система устойчива. Правая часть этого уравнения представляет произведение векторов, расположенных слева от мнимой оси в плоскости корней (рисунок 6.3,а). Так как векторы $(j\omega - p_k)$, соответствующие вещественным корням, совпадают с осью абсцисс, то при изменении ω от 0 до ∞ каждый из них повернется на угол π/2. Каждая же пара комплексно-сопряженных корней повернется при этом на угол π. Действительно, вектор $(j\omega - p_2)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернется на угол α_1, а вектор $(j\omega - p_3)$ на угол α_2. Так как $\angle ABO = \angle BAO = \alpha_2$ (ΔOAB — равнобедренный), то результирующий угол поворота обоих векторов $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$.

Таким образом, вектор M(jω), представляющий произведение m векторов, аргументы которых при умножении складываются, повернется при этих условиях на угол m(π/2).

При ω=0 годограф Михайлова отсекает на вещественной оси в положительном направлении отрезок, равный свободному члену характеристического уравнения. Начало характеристического вектора совпадает с началом координат. Поэтому, если система устойчива,

характеристический вектор при своем вращении нигде не должен обращаться в нуль.

Критерий Михайлова формулируется следующим образом: замкнутая система устойчива в том случае, если вектор кривой Михайлова при изменении ω от 0 до ∞ проходит в положительном направлении m квадрантов комплексной плоскости, начиная свое движение от положительной вещественной полуоси, и при этом нигде не обращается в нуль (m – порядок характеристического уравнения замкнутой системы).



а) график к доказательству критерия Михайлова; б) годограф Михайлова.

Рисунок.6.3 – Устойчивость по Михайлову

На рисунке 6.3,б приведены годографы Михайлова для устойчивых замкнутых систем, описываемых уравнениями различных порядков (m = 1, 2, 4, 5). Если полный угол поворота вектора M(ω) равен (m – 2r)(π/2), то число правых корней равно r.

7 Лекция №7. Устойчивость различных линейных систем

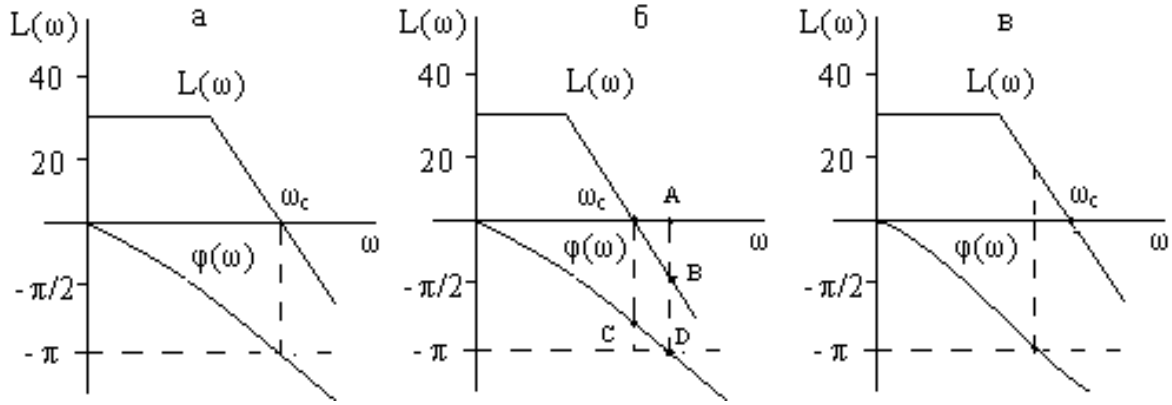
Цель лекции: изучение определения устойчивости системы по виду ЛАЧХ и условий устойчивости системы с запаздыванием.

7.1 Условия устойчивости на основе ЛАЧХ

Метод основывается на возможности суждения об устойчивости замкнутой системы по взаимному расположению логарифмических амплитудной и фазовой характеристик системы в разомкнутом состоянии. Согласно критерию Найквиста, в случае, если система устойчива, точка (-1; j0) лежит слева от АФХ первого рода.

При значениях аргумента характеристического вектора W(jω) разомкнутой системы φ = - π и модуля |W(jω)| = 1 система будет находиться

на границе устойчивости. При этом L(ω) = = 201g|W(jω)| = 0, т.е. логарифмическая амплитудная характеристика (рисунок 7.1,а) пересекает ось абсцисс. Точка пересечения характеризуется частотой среза ω_c, т.е. эта частота, при которой модуль передаточной функции системы (коэффициент усиления) равен единице или частота, при которой система теряет усилительные свойства.



а) на границе устойчивости; б) устойчива; в) неустойчива.

Рисунок 7.1 – Определение устойчивости по ЛАЧХ:

Если система устойчива, то при φ = -π величина A(ω) = |W(jω)| < 1 и L(ω) = 201gA(ω) < 0, т.е. ордината логарифмической амплитудно-частотной характеристики будет иметь отрицательный знак (рисунок 7.1,б).

При неустойчивой системе углу φ = -π соответствуют величины |W(jω)| > 1 и L(ω) = 201gA(ω) > 0. В этом случае ордината логарифмической амплитудной характеристики будет иметь положительное значение (рисунок 3.1,в).

Таким образом, при амплитудно-фазовых характеристиках первого рода система будет устойчивой в том случае, если ордината логарифмической частотной характеристики при фазовом угле φ = -π имеет отрицательный знак. На рисунке 7.1,б показаны запас устойчивости по модулю, характеризуемый отрезком AB, и запас устойчивости по фазе (отрезок CD).

Условия устойчивости при амплитудно-фазовой характеристике второго рода применительно к логарифмическим частотным характеристикам можно сформулировать следующим образом (рисунок 7.2).

Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива также и в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов фазочастотной характеристики φ(ω) через прямую (-π) при тех же значениях ω, при которых логарифмическая амплитудно-частотная характеристика L(ω) неотрицательна, равнялась нулю.

На рисунке 7.2 приведены амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы и соответствующая ей ЛАЧХ. Из анализа этих ЛАХ и ЛЧХ видно, что разность между числом положительных и отрицательных

переходов ЛФХ прямых –π при L(ω)>0 равна нулю. Следовательно, если разомкнутая система устойчива (r = 0), то и замкнутая система будет устойчива, при этом запасы устойчивости по амплитуде равны h1 и h2 , а запас устойчивости по фазе равен φ.

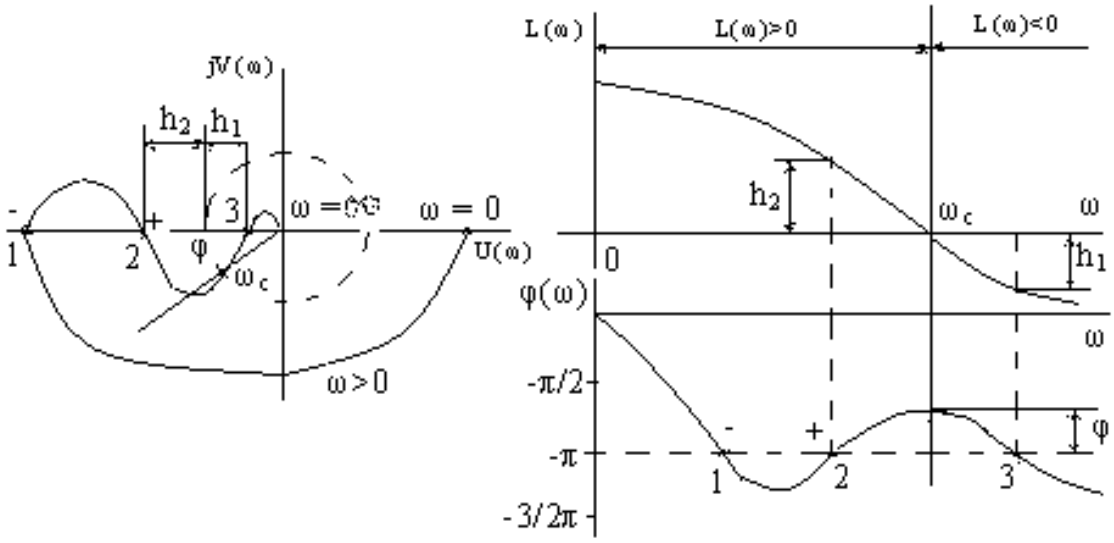


Рисунок 7.2 – АФХ второго рода и ЛАЧХ разомкнутой системы

Таким образом, в соответствии с критерием Найквиста, неустойчивая система в разомкнутом состоянии будет устойчивой в замкнутом состоянии, если разность между числами положительных переходов логарифмической фазовой характеристики (ЛФХ) через прямую (-π) равна r/2 с учетом только тех значений ω, при которых ЛАЧХ положительна. Здесь r — число корней с положительной вещественной частью.

7.2 Устойчивость систем с запаздыванием

Иногда отдельные звенья САУ обладают «чистым» запаздыванием, которое проявляется в том, что система реагирует на входной сигнал не сразу, а по истечении некоторого постоянного времени :

$$y(t) = x(t - \tau), \qquad (7.1)$$

где τ – постоянная величина, называемая временем запаздывания.

Такие звенья называют запаздывающими, т.к. они воспроизводят изменения входной величины без искажения, но с некоторым τ. Например, таким звеном можно описать работу транспортера: на один конец которого поступает какой-то груз, а с другого конца этот груз принимают через промежуток времени τ . ПФ запаздывающего звена описывается

$$W_3(s) = e^{-s\tau}. \qquad (7.2)$$

Системы, содержащее хотя бы одно запаздывающее звено, называют системой с запаздыванием. Структурная схема таких систем может иметь два вида: запаздывающее звено (ЗЗ) находится в прямой цепи и в цепи обратной связи (рисунок 7.3).

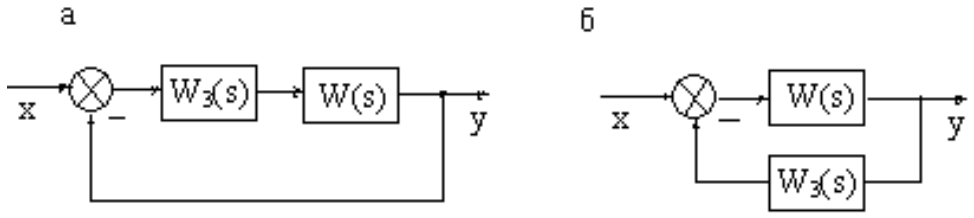


Рисунок 7.3 – Структурные схемы САУ с запаздыванием

ПФ разомкнутой системы с запаздыванием равна

$$W_\tau(s) = W_3(s)W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}e^{-s\tau}, \qquad (7.3)$$

где W(s)=R(s)/Q(s) – ПФ разомкнутой системы без запаздывания.

Если запаздывающее звено находится в прямой цепи (рисунок 7.3,а), то ПФ замкнутой системы равна

$$W_{yx}(s) = \frac{W_\tau(s)}{1+W_\tau(s)} = \frac{R(s)e^{-s\tau}}{Q(s)+R(s)e^{-s\tau}} = \frac{R_\tau(s)}{D_\tau(s)}. \qquad (7.4)$$

Если запаздывающее звено находится в цепи обратной связи, то ПФ замкнутой системы равна

$$W_{yx}(s) = \frac{W(s)}{1+W_\tau(s)} = \frac{R(s)}{Q(s)+R(s)e^{-s\tau}} = \frac{R(s)}{D_\tau(s)}. \qquad (7.5)$$

Сопоставляя (7.4) и (7.5), видно, что независимо от места включения запаздывающего звена, характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$D_\tau(s) = Q(s)+R(s)e^{-s\tau} = 0. \qquad (7.6)$$

Раскладывая показательную функцию в ряд Тейлора, получим

$$e^{-s\tau} = 1 - s\tau + \frac{s^2\tau^2}{2!} - \frac{s^3\tau^3}{3!} + \ldots.$$

Тогда (7.6) можно рассматривать как уравнение «бесконечной степени», имеющее бесконечное число корней. Для устойчивости системы необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения (7.6) были левыми. Очевидно, что алгебраические критерии Рауса и Гурвица для исследования устойчивости систем с запаздыванием непригодны. Для этого можно использовать только частотные критерии Михайлова и Найквиста либо метод Д-разбиения.

Использование критерия Михайлова нецелесообразно ввиду сложности построения. Поэтому рекомендуется применять критерий Найквиста: устойчивость замкнутой системы с запаздыванием определяется по поведению АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием относительно точки (-1,j0). Подставляя s = jω в (7.3), получим АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\omega\tau} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}e^{-j\omega\tau} = A(\omega)e^{j\psi_\tau(\omega)}, \qquad (7.7)$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$ - амплитудно-частотная характеристика АЧХ;

$\psi(\omega)$ = arctg (V/U) – фазо-частотная характеристика ФЧХ разомкнутой системы без запаздывания;

$$\psi_\tau(\omega) = \psi(\omega) - \omega_\tau \qquad (7.8)$$

ФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием.

Из (7.7) и (7.8) видно, что наличие запаздывающего звена не меняет модуль $A(\omega)$ АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$, а вносит лишь дополнительный фазовый сдвиг ω_τ , пропорциональный частоте, при чем коэффициентом пропорциональности является время запаздывания τ.

Для построения АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием нужно каждый модуль $A(\omega_i)$ вектора АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы без запаздывания повернуть на угол $\omega i\tau$ по часовой стрелке. С ростом частоты ω угол ω_τ будет быстро расти, а модуль $A(\omega)$ обычно уменьшается. Поэтому АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием имеет вид спирали, закручивающейся вокруг начала координат (рисунок 7.4).

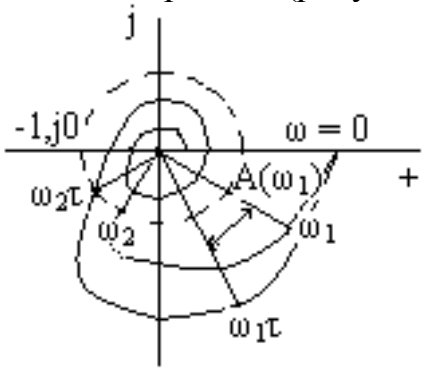


Рисунок 7.4 – Построение АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием

На границе устойчивости АФЧХ $W\tau(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием будет проходить через точку (-1,j0). Время запаздывания τкр и соответствующее ему значение частоты ωкр , при которых $W\tau(j\omega)$ проходит через точку (-1,j0) называют критическими. Для критического случая справедливо следующее условие:

$$W_\tau(j\omega_{кр}) = W(j\omega_{кр})e^{-j\omega_{др}\tau_{др}} = A(\omega_{кр})e^{j[\psi(\omega_{кр})-\omega_{др}\tau_{др}]} = -1. \qquad (7.9)$$

Условие (7.9) можно записать раздельно для амплитуд и фаз:

$$A(\omega_{kp}) = |W\tau(j\omega_{kp})| = 1; \qquad (7.10)$$

$$\psi_\tau(\omega_{kp}) = \psi(\omega_{kp}) - \omega_{kp}\tau_{kp} = -\pi(2i + 1), \qquad (7.11)$$

где i = 0,1,2,3 ….

Из (7.10) можно найти ω_{kp} , а затем из (7.11) найти $\tau_{кр}$, т.е.

$$\tau_{кр} = \frac{\psi(\omega_{кр}) + \pi(2i+1)}{\omega_{кр}} = \frac{\pi + \psi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}} + \frac{2\pi}{\omega_{кр}} i. \qquad (7.12)$$

Для систем с запаздыванием основное значение имеет Min критическое время запаздывания (при i = 0), которое является в то же время и граничным

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \psi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}} = \frac{\pi + arctg\dfrac{V(\omega_{кр})}{U(\omega_{кр})}}{\omega_{кр}} = \frac{\varphi(\omega_{кр})}{\omega_{кр}}, \qquad (7.13)$$

где $\varphi(\omega_{kp}) = \pi + \text{arctg}[V(\omega_{kp})/U(\omega_{kp})]$ – запас устойчивости по фазе.

8 Лекция №8. Цифровые системы управления

Цель лекции: изучение терминов и определений, классификации цифровых систем управления, правил и теорем о z-преобразовании и определение передаточной функции замкнутой цифровой системы.

8.1 Основные положения и определения

Система называется цифровой, если в контуре имеется хотя бы один цифровой элемент.

Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) это модуляция, при которой амплитуда импульса модулированного сигнала У пропорциональна величине информационного сигнала Х, подаваемого на вход модулятора.

Существует 2 вида АИМ: первого и второго рода. В АИМ 1-го рода амплитуда модулированного сигнала в течение длительности импульса τ повторяет информационный сигнал Х. При АИМ 2-го рода амплитуда импульса в течение длительности импульса τ постоянна. Например, в АЦП используется АИМ 2-го рода.

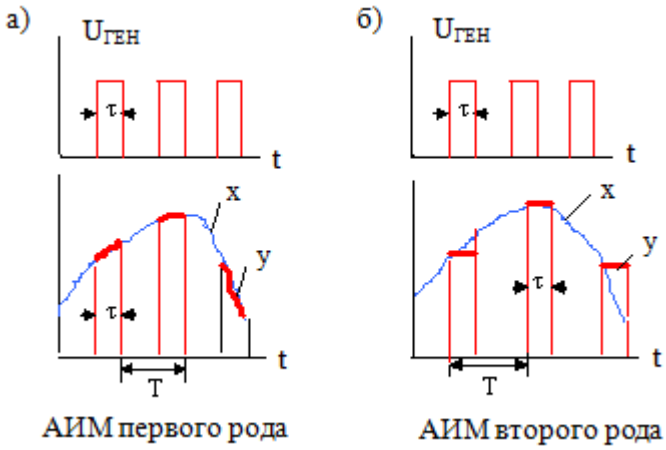


Рисунок 8.1 – Виды АИМ

В АЦП преобразование происходит в 2 этапа: дискретизация по времени с периодом Т и квантование по уровню аналогового сигнала.

Поэтому блок АЦП можно представить в виде 2-х элементов: импульсного элемента, осуществляющего дискретизацию по времени и формирователя импульсов, выполняющий квантование по уровню (рисунок 8.2,а). Цифровая система (ЦС), содержащее АЦП, приведена на рисунке 8.2,б.

При увеличении разрядности АЦП (числа квантований) ошибка между значением цифрового сигнала и аналогового уменьшается.

$f(t) = f[Tn] = f[n]$ - решетчатая функция. Например, $f(t) = e^{-\alpha t}$, $f[n] = e^{-\alpha n}$.

$\Delta y[n] = y[n] - y[n-1]$ - разностное уравнение 1-го порядка.

$\Delta^2 y[n] = \Delta y[n] - \Delta y[n-1] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]$ - разностное уравнение 2-го порядка.

$\Delta^k y[n] = \Delta^{(k-1)} y[n] - \Delta^{(k-1)} y[n-1]$ - разностное уравнение k-го порядка.

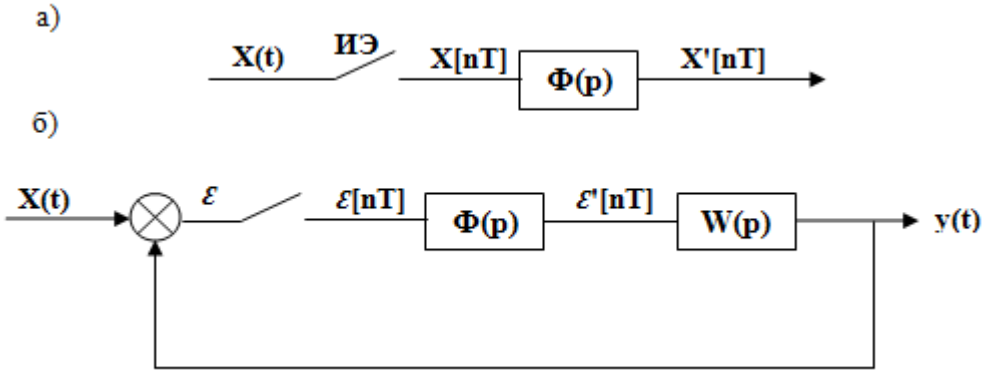


Рисунок 8.2 – Структурная схема ЦС с АЦП

8.2 Z-преобразование

Для описания ЦС используется z-преобразование. Для этого необходимо перейти из области t в область p, а затем в область Z.

Преобразование Лапласа имеет вид

$$x(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt. \tag{8.1}$$

Приближенно интеграл можно представить в виде суммы

$$x^*(p) = T \sum_0^\infty x[nT] e^{-pTn}. \tag{8.2}$$

Примем $e^{pT} = z$, тогда

$$x^*(p) = T \sum_0^\infty x[nT] z^{-n} \quad \text{или} \quad x(z) = \sum_0^\infty x[nT] z^{-n}. \tag{8.3}$$

8.3 Теоремы Z- преобразования

1) Суммирование и вычитание. Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют z-преобразование, то

$$z[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) + F_2(z).$$

2) Умножение на константу. Если f(t) имеет z- преобразование F(z), то

$$Z[a \cdot f(t)] = a \cdot Z[f(t)] = a \cdot F(z).$$

3) Сдвиг во временной области. Если f(t) имеет z- преобразование F(z), то

$$z[f(t-nT)] = z^{-n} * F(z).$$

Пример 4. Найти z- преобразование единичной ступенчатой функции 1(t) при задержке ее на один период квантования Т.

$$Z[1(t-T)] = z^{-1} \cdot Z[1(t)] = z^{-1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}.$$

4) Об умножении оригинала на экспоненту (смещение в области изображений). Если f(t) имеет изображение f(z), то

$$Z[e^{\pm\alpha t} f(t)] = [F(p \pm \alpha)] = F(z \cdot e^{\pm\alpha t}).$$

5) Теорема о начальном значении. Если f(t) имеет z- преобразование F(z) и если существует предел $\lim_{z\to\infty} F(z)$, то

$$\lim_{n\to 0} f(nT) = \lim_{z\to\infty} F(z).$$

Из теоремы следует, что значение дискретного сигнала f(t) при t=0 определяется значением F(z) при z = ∞.

6) Теорема о конечном значении.

Если f(t) имеет z-преобразование F(z) и если функция $(1\text{-}z^{-1})F(z)$ не имеет полюсов на окружности единичного радиуса $|z| = 1$или вне ее, то

$$\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z).$$

8.3.1 Обратное z- преобразование.

Преобразование Лапласа и его обратное преобразование для непрерывных функций является однозначным. Для z-преобразования обратное z-преобразование не является однозначным. Корректный результат обратного z-преобразования функции F(z) есть f(nT), который равен f(t) только в моменты t = nT.

Рисунок 8.3 иллюстрирует тот факт, что для z-преобразования единичной ступенчатой функции, которое равно z/(z - 1) и соответствует последовательности единичных импульсов. Обратное z-преобразование может быть любой функцией, значения которой равны единицы в моменты t=0,T,2T. Неоднозначность обратного z-преобразования является одним из ограничений этого метода.

Обратное z-преобразование осуществляет переход от z-изображения к решетчатой функции и обозначается как

$$f(kT) = Z^{-1}[F(z)].$$

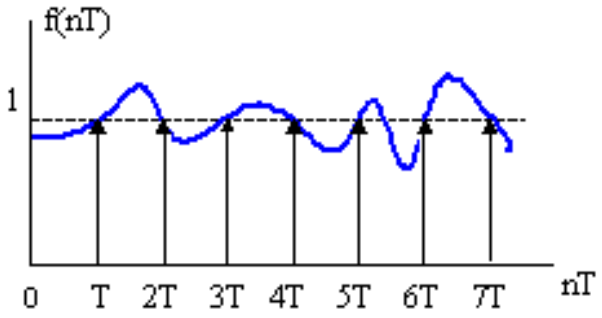


Рисунок 8.3 – Решетчатая функция ЦС

Обратное z-преобразование может быть определено методом разложения на простые дроби. Этот метод близок к методу разложения на простые дроби в преобразовании Лапласа. При анализе непрерывных систем обратное преобразование Лапласа F(p) может быть получено разложением в виде

$$F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \frac{C}{p+c}, \qquad (8.4)$$

где a, в, c – отрицательные полюсы F(p);
A, B, C – вычеты F(p) в этих полюсах.
Тогда можно осуществить переход к оригиналу

$$f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct}. \qquad (8.5)$$

Для случая z-преобразования F(z) не надо представлять в форме (8.4), поскольку обратное z-преобразование для выражений типа A/(z + a) отсутствует. Вместе с тем видно, что обратное z-преобразование функции $Az/(z - e^{-at})$ равно Ae^{-anT}.

Следовательно, удобнее разложить на простые дроби функцию F(z)/z. После разложения обе части выражения для F(z)/z умножают на z для получения F(z).

8.4 ПФ цифровой системы с фиксатором нулевого порядка

В отличие от предыдущего случая последовательность импульсов после импульсного элемента преобразуется формирующим элементом в ступенчатые сигналы с амплитудой, изменяющейся в моменты nT, в зависимости от значений поступающих импульсов. Такой формирующий элемент называется фиксатором нулевого порядка. Он может быть применен для моделирования операции фиксации в устройстве выборки и хранения. В этом случае

$$f_n(t) = f[nT]. \qquad (8.6)$$

Это выражение определяет импульсную переходную функцию фиксатора нулевого порядка, входной и выходной сигналы которого представлены на рисунке 8.4.

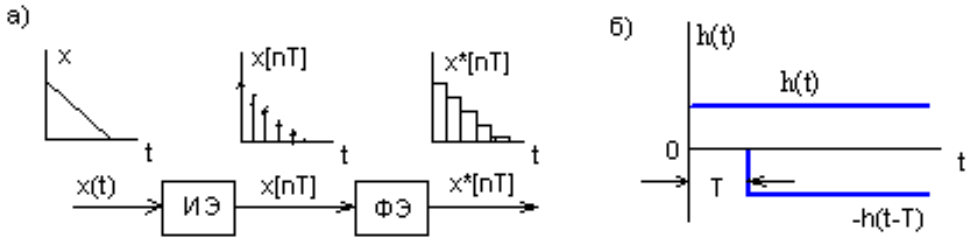


Рисунок 8.4 – Реакция фиксатора нулевого порядка на импульсное воздействие

Выходной сигнал фиксатора нулевого порядка является ступенчатой аппроксимацией непрерывного сигнала, и увеличение частоты квантования приведет к увеличению точности. Сигнал на выходе фиксатора нулевого порядка может быть смоделирован 2-мя сигналами h(t) и h(t - T) (рисунок 8.5,б).

Реакция фиксатора нулевого порядка на импульсное воздействие описывается как

$$g_h(t) = h(t) - h(t-T), \tag{8.7}$$

где h(t) – единичная ступенчатая функция.

Тогда ПФ фиксатора нулевого порядка

$$W_h(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-Tp} = \frac{1-e^{-Tp}}{p}. \tag{8.8}$$

Тогда z-преобразование W(p) есть

$$W_h(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p}\right] = ((1-z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{p}\right] = 1. \tag{8.9}$$

Этот результат очевиден, т.к. фиксатор нулевого порядка в течение периода квантования удерживает постоянным дискретный сигнал. На практике за фиксатором нулевого порядка следует непрерывная часть системы (рисунок 8.5).

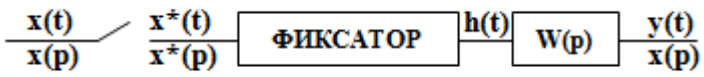


Рисунок 8.5 – Система с фиксатором нулевого порядка

Z-преобразование выходного сигнала системы в этом случае

$$y(z) = W_1(z) \cdot x(z), \tag{8.10}$$

где $W_1(z) = Z[W_h(p) \cdot W(p)]$.

Подставляя ПФ (8.8) в (8.10), получим

$$W_1(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p} \cdot W(p)\right] = (1-z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{W(p)}{p}\right]. \tag{8.11}$$

Следовательно, определение ПФ разомкнутой дискретной системы с фиксатором нулевого порядка сводится к отысканию передаточной функции непрерывной части [W(p)/p], переходу от нее к z-изображению и умножению полученного результата на $(1 - z^{-1})$.

8.4.1 Последовательное соединение звеньев дискретной системы.

На рисунке 8.6 показана дискретная система с последовательно соединенными звеньями $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Два звена разделены квантователем S_2, который синхронизирован и идентичен S_1.

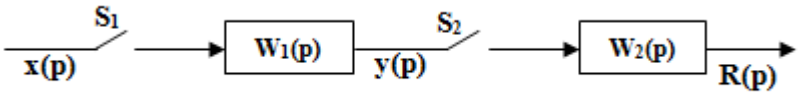


Рисунок 8.6 – Последовательное соединение звеньев дискретной системы, разделенных квантователем

Сигналы на выходе звеньев равны

$$y(z) = W_1(z) \cdot x(z),$$
$$R(z) = W_2(z) \cdot y(z).$$

Тогда

$$R(z) = W_1(z) \cdot W_2(z) \cdot x(z). \tag{8.9}$$

Таким образом, импульсная ПФ двух линейных звеньев, разделенных квантователем, равна произведению импульсных ПФ этих звеньев.

Когда два звена соединены последовательно, но не разделены квантователем, как показано на рисунке 8.7, импульсная ПФ всей системы должна быть записана в виде

$$Z[W_1(p) \cdot W_2(p)] = W_1 \cdot W_2(z). \tag{8.10}$$

Следует отметить, что в общем виде

$$W_1 \cdot W_2(z) \neq W_1(z) \cdot W_2(z).$$

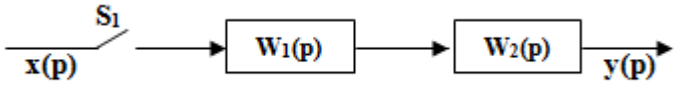


Рисунок 8.7 – Последовательное соединение звеньев
с квантователем на входе

Таким образом, необходимо сначала получить ПФ результирующей системы (произведение ПФ звеньев) и только затем найти от произведения z-преобразование всей системы.

8.4.2 ПФ замкнутой цифровой системы.

Рассмотрим цифровую систему, представленную на рисунке 8.8.

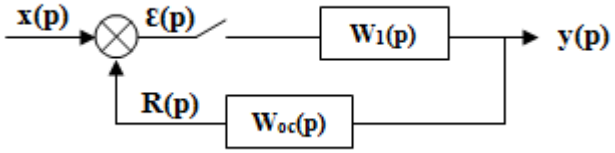


Рисунок 8.8 – Схема замкнутой цифровой системы

Предположим, что ПФ звеньев разомкнутой системы известны. Тогда по аналогии с непрерывными системами получим ПФ замкнутой импульсной системы

$$y(z) = W_1(z) \cdot \varepsilon(z) = W_1(z) \cdot \big(x(z) - R(z)\big) = W_1(z) \cdot \big(x(z) - Z\big[W_1(p) \cdot W_{oc}(p)\big] \cdot \varepsilon(z)\big). \quad (8.11)$$

Преобразуя (8.11), получим

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + Z[W_1(p) W_{oc}(p)]}. \quad (8.12)$$

9 Лекция №9. Критерий устойчивости Шура-Кона

Цель лекции: изучение условий и критерия устойчивости цифровой системы, включая и систему с запаздыванием.

9.1 Условие устойчивости цифровой системы

Как и в непрерывных системах, общее решение разностного уравнения импульсной системы можно представить в виде частного решения уравнения с правой частью и общего решения без правой части.

$$x[nT] = x_B[nT] + x_0[nT]. \quad (9.1)$$

Составляющая $x_B[nT]$ описывает вынужденное движение системы, а $x_0[nT]$ – переходное движение. Об устойчивости движения системы можно судить по составляющей x[nT], определяемой из решения однородного уравнения.

Проектирование непрерывных систем часто основывается на анализе расположения нулей и полюсов ПФ системы на P-плоскости. Если при этом все полюсы ПФ замкнутой системы, т.е. корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости корней P, то система устойчива. Границей устойчивости является мнимая ось (рисунок 9.1).

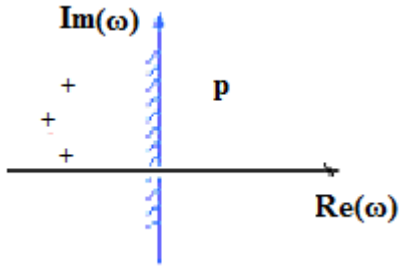


Рисунок 9.1 – Корни на плоскости P для устойчивой системы

Уравнение для замкнутой импульсной системы в z-изображении позволяет получить характеристическое уравнение и, если его корни z_1, z_2 …z_n, например, действительны, то решение характеристического уравнения можно записать в виде

$$x_0[nT] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + ... + C_m z_m^n, \quad (9.2)$$

где C_1, C_2 …C_m – постоянные коэффициенты, определяемые из начальных условий.

Система будет устойчива, если при t→∞ или n→∞ сигнал x стремится к нулю, т.е.

$$Lim_{n\to\infty} x_0[nT] = 0. \quad (9.3)$$

В свою очередь, это условие выполнимо, если все корни z_1, z_2, ..z_m по модулю не превосходят единицы.

Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости цифровой системы является соблюдение неравенства

$$|z_m| < 1. \quad (9.4)$$

Подставляя p=jω в $z = e^{pT}$, получим $z = ej^{\omega T}$. При изменении ω от 0 до 2π/T переменная z описывает в Z-плоскости окружность единичного радиуса.

При дальнейшем увеличении ω от 2π/T до 4π/T переменная повторно описывает окружность. Следовательно, отрезок мнимой оси в P-плоскости, являющимся границей устойчивости, отражается в единичную окружность в Z-плоскости с центром в начале координат (рисунок 9.2).

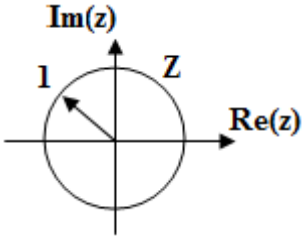


Рисунок 9.2 – Отображение границы устойчивости на Z-плоскости

Левой P-полуплоскости соответствует на плоскости корней Z внутренняя поверхность круга единичного радиуса. Точки же правой половины P-плоскости отображаются в область вне единичного круга на z-плоскости.

Определение устойчивости линейной цифровой системы по расположению корней является сложной задачей при высоком порядке характеристического уравнения. Критерии устойчивости освобождают вычисление корней и устанавливают соотношения для определения устойчивости, вытекающие из основного неравенства корней $|z_m| < 1$.

9.2 Алгебраический критерий устойчивости Шура-Кона

Рассмотрим способ применения критерия Гурвица для исследования корней характеристического уравнения.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_0 = 0. \qquad (9.6)$$

Критерий Гурвица позволяет оценивать расположение корней характеристического уравнения многочлена относительно мнимой оси переменной p. Для определения же устойчивости в z-изображении требуется определить расположение корней относительно окружности единичного радиуса (рисунок 9.3).

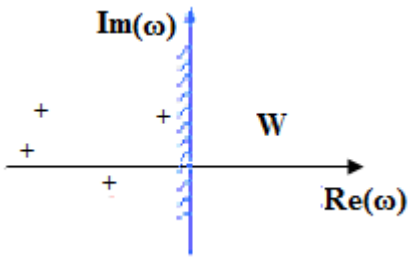


Рисунок 9.3 - Отображение границы устойчивости на W-плоскости

Следовательно, необходимо сделать преобразование окружности таким образом, чтобы единичная окружность превратилась бы в мнимую ось, а внутренность единичного круга отобразилась на левую полуплоскость Re<0. Такое отображение выполняется билинейным преобразованием

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \tag{9.7}$$

Заменив переменную в (9.6), получим

$$a_n\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} \ldots\ldots a_0 = \frac{D(w)}{(1-w)^k}, \tag{9.8}$$

где D(w) – многочлен степени n от новой переменной w, причем

$$D(w) = b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \ldots + b_0. \tag{9.9}$$

Для того, чтобы корни многочлена D(w) имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительными.

Рассмотрим для примера систему второго порядка n=2. Характеристическое уравнение для n=2 с учетом (9.9)

$$a_2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_0 = \frac{a_2(1+w)^2 + a_1(1+w)(1-w) + a_0(1-w)^2}{(1-w)^2} =$$

$$= \frac{(a_2 + a_0 - a_1)w^2 + (2a_2 - 2a_1)w + (a_2 + a_1 + a_0)}{(1-w)^2} = \frac{b_2 w^2 + b_1 w + b_0}{(1-w)^2},$$

где $b_2 = a_2 + a_0 - a_1;\ b_1 = 2a_2 - 2a_1;\ b_0 = a_2 + a_1 + a_0.$

Для систем второго порядка определители Гурвица будут положительными, если коэффициенты многочлена D(w) будут положительны, т.е. $b_2 \rangle 0, b_1 \rangle 0, b_0 \rangle 0$. Система будет устойчива, если

$$\begin{aligned} &a_2 + a_0 - a_1 > 0, \\ &2a_2 - 2a_0 > 0 \quad или \quad a_2 > a_0, \\ &a_2 + a_1 + a_0 > 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Условия (9.10) для систем 2-го порядка называются алгебраическим критерием Шура-Кона.

В отличие от непрерывной системы цифровая система 1-го порядка может быть неустойчивой. Устойчивость системы зависит от периода квантования Т.

9.3 Анализ устойчивости ЦС со звеном чистого запаздывания

Цифровую систему с управлением от микроконтроллера (МК) можно рассчитать на устойчивость 2-м способом: путем замены микроконтроллера звеном чистого запаздывания $e^{-\tau p}$.

На рисунке 9.4,а приведена структурная схема системы на базе микроконтроллера, а на рисунке 9.4,б с заменой звеном запаздывания с τ=0,01с и заданными параметрами.

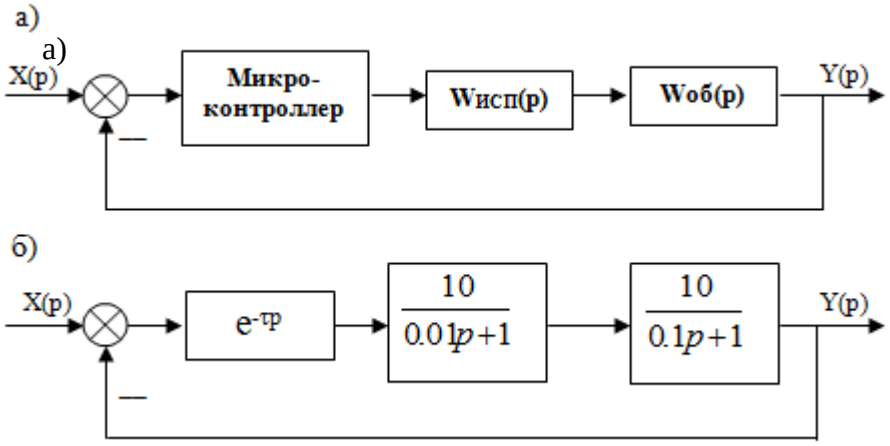


Рисунок 9.4 – Структурная схема системы с управлением от МК

Для анализа устойчивости по критерию Найквиста с помощью ЛАЧХ и ФЧХ определим частоты сопряжения:

$$\omega_{\tilde{N}_1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0{,}1} = 10c^{-1}, \quad \omega_{C_2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0{,}01} = 100c^{-1}.$$

Логарифмический комплексный коэффициент передачи равен

$$L(\omega) = 20\lg 100 - 20\lg\sqrt{1+0{,}0001\omega^2} - 20\sqrt{1+0{,}01\omega^2}.$$

ФЧХ с учетом τ = 0,01с системы равна

$$\varphi(\omega) = -arctg0{,}01\omega - arctg0{,}1\omega - \omega\tau = -arctg0.01\omega - arctg0{,}1\omega - 0{,}01\omega.$$

Из ЛАЧХ получена частота среза $\omega_{ср}$ = 400с$^{-1}$ и критическая частота $\omega_{кр}$ = 100с$^{-1}$. Угол наклона ФЧХ звена запаздывания при частоте среза $\varphi_\tau(400)$ = 400 · 0,01 = 4 рад = 230^o.

Согласно критерию Найквиста $\omega_{кр} < \omega_{ср}$, следовательно, система неустойчива. При уменьшении времени запаздывания τ уменьшается шаг квантования и ,соответственно, ошибка оцифровки.

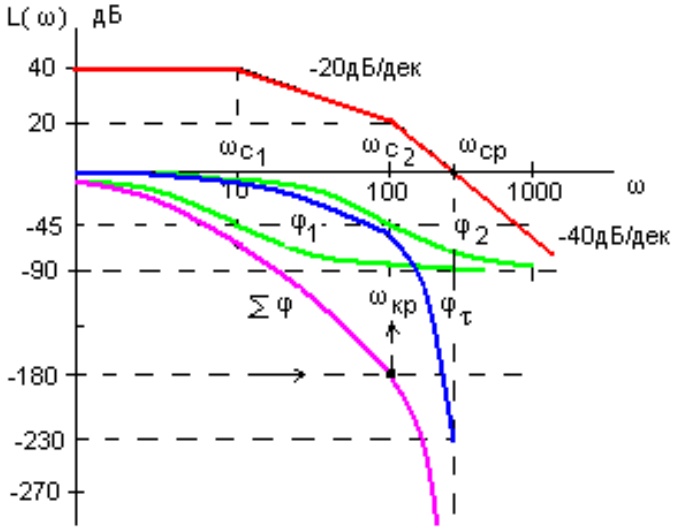


Рисунок 9.5 – ЛАЧХ и ЛФЧХ системы с МК

Таким образом, использование модели звена чистого запаздывания вместо микроконтроллера дает наименьшую ошибку в том случае, если время запаздывания значительно меньше частоты среза $\tau << \omega_{ср}$.

10 Лекция №10. Анализ ЦС в частотной области

Цель лекции: изучение билинейного преобразования, методов построения логарифмических частотных характеристик.

В линейных цифровых системах квантователь (АЦП или микроконтроллер) действует как генератор высокочастотных гармоник, которые затрудняют построение частотных характеристик.

Исследование ЦС в частотной области можно осуществить с использованием годографа Найквиста или ЛАЧХ.

Построив Годограф Найквиста для ПФ разомкнутой системы W(z) и исследовав его положение относительно (-1,j0), можно судить об устойчивости замкнутой.

ЛАЧХ являются графическим представлением амплитуды в дБ и фазового угла разомкнутой системы в зависимости от частоты ω.

10.1 Метод билинейного преобразования

Для построения частотных характеристик ЦС можно воспользоваться билинейным преобразованием

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \qquad (10.1)$$

Из данного соотношения

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \qquad (10.2)$$

Подставив в (10.2) значение $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$, получим

$$w = \frac{e^{jwT}-1}{e^{jwT}+1} = \frac{\frac{e^{j\omega T/2}}{e^{-jwT/2}}-1}{\frac{e^{jwT/2}}{e^{-jwT/2}}+1} = \frac{e^{jwT/2}-e^{-jwT/2}}{e^{jwT/2}+e^{-jwT/2}} = jtg(\frac{\omega T}{2}). \qquad (10.3)$$

Таким образом, единичная окружность на Z-плоскости отображается на мнимую ось комплексной W-плоскости. Область внутри единичной окружности на Z-плоскости соответствует левой половине W-плоскости, а положительное направление мнимой оси соответствует диапазону частот $0<\omega< \omega_s$.

Пусть комплексная переменная w имеет вид

$$w = \sigma + j\bar{\lambda}. \qquad (10.4)$$

Тогда из (10.3) получим

$$\bar{\lambda} = tg\left[\frac{\omega T}{2}\right], \qquad (10.5)$$

которое устанавливает связь между частотой w и псевдочастотой $\bar{\lambda}$. При малых значениях ωT/2 можно считать, что

$$\bar{\lambda} = tg\left[\frac{\omega T}{2}\right] \approx \frac{\omega T}{2}. \qquad (10.6)$$

Поэтому при малых значениях ωT/2 величину псевдочастоты можно заменит просто частотой, для чего вводится абсолютная псевдочастота λ. Из (10.6) получаем

$$\frac{2}{T}\bar{\lambda} = \omega = \lambda. \qquad (10.7)$$

Следовательно, $\bar{\lambda} = \left(\frac{T}{2}\right)\cdot\lambda$ и получаем связь между w и абсолютной псевдочастотой λ, учитывая (10.6).

$$w = j\frac{T}{2}\lambda. \qquad (10.8)$$

10.2 Логарифмические частотные характеристики ЦС

С помощью билинейного преобразования ПФ приводится к такому виду, что построение ЛАЧХ разомкнутой ЦС не встречает затруднений.

Пример 1. ПФ непрерывной части разомкнутой ЦС имеет вид

$$W(p)=\frac{K(1+T_1p)}{p^2}.$$

В системе имеется фиксатор нулевого порядка. Ключ с фиксатором установлен перед непрерывной частью. Построить ЛАЧХ и ФЧХ.

Преобразуем ПФ к виду

$$W(p)=\frac{K}{p^2}+\frac{KT_1}{p}=W_1(p)+W_2(p).$$

Найдем z-преобразование для $W_1(p)$ и $W_2(p)$.

$$W_1(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{K}{p\cdot p^2}\right]=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{T^2z(z+1)K}{2(z-1)^3}=\frac{KT^2(z+1)}{2(z-1)^2},$$

$$W_2(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{KT_1}{p\cdot p}\right]=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{Tz\cdot KT_1}{(z-1)^2}=\frac{KT\cdot T_1}{z-1}.$$

Тогда

$$W(z)=W_1(z)+W_2(z)=\frac{KT^2}{2}\left[\frac{(z+1)+\frac{T_1}{T}2(z-1)}{(z-1)^2}\right]=\frac{KT^2}{2}\left[\frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+2\frac{T_1}{T}}{z-1}\right]. \quad (10.9)$$

Найдем ПФ в w-преобразовании, поставив вместо z (10.1).

$$W(w)=\frac{KT^2}{4}\left[\frac{\left(\frac{1}{w}+\frac{2T_1}{T}\right)(1-w)}{w}\right]=\frac{KT^2}{4}\left[\frac{\left(1+w\frac{2T_1}{T}\right)(1-w)}{w^2}\right],$$

где $\frac{1-w}{w}=\frac{2}{z-1}$.

Используя (10.8), получим частотную передаточную функцию

$$W(j\lambda)=\frac{KT^2}{4}\left[\frac{\left(1+j\frac{T}{2}\cdot\frac{2T_1}{T}\lambda\right)\left(1-j\frac{T}{2}\lambda\right)}{(j\lambda)^2\cdot\frac{T^2}{4}}\right]=\frac{K(1+jT\lambda)\left(1-j\frac{T}{2}\lambda\right)}{(j\lambda)^2}. \quad (10.10)$$

Модуль W(jλ) равен

$$|W(j\lambda)| = A(\lambda) = \frac{K\sqrt{1+T_1^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{T^2}{4}\right)\lambda^2}}{\lambda^2}. \qquad (10.11)$$

Фазочастотная характеристика

$$\varphi(\lambda) = -180^0 + arctgT_1\lambda - arctg\frac{T}{2}\lambda. \qquad (10.12)$$

ЛАЧХ и ФЧХ строятся по тем же правилам, что и для непрерывных систем (рисунок 10.1). Амплитудная характеристика члена $(1-j\frac{T}{2}\lambda)$, входящего в числитель (10.10) и представляющего собой неминимально-фазовое звено, совпадает с форсирующим звеном. При этом ЛАЧХ этого звена представляет амплитуду с нулевым наклоном при малых значениях λ и прямую линию с наклоном +20дБ/дек при больших λ. Эти две линии пересекаются при λ = 2/T. ФЧХ этого звена совпадает с характеристикой инерционного звена и создает на частоте λ = 2/T фазовый сдвиг -45^0.

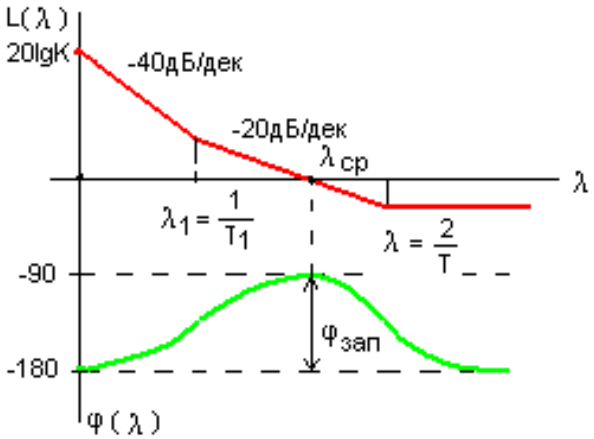


Рисунок 10.1 – ЛАЧХ и ФЧХ цифровой системы

Если сравнить заданную ПФ непрерывной системы с ПФ цифровой (10.10), то видно, что они совпадают до множителя (1-j(T/2)λ). Таким образом, в области низких частот характеристики цифровой системы совпадают с частотными характеристиками непрерывной части.

Порядок получения ПФ линейной цифровой системы следующий:

а) получить ПФ непрерывной части разомкнутой цифровой системы W(p);

б) переход к псевдочастоте, заменяя ω на λ и умножая полученное выражение на величину (1-j(T/2)λ).

ЛАЧХ и ФЧХ, полученные таким образом, справедливы для частот, меньших 2/T.

10.3 Особенности построения ЛАЧХ в высокочастотной области

В ВЧ-области при ω>2/T ЛАЧХ непрерывной части могут иметь несколько вариантов (рисунок 10.2). Линия со штриховкой разделяет ВЧ и НЧ области. Характеристики отличаются тем, какой наклон имеют ЛАЧХ на частоте 2/T. Эти ЛАЧХ аппроксимируют одним из следующих выражений.

В первом случае (рисунок 10.2,а)

$$W_{B1}(p) = \frac{\omega_B}{p(1+T_{q+1}p)...(1+T_n p)}, \qquad (10.13)$$

где T_{q+1}, …T_n – постоянные времени, сопрягающие частоты которых больше частоты 2/T;

ω_B – коэффициент передачи высокочастотной части, определяемый частотой пересечения первой асимптоты высокочастотной частью ЛАЧХ с осью нуля децибел (может совпадать с частотой среза $\omega_{ср}$).

Во втором случае (рисунок 10.2,б)

$$W_{B2}(p) = \frac{\omega_B^2}{p^2(1+T_{q+1}p)...(1+T_n p)}. \qquad (10.14)$$

В третьем случае (рисунок 10.2,в)

$$W_{B3}(p) = \frac{\omega_B^3}{p^3}. \qquad (10.15)$$

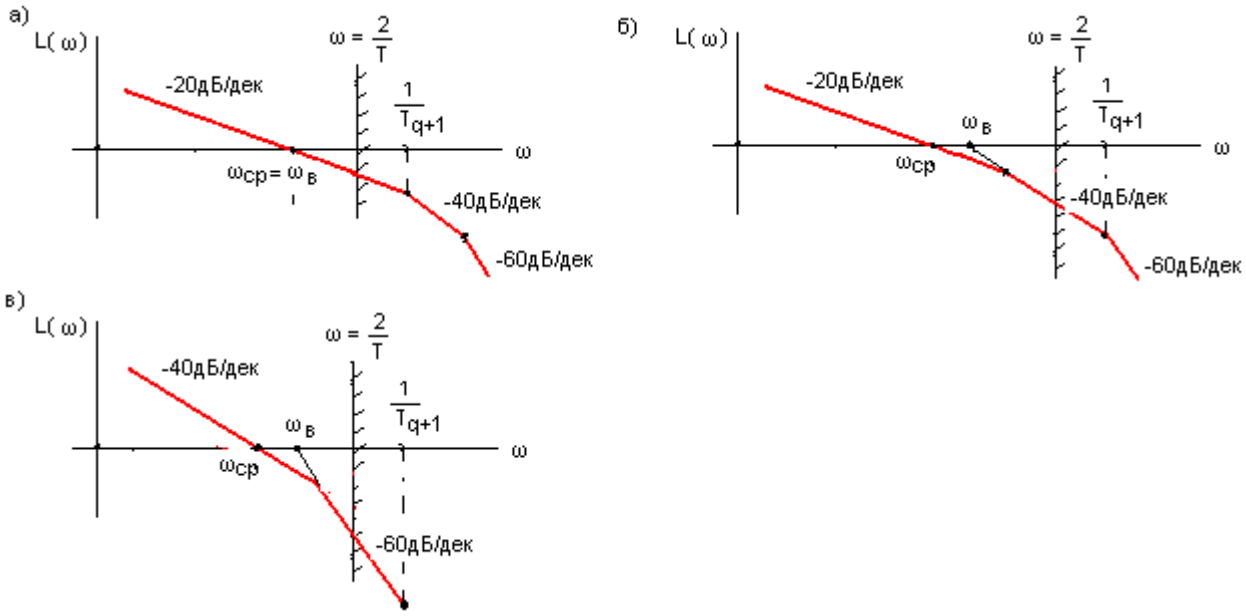


Рисунок 10.2 – ЛАЧХ в ВЧ области

На основании таблицы z-преобразования и используя постановку псевдочастоты jλ, получим для ЛАЧХ в НЧ диапазоне

$$W_{B1}(j\lambda)=\frac{\omega_B\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{j\lambda\left(1+j\frac{T}{2}\right)}, \qquad (10.16)$$

где $T_\Sigma = \sum_{i=q+1}^{n} T_i$.

Выражение (10.16) может использоваться для построения ЛАЧХ, причем модуль равен

$$\left|W_{B1}(j\lambda)\right|=\frac{\omega_{cp}\sqrt{1+\lambda^2\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)^2}}{\lambda}. \qquad (10.17)$$

Таким образом, при построении ВЧ «хвоста» приходится учитывать T_Σ и дополнительный множитель (1-jλ/2).

Для 2-го варианта (рисунок 10.2,б) получим

$$W_{B2}(j\lambda)=\frac{\omega_B^2\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left(1-j\lambda T_\Sigma\right)}{(j\lambda)^2}. \qquad (10.18)$$

Для 3-го варианта (рис.10.2,в) получим

$$W_{B3}(j\lambda)=\frac{\omega_B^3\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)\left(1+j\lambda\frac{T}{2\sqrt{3}}\right)\left(1-j\lambda\frac{T}{2\sqrt{3}}\right)}{(j\lambda)^3}. \qquad (10.19)$$

Выражения (10.16, 18,19) используются для построения ЛАЧХ и ФЧХ в высокочастотной части. На частоте $\lambda=\frac{2}{T}$ происходит сопряжение НЧ и ВЧ характеристик, например, для рисунка 10.2,б изменение ЛАЧХ при учете высокочастотной части представлено на рисунке 10.3 пунктиром.

Рисунок 10.3 – Учет дискретизации в ВЧ области

11 Лекция №11. Передаточные функции цифровых регуляторов

Цель лекции: изучение передаточной функции, временных характеристик цифровых П, ПИ и ПИД регуляторов, обоснования выбора АЦП.

11.1 Цифровой регулятор

Физически реализуемая ПФ цифрового регулятора имеет вид

$$W(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+..+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-n}}, \qquad (11.1)$$

где $A_0 \neq 0, B_0 \neq 0 \quad , m < n$;

E(z) – z-преобразования входного и выходного сигналов регулятора.

Определим обратное z-преобразование выражения (11.1)

$$E_2(z)(a_0+a_1z^{-1}+....+a_nz^{-n})=E_1(z)(b_0+b_1z^{-1}+...+b_mz^{-m}),$$

$$a_0e_2^*(t)+\sum_{k=1}^{n}a_ke_2^*(t-kT)=\sum_{k=0}^{m}b_ke_1^*(t-kT). \qquad (11.2)$$

Отсюда

$$e_2^*(t)=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{m}b_ke_1^*(t-kT)-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n}a_ke_2^*(t-kT). \qquad (11.3)$$

Данное выражение показывает, что значение выходного сигнала регулятора зависит от текущего значения входного и предыдущего значения выходного сигналов. Для составления программы вычисления по формуле (11.3) необходимы 2 операции:

– накопление данных в МК – предшествующие значения входного и выходного сигналов;

– арифметические: умножение, сложение и вычитание.

Пример. Дана ПФ цифрового регулятора

$$W(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{5(1+0{,}25z^{-1})}{(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}1z^{-1})}.$$

После перекрестного умножения, получим

$$(1-0{,}6z^{-1}-0{,}05z^{-2})E_2(z)=5(1+0{,}25z^{-1})E_1(z).$$

Обратное z-преобразование равно

$$e_2^*(t)=5e_1^*(t)+1{,}25e_1^*(t-T)+0{,}6e_2^*(t-T)-0{,}05e_1^*(t-2T),$$

где T – период квантования.

Блок-схема программы МК, реализующую ПФ цифрового регулятора, приведена на рисунке 11.1.

Закон автоматического регулирования – это уравнение регулятора, выражающее управляющее воздействие u (выходную величину регулятора) через рассогласование и возмущение (его входные величины).

По закону регулирования регуляторы делятся на:

– пропорциональные или статические регуляторы (П – регуляторы);
– интегральные или астатические регуляторы (И – регуляторы);
– пропорционально-интегральные (ПИ – регуляторы);
– пропорционально–дифференциальные регуляторы (ПД – регуляторы);
– пропорционально–интегрально–дифференциальные (ПИД) регуляторы.

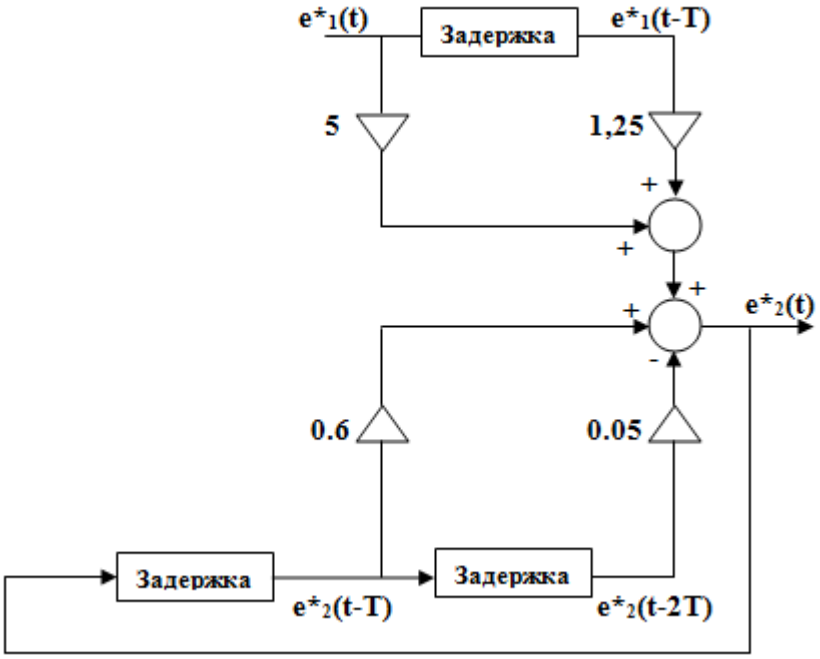


Рисунок 11.1 – Блок-схема программы ЦР

Рисунок 11.2 – Временные характеристики P,I,D-регуляторов

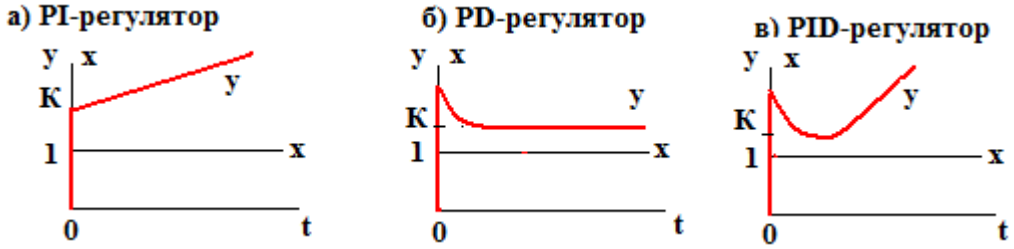


Рисунок 11.3 – Временные характеристики PI, PD и PID-регуляторов

Управляющее воздействие PID-регулятора пропорционально отклонению регулируемого параметра, интегралу и скорости этого отклонения. Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования (ПИД – регулятор):

$$u = K\varepsilon + \frac{1}{T_u}\int \varepsilon\, dt + T_n \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (11.4)$$

Параметрами настройки ПИД – регулятора являются: коэффициент передачи регулятора К, постоянная времени $T_и$ и время предварения $T_п$. ПИД–регуляторы устанавливаются на инерционных объектах со значительным запаздыванием, где недопустимо остаточное отклонение параметра.

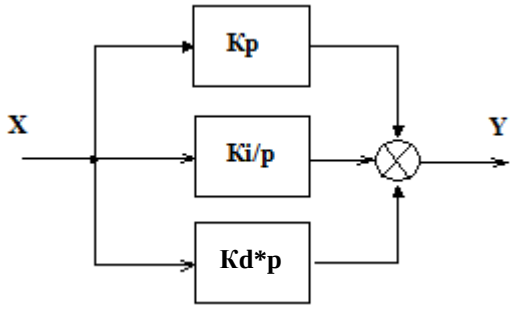


Рисунок 11.4 – Структурная схема ПИД-регулятора

Если получить из (11.4) преобразование Лапласа, а затем z-преобразование, то структурная схема для цифрового ПИД-регулятора примет вид

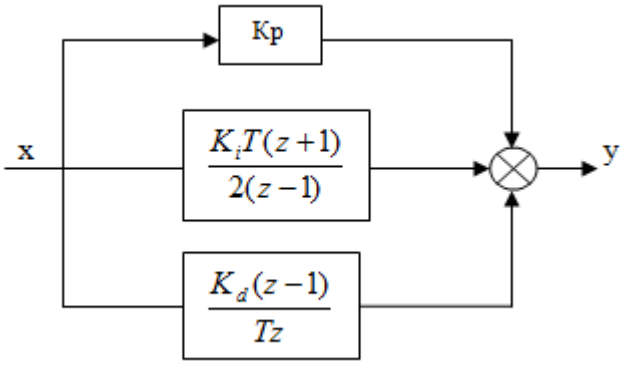


Рисунок 11.5 – Структурная схема цифрового ПИД-регулятора

11.2 Точность АЦП

При реализации САУ возникает ряд вопросов численного характера: какова должна быть погрешность преобразователей (АЦП, ЦАП); с какой точностью должны производиться вычисления. Для ответа на эти вопросы необходимо понимать характер влияния подобных ограничений на качество

управления и устойчивость замкнутой системы. При ответе на эти вопросы ограничимся хотя бы грубыми оценками.

1) Влияние конечной длины слова.

Основными источниками ошибок являются:

– дискретизация в АЦП и ЦАП;

– округление и переполнение при выполнении операций.

АЦП имеют точность 8,10,12 и 14 знаков, что соответствует разрешению (в процентах от максимальной измеряемой величины) 0.4; 0.1; 0.025; 0.006.

Числа представляются различными способами: с фиксированной запятой, с одинарной и двойной точностью; с плавающей запятой с одинарной точностью. Округление и представление чисел с ограниченным количеством разрядов порождает сравнительно небольшие ошибки, в то время как переполнение преобразователей может привести к катастрофическим последствиям. Поэтому следует прежде всего согласовать требуемую длину слова со значениями преобразуемой переменной.

2) Эффекты квантования по уровню.

АЦП осуществляет преобразование по уровню (рисунок 10.6,а). Ошибка квантователя зависит от количества разрядов, а сам квантователь является нелинейным устройством, математическую модель которого можно представить из 2-х элементов: линейного и нелинейного (генератор пилы) (рисунок 11.6,б).

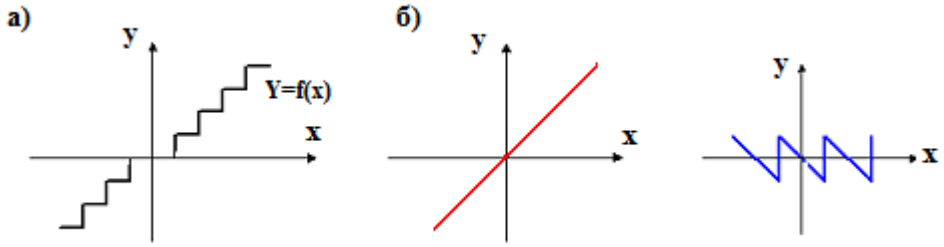


Рисунок 11.6 – Передаточная характеристика АЦП и его мат. модель (б)

Легко заметить, что при суммировании двух сигналов (линейного y=x и пилообразного) получается ступенчатый сигнал на выходе АЦП. Поэтому структурная схема модели АЦП будет иметь вид

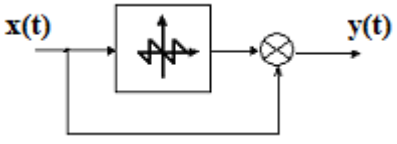


Рисунок 11.7 – Структурная схема АЦП

Следует заметить, что квантование по уровню в замкнутых системах в общем случае может вызвать появление установившейся ошибки и незатухающих колебаний (автоколебаний).

Список литературы

1 Анхимюк В.Л. Теория автоматического управления. - Мн.: Дизайн ПРО, 2002.

2 Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

3 Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления /Под ред. К.А.Пупкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.

4 Олсон Г. Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский диалект, 2001.

5 Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. - СПб: Профессия, 2012.

6 Рутгайзер О.З. Радиоавтоматика: Учебное пособие. – Алматы: АИЭС, 1992.

7 Савин М.М. Теория автоматического управления. - Ростов н/Д: Феникс, 2007.

8 Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского.- М.: Наука, 1987.

Содержание

Введение 3
1 Лекция №1. Основные понятия и принципы управления 3
2 Лекция №2. Передаточные функции систем управления 8
3 Лекция №3. Типовые динамические звенья 12
4 Лекция №4. АФЧХ и ЛАЧХ 19
5 Лекция №5. Алгебраические критерии устойчивости 24
6 Лекция №6. Частотные критерии устойчивости 29
7 Лекция №7. Устойчивость различных линейных систем 33
8 Лекция №8. Цифровые системы управления 38
9 Лекция №9. Критерий устойчивости Шура-Кона 44
10 Лекция №10. Анализ ЦС в частотной области 49
11 Лекция №11. Передаточные функции цифровых регуляторов 55
Список литературы 59

Сводный план 2016 г., поз.269

Бахытжан Сергеевич Байкенов
Зарина Варисовна Абдулина

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов специальности
5В071600 − Приборостроение

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать __.__.____ Формат 60х84 1/16
Тираж 75 экз. Бумага типографская № 1
Обьем 3,7 уч.-изд. л. Заказ_____Цена 1850 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126