Коммерциялық емес акционерлік қоғамы

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

Математика 3

Барлық мамандықтар үшін есептік-графикалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Бөлім 3

Алматы 2011

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАРЫ: Л.Н.Ким, Б.К.Жахаев. Математика 3.
Барлық мамандықтар үшін есептік-графикалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. Бөлім 3.- Алматы: АЭжБУ, 2011.- 28 б.

Есептік-графикалық жұмыстарына арналған методикалық нұсқаулар мен тапсырмалар жұмысы №7 типтік есептеменің толықтырылған және қайта өңделген басылымы. Бұл жұмыстың бағдарламасы 2002 жылғы АЭжБУ-дің күндізгі бөлімінің барлық мамандық студенттеріне арналған жоғары математика курсының екінші семестр бағдарламасына сәйкес келеді. Мұнда бағдарламаның негізгі теориялық сұрақтары, тапсырмалардың нұсқалары және типтік нұсқалардың шешімдері келтірілген. Есептік тапсырмалар қиындығына қарай екі деңгейге бөлінген.

Бұл әдістемелік нұсқаулар барлық мамандықтардың барлық оқу формасындағы бірінші курс студенттеріне арналған.

Кесте. 13, библиогр. атауы - 6.

Пікір беруші: физ.-мат.ғыл.канд., доц. Байсалова М.Ж.

.

Коммерциялық емес акционерлік қоғамы «Алматы энергетика және байланыс университеті» баспасының 2011 жылғы қосымша жоспары бойынша басылуда

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқаулар модуль 3-ке «Қатарлар» Математика 3 тапсырмалар мен типік нұсқалардың шешімдерін ұсынады. Тапсырмалар отыз нұсқадан тұрады. Тапсырмалар нөмірлеріндегі екінші цифр студент нұсқасын көрсетеді.

Сыртқы формада оқитын студенттердің бақылау жұмыстарының нұсқасы, сынақ кітапшасының нөмерін 30-ға бөлгендегі пайда болған қалдық арқылы анықталады. Мысалы: сынақ кітапшасының нөмірі 080612 болсын. Бұл сан мына түрде көрсетіледі: 080612=2687*30+2. Демек, студент №2 нұсқадағы тапсырмаларды орындау керек. Ал, егер қалдық нөлге тең болса, онда студент №30 нұсқадағы тапсырмаларды орындайды.

Бақылау жұмысы жеке дәптерлерге шығарылуы керек, есептің шешімдері қысқа және теориялық сілтемелер жеткілікті түсінікті болу керек. Бақылау жұмыстарын түптеуге осы методикалық нұсқаулардағы типтік нұсқалардың шешімдерін үлгі ретінде алсаңыздар болады.

1 Типтік есептеме 3. Қатарлар

1.1 Теориялық сұрақтар

1 Сандық қатарлар. Қатардың жинақтылығы және қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті шарты.

2 Салыстыру белгілері.

3 Даламбер және Коши белгілері.

4 Жинақтылықтың интегралдық белгісі.

5 Таңбасы ауыспалы қатарлар. Лейбниц теоремасы. Қатар қалдығының бағасы.

6 Таңбасы айнымалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақты қатарлар.

7 Функционалдық қатарлардың жинақтылық облысы. Бірқалыпты жинақтылық ұғымы. Вейерштрасс белгісі.

8 Мүшелеп интегралдау және бірқалыпты жинақты қатарларды дифференциалдау.

9 Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Дәрежелік қатарлардың жинақтылық интервалы мен радиусы.

10 Тейлор қатары. $\sin x, \cos x,\ \ln(1+x), (1+x)^m$ функцияларының x дәрежесі бойынша жіктелуі.

11 Фурье тригонометриялық қатары және оның коэфициенттері. Дирихле теоремасы.

12 Периоды $2l$ болатын функцияның Фурье қатары.

13 Жұп және тақ, периодсыз функцияның Фурье қатары.

1.2 Бірінші дәрежелі есептік тапсырмалар

1 Төмендегі қатарлардың жалпы мүшелерін, n –ші дербес қосындыларын S_n, қатар қалдықтарын r_n және S_3-ті жазыңыздар. Қатарлардың қосындыларын S табыңыздар.

1 кесте

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$	1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$	1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$
1.4 $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$	1.5 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$	1.6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
1.7 $\frac{1}{(n+4)(n+5)}$	1.8 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$	1.9 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$
1.10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$	1.11 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$	1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$
1.13 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$	1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$	1.15 $\frac{1}{(n+7)(n+8)}$
1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$	1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$	1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$
1.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$	1.20 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$	1.21 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
1.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$	1.23 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$	1.24 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$
1.25 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$	1.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$	1.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$
1.28 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$	1.29 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$	1.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

2 Қатар жинақтылығының қажетті шарты орындала ма? Егер орындалса, онда салыстыру белгілерінің көмегімен төмендегі қатарларды жинақтылыққа зерттеңіздер.

2 кесте

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$	2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2-2}$	2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)(n^2+1)}$

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$	2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-2}}{n^3+1}$	2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+4n+2}}$
2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$	2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$	2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^5+5}$
2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$	2.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}$	2.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{4n^3+2n+1}$
2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$	2.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$	2.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2}$
2.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$	2.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3(2-\cos^2 n)}$	2.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+n}$
2.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+1)^2}$	2.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$	2.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2 6n}$
2.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$	2.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$	2.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$
2.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	2.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3(2+\sin^2 n)}$	2.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3n^4+5n-2}$
2.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$	2.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$	2.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$

3 Даламбер белгісінің көмегімен төмендегі қатарларды жинақтылыққа зерттеңіздер.

3 кесте

3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot\sqrt[3]{n}}{3^{n+2}}$	3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}$	3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(2n+1)!}{(3n)!}$
3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n-1)}{n\,!}$	3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)\,!}$	3.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,!}{5^n}$
3.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n\cdot n!}$	3.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)\,!}{10^n}$	3.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\cdot\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$
3.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$	3.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n-7)\,!}$	3.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n\cdot n\,!}$
3.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^2}{n\,!}$	3.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-2}}{n\,!}$	3.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^{n+3}}}$

3.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,!}{\mathrm{n}\cdot 2^{\mathrm{n}}}$	3.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}\cdot n\,!}{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}}$	3.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!\cdot n!}{(2n)!}$
3.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{n\,!}$	3.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,!}{2^{\mathrm{n}}\cdot n^{n}}$	3.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(n+1)!}{(2n)!}$
3.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}\cdot 3^{\frac{n}{2}}}{n\,!}$	3.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)^{\frac{2}{3}}}{(n+1)\,!}$	3.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{3^{\frac{n}{3}}\cdot 10^{n}}$
3.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,!}{2^{\mathrm{n}}}$	3.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(n+1)\,!}$	3.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^{n+1}\cdot 2^{\frac{n}{2}}}$
3.28 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}(n-1)\,!}$	3.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(n-1)\,!}$	3.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{10^{n}}\cdot 2^{n}}{(n+1)!}$

4 Коши радикалдық белгісінің көмегімен төмендегі қатарларды жинақтылыққа зерттеңіздер.

4 кесте

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}$	4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^{n}}$	4.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$
4.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^{n}}$	4.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^{n}}\right)^{3n}$	4.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+3)\right)^{n}}$
4.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$	4.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$	4.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$
4.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$	4.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$	4.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$
4.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$	4.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$	4.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$
4.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^{n}$	4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$	4.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$
4.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{5^{n}}\right)^{n}$	4.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^{3^{n}}}$	4.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$
4.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^{n}}$	4.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$	4.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$

4.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^{2n}}$	4.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \dfrac{1}{3^n}\right)^n$	4.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$
4.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(tg \dfrac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$	4.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$	4.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \dfrac{n+3}{2n+5}\right)^n$

5 Коши интегралдық белгісінің көмегімен төмендегі қатарларды жинақтылыққа зерттеңіздер.

5 кесте

5.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+6)\ln^2 5n}$	5.2 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)\sqrt{\ln^3(n-1)}}$	5.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+3n)\ln^{3/2}(1+3n)}$
5.4 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\ln n}$	5.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln^5(n+1)}}$	5.6 $\sum_{n=4}^{\infty} \dfrac{1}{(n-2)\ln(n-2)}$
5.7 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\ln^3 n}$	5.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\dfrac{n}{2}\sqrt{\ln^3\left(\dfrac{n}{2}\right)}}$	5.9 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\left(\ln \dfrac{n}{2}\right)^{3/2}}$
5.10 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)\ln n}$	5.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+5)\ln(n+5)}$	5.12 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-5)\ln(2n-5)}$
5.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+1)\ln^2 n}$	5.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln 3n}}$	5.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$
5.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+5)\sqrt{\ln^3(n+5)}}$	5.17 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln 4n}}$	5.18 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(1+n)\ln^{2/3}(1+n)}$
5.19 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-5)\sqrt{\ln(3n-5)}}$	5.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(3n-1)}}$	5.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+n)\ln^2(1+n)}$
5.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$	5.23 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$	5.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3+8n)\ln^2(3+8n)}$
5.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+2)\ln^2(2n+2)}$	5.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n+1)\ln^2 n}$	5.27 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(3+2n)\ln^5(3+2n)}$
5.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left[\ln^2(3n+1)\right](3n+1)}$	5.29 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-5)\ln 2n}$	5.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$

6 Төмендегі қатарларды Дирихле қатарымен салыстыру арқылы жинақтылыққа зерттеңіздер.

6 кесте

6.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot\sqrt{n}}$	6.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$	6.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3-1}$
6.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^7$	6.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+6)}$	6.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+5}}$
6.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^8-1}$	6.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{3n^9}$	6.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n-1)(n+1)}$
6.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(2n+1)\cdot n}$	6.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{(2n+1)\cdot n}$	6.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^8+1}$
6.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{3+\sqrt[5]{n^7}}$	6.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$	6.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$
6.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$	6.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^6(n+1)}$	6.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+1}}$
6.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+3)\cdot n}$	6.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(6n^2+5)\cdot\sqrt{n}}$	6.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$
6.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^9}$	6.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^3+5)\cdot n}$	6.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n^2+1)\cdot n}$
6.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot n^7}$	6.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt[7]{n^3}}$	6.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
6.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)\cdot n}$	6.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{(2n+1)\cdot\sqrt{n}}$	4.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+5)^3}$

7 Төмендегі таңбасы ауыспалы қатарларды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіздер.

7 кесте

7.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$	7.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)\,!}$	7.3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}$
7.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$	7.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$	7.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$
7.7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+5}{3^n}$	7.8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{3n-1}$	7.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$
7.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{5n(n+1)}$	7.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}$	7.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+5}{3^n}$

7.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$	7.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$	7.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)n}$
7.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{3}{\ln(n+1)}$	7.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	7.18 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$
7.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)n}$	7.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$	7.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n}$
7.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$	7.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$	7.24 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{2n+1}}$
7.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$	7.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$	7.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$
7.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n+5}$	7.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3n^2+1}$	7.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$

8 Жалпы мүшесі $u_n(x)$ болатын, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ функционалдық қатары берілсін. Қатардың $n-$ ші дербес қосындысын $S_n(x)$ және $r_n(x)$ қалдығын жазыңыздар.

8 кесте

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$	8.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	8.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$	8.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$
8.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^n x^{2n}}{n}$	8.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$	8.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$	8.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$
8.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$	8.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	8.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$	8.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
8.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$	8.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$	8.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$	8.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$
8.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$	8.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$	8.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$	8.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$
8.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$	8.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$	8.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$	8.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$
8.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$	8.26 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{1}{n}$	8.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$	8.28 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{2^n}$
8.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$	8.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))x^n$	8.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt[3]{n^2}}$	8.32 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{5^n}$

9 8-тапсырмадағы берілген қатарлардың жинақталу облысын табыңыздар.

10 Төмендегі қатарлардың қосындысын α дәлдікпен есептеңіздер.

9 кесте

10.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n},\alpha=0{,}01$	10.2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\cdot n}{\left(n^{3}+1\right)^{2}},\alpha=0{,}001$
10.3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n}\cdot n\,!},\ \alpha=0{,}001$	10.4 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{1+n^{3}},\alpha=0{,}01$
10.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)\,!\cdot 2n},\alpha=0{,}00001$	10.6 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^{3}\cdot(n+3)},\alpha=0{,}001$
10.7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n\,!},\ \alpha=0{,}01$	10.8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin 3^{n}}{3^{n}},\alpha=0{,}001$
10.9 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1+n^{3}},\alpha=0{,}01$	10.10 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)^{n}},\ \alpha=0{,}001$
10.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)\,!},\alpha=0{,}001$	10.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^{n+1}\cdot 2^{n}},\alpha=0{,}001$
10.13 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n},\alpha=0{,}1$	10.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^{n}\cdot n!},\ \alpha=0{,}01$
10.15 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\cdot n}{\left(n^{3}+1\right)^{2}},\alpha=0{,}001$	10.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{4^{n}(2n+1)},\alpha=0{,}001$
10.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^{2}},\alpha=0{,}01$	10.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n}\cdot n\,!},\ \alpha=0{,}001$
10.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^{n}},\alpha=0{,}01$	10.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2}(n+3)},\alpha=0{,}01$
10.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)\,!},\ \alpha=0{,}0001$	10.22 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1\ )^{n}},\alpha=0{,}001$
10.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!(2n+1)},\alpha=0{,}001$	10.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n^{3}(n+1)},\alpha=0{,}01$
10.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^{3}},\alpha=0{,}001$	10.26 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\pi\cdot n}{3^{n}\cdot n},\alpha=0{,}001$

10.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,!},\alpha=0{,}01$	10.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)\,!}\cdot\frac{1}{n\,!}\;,\;\alpha=0{,}00001$
10.29 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(-1^{n}\right)\right]}{2^{n}\cdot n},\alpha=0{,}01$	10.30 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n\right)}{n^{3}},\alpha=0{,}01$

11 Интеграл асты функциялардың дәрежелік қатарға жіктелеуін пайдалана отырып, төмендегі анықталған интегралдарды 0,001 дәлдікпен есептеңіздер.

10 кесте

11.1 $\int_0^1 e^{-6x^2}dx$	11.2 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$	11.3 $\int_0^{2,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$	11.4 $\int_0^1\cos x^2dx$
11.5 $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$	11.6 $\int_0^{0,4}e^{-\frac{3x^2}{4}}dx$	11.7 $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$	11.8 $\int_0^{0,5}\sin\left(4x^2\right)dx$
11.9 $\int_0^{0,3}e^{-2x^2}dx$	11.10 $\int_0^{0,2}\cos\left(25x^2\right)dx$	11.11 $\int_0^{0,4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2dx$	11.12 $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$
11.13 $\int_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$	11.14 $\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$	11.15 $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$	11.16 $\int_0^1\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$
11.17 $\int_0^{0,4}\sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2dx$	11.18 $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	11.19 $\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$	11.20 $\int_0^{0,1}\sin\left(100x^2\right)dx$
11.21 $\int_0^{2/5}\frac{dx}{\sqrt{625+x^4}}$	11.22 $\int_0^{0,2}e^{-3x^2}dx$	11.23 $\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$	11.24 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$
11.25 $\int_0^{0,2}\sin\left(25x^2\right)dx$	11.26 $\int_0^{0.4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$	11.27 $\int_0^{0,5}e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$	11.28 $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$

11.29 $\int_0^{0,5}\cos\left(4x^2\right)dx$	11.30 $\int_0^{1}\sin x^2 dx$		

12 Төменде берілген интервалдарда, периоды $\omega = 2l$ болатын, $f(x)$ функцияларын Фурье қатарларына жіктеңіздер.

11 кесте

12.1 $f(x)=\begin{cases}0, -4<x<0\\ 1/2,\ \ 0<x<4\end{cases}$	12.2 $f(x)=\begin{cases}3,\ \ 0<x<1\\ -3,\ \ 1<x<2\end{cases}$	12.3 $f(x)=\begin{cases}0, -7<x<0\\ 1/3,\ \ 0<x<7\end{cases}$
12.4 $f(x)=\begin{cases}0, -3<x<0\\ 1/2,\ \ 0<x<3\end{cases}$	12.5 $f(x)=\begin{cases}3,\ \ 0<x<2,5\\ -3,\ \ 2,5<x<5\end{cases}$	12.6 $f(x)=\begin{cases}3,\ 0<x<1/2\\ -3,\ \ 1/2<x<2\end{cases}$
12.7 $f(x)=\begin{cases}0, -2<x<0\\ 1/5,\ \ 0<x<2\end{cases}$	12.8 $f(x)=\begin{cases}7,\ \ 0<x<2\\ -7,\ \ 2<x<4\end{cases}$	12.9 $f(x)=\begin{cases}6,\ 0<x<1/2\\ -6,\ \ 1/2<x<2\end{cases}$
12.10 $f(x)=\begin{cases}0, -6<x<0\\ 8,\ \ 0<x<6\end{cases}$	12.11 $f(x)=\begin{cases}4,\ \ 0<x<5\\ -4,\ \ 5<x<10\end{cases}$	12.12 $f(x)=\begin{cases}3,\ 0<x<3\\ -3,\ \ 3<x<6\end{cases}$
12.13 $f(x)=\begin{cases}3,\ 0<x<3/2\\ -3,\ \ 3/2<x<3\end{cases}$	12.14 $f(x)=\begin{cases}1/3,\ \ 0<x<1,5\\ -1/3,\ \ 1,5<x<3\end{cases}$	12.15 $f(x)=\begin{cases}9,\ 0<x<3/2\\ -9,\ \ 3/2<x<3\end{cases}$
12.16 $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<1/2\\ -1,\ \ 1/2<x<1\end{cases}$	12.17 $f(x)=\begin{cases}0, -5<x<0\\ 8,\ \ 0<x<5\end{cases}$	12.18 $f(x)=\begin{cases}0, -7<x<0\\ 3,\ \ 0<x<7\end{cases}$
12.19 $f(x)=\begin{cases}4,\ 0<x<3/2\\ -4,\ \ 3/2<x<3\end{cases}$	12.20 $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<5/2\\ -1,\ \ 5/2<x<5\end{cases}$	12.21 $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<3/2\\ -1,\ \ 3/2<x<3\end{cases}$
12.22 $f(x)=\begin{cases}5,\ \ 0<x<2\\ -5,\ \ 2<x<4\end{cases}$	12.23 $f(x)=\begin{cases}0, -4<x<0\\ 9,\ \ 0<x<4\end{cases}$	12.24 $f(x)=\begin{cases}0, -3,5<x<0\\ 9,\ \ 0<x<3,5\end{cases}$
12.25 $f(x)=\begin{cases}0, -2<x<0\\ 2,\ \ 0<x<2\end{cases}$	12.26 $f(x)=\begin{cases}0, -1<x<0\\ 1,\ \ 0<x<1\end{cases}$	12.27 $f(x)=\begin{cases}0, -3<x<0\\ 3,\ \ 0<x<3\end{cases}$

12.28 $f(x)=\begin{cases}0, -5<x<0\\ 2, \ 0<x<5\end{cases}$	12.29 $f(x)=\begin{cases}1, \ 0<x<1\\ -1, \ 1<x<2\end{cases}$	12.30 $f(x)=\begin{cases}2, \ 0<x<2\\ -2, \ 2<x<4\end{cases}$

1.3 Екінші дәрежелі есептік тапсырмалар

13 Төмендегі дәрежелік қатарлардың жинақталу радиустарын, интервалдарын, облыстарын табыңыздар.

12 кесте

13.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$	13.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$	13.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$
13.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$	13.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}.$	13.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$
13.7 $\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$	13.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}.$	13.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{(x-1)^n}{5^n}$
13.10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$	13.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}.$	13.12 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$
13.13 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^{n^2}$	13.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(x+10)^n}{n^n}$	13.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}.$
13.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$	13.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$	13.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}.$
13.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$	13.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$	13.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}.$
13.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$	13.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$	13.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}.$
13.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n\ln\left(1+1/n\right)}$	13.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}.$	13.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$
13.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$	13.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$	13.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$

14 $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде анықталған төмендегі периодты функцияларды Фурье қатарларына жіктеңіздер.

13 кесте

14.1 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	14.2 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.3 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	14.4 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.5 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x+2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	14.6 $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.7 $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.8 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.9 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4-9x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.10 $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.11 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.12 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.13 $f(x)=\begin{cases}0\ \ , & -\pi\le x\le 0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.14 $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.15 $f(x)=\begin{cases}-x+1/2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.16 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x/2+1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
14.17 $f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.18 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.19 $f(x)=\begin{cases}1-x/4, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.20 $f(x)=\begin{cases}x/3-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.21 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.22 $f(x)=\begin{cases}0\ \ , & -\pi\le x\le 0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
14.23 $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$	14.24 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$

14.25 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ x/5-2, & 0\le x\le \pi\end{cases}$	14.26 $f(x)=\begin{cases}0\,, & -\pi \le x \le 0,\\ (\pi-x)/2\,, & 0\le x\le \pi\end{cases}$
14.27 $f(x)=\begin{cases}0 & , -\pi \le x \le 0,\\ 1-4x, & 0\le x\le \pi\end{cases}$	14.28 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ 3-8x, & 0\le x\le \pi\end{cases}$
14.29 $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0\le x\le \pi\end{cases}$	14.30 $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0\le x\le \pi\end{cases}$

1.4 Типтік нұсқалардың шешуі

1 Төмендегі қатардың жалпы мүшесін, алғашқы бес мүшесін жазыңыздар. Сонымен қатар, n -ші дербес қосындысын S_n, r_n қалдығын және S_3 -ті жазып шығыңыздар және қатар қосындысын S табыңыздар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Шешуі :

Сигма қосынды астындағы өрнек қатардың жалпы мүшесін береді және алғашқы бес мүшесін төмендегідей көрсетуімізге болады

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 15}+\dots.$$

Ал қатардың алғашқы n мүшесінің қосындысы бізге керекті S_n дербес қосындыны береді, яғни:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 15}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+5)}$$

және қатардың n - ші мүшеден кейінгі қалған бөлігі қатар қалдығын r_n төмендегідей көрсетуге болады, яғни:

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+5)}$$

және алғашқы үш мүшесінің қосындысы S_3 төмендегідей есептелінеді:

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}.$$

Енді қатардың қосындысын S табалық. Ол үшін қатардың жалпы мүшесін қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазайық, яғни:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+5}.$$

Бұл бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, төмендегі өрнектің дұрыстығына көз жеткізе аламыз,

$1 = A(2n+5) + B(2n-1)$.

Енді анықталмаған коэффициенттер әдісімен белгісіз A, B коэффициенттерін табалық. Егер $n = \frac{1}{2}$ деп алатын болсақ, онда: $1 = 6A, \quad A = \frac{1}{6};$ ал, егер $n = -\frac{5}{2}$ деп алатын болсақ, онда $1 = -6B \quad и \; B = -\frac{1}{6}$.

Демек, жалпы мүшеміз келесідей қарапайым бөлшектердің қосындысынан тұрады екен

$$a_n = \frac{1}{6}\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{2n+5}.$$

Енді, жалпы мүшесі жоғарыдағыдай болатын қатардың алғашқы n мүшесінің қосындысын табайық:

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right).$$

Енді пайда болған қосындыдан шек тапсақ бізге керекті қатар қосындысы S шығады:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{23}{15} = \frac{23}{90}.$$

2 Төмендегі қатар үшін, қатар жинақтылығының қажетті шарты орындыла ма? Егер орындалса, онда салыстыру белгілері бойынша жинақтылыққа зерттеңіздер

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2 + \sin^2 n}.$$

Шешуі:

Алдымен, қатардың жалпы мүшесін төмендегідей жазайық,

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

енді жинақталудың қажетті шартын тексерейік, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$, демек, шарт орындалады екен. Бізге мектеп курсынан $\sin^2 n < 1$ теңсіздігі белгілі, онда келесі теңсіздіктер де орынды

$$n^2 + \sin^2 n < n^2 + 1, \quad \frac{n}{n^2 + \sin^2 n} < \frac{n}{n^2+1}.$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ қатарымыз жинақсыз. Енді осыған көз жеткізейік. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ қатарының алымының дәрежесі бірге, ал бөлімінің дәрежесі екіге тең. Бұлардың дәрежелерінің айырымы бірге тең, демек қатарымызды гармоникалық қатармен $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ салыстырамыз деген сөз. Біз білеміз, бұл қатардың жинақсыз екенін және төмендегі өрнектен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{n}{1}=1$$

олардың бір уақытта жинақсыздалатынын көреміз. Демек қатарымыз жинақсыз.

3 Төмендегі қатарды Даламбер белгісінің көмегімен жинақтылыққа зерттеңіздер

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

Шешуі:

Қатардың n - ші және $n+1$ -ші мүшелерін жазайық,

$$a_n=\frac{7^{3n}}{(2n-5)!},\quad a_{n+1}=\frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}.$$

Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{3n+3}\cdot(2n-5)!}{(2n-3)!\cdot 7^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)}=0<1,$$ табылған шек бірден кіші болып шықты, демек, қатар жинақты.

4 Төмендегі қатарды Коши радикалдық белгісімен жинақтылыққа зерттеңіздер

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}.$$

Шешуі:

Қатардың жалпы мүшесі,

$$a_n=\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}.$$

Коши радикалдық белгісі бойынша: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1$, табылған шек бірден кіші болып шықты, демек, қатар жинақты.

5 Төмендегі қатарды Коши интегралдық белгісімен жинақтылыққа зерттеңіздер

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{\ln n}}.$$

Шешуі:

Қатардың жалпы мүшесін жазайық $a_n=\frac{1}{(2n-1)\sqrt{\ln n}}$ және $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln n}}$ қатарын қарастырайық. Коши интегралдық белгісі бойынша бұл қатарымыз жинақсыз, себебі $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2}\int\limits_2^{\infty}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(\ln x)=\sqrt{\ln x}\Big|_2^{\infty}=\infty$ меншіксіз интегралымыз жинақталмайды. Бірақ $a_n>b_n$, яғни, $\frac{1}{(2n-1)\sqrt{\ln n}}>\frac{1}{2n\sqrt{\ln n}}$. Демек салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатарымыз жинақсыз екен.

6 Төмендегі қатарды Дирихле қатарымен салыстыра отырып жинақтылыққа зерттеңіздер

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-2)(n^2+1)}.$$

Шешуі:

Қатардың жалпы мүшесін жазайық,

$$a_n=\frac{n^2}{(n-2)(n^2+1)}.$$

Байқағанымыздай бөлшек алымының дәрежесі екіге, ал бөлімінің дәрежесі үшке тең. Сондықтан берілген қатарды салыстырудың екінші белгісі бойынша Дирихле қатарымен салыстырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ мұнда $p=1$ яғни, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармоникалық қатар, жинақсыз).

Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{(n-2)(n^2+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot n}{(n-2)(n^2+1)}=1,$

екі қатарымыз да бір уақытта жинақсыздалады екен.

7 Төмендегі таңбасы ауыспалы қатарларды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттеңіздер:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}};\quad \acute{a})\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{9n-1}.$$

Шешуі:

а) оң таңбалы қатарды қарастырайық $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$. Бұл қатарымыз салыстырудың екінші белгісі бойынша жинақты: оң таңбалы қатарымызды мына $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ қатармен салыстырамыз (бұл Дирихле қатары, $\sum\limits_{=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p=\frac{3}{2}>1-$ жинақты); салыстырудың шектік белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1,$бұл екі қатарымыз да біруақытта жинақталады екен. Демек, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ қатарымыз жинақты, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ – қатарымыз абсолютті жинақты.

б) мына оң таңбалы қатарды қарастырайық $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$. Бұл қатарымызды, мына $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ жинақсыз қатармен салыстырамыз. Салыстырудың екінші белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3}\cdot\frac{n}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}=1,$

бұл қатарларымыз бір уақытта жинақсыздалады екен. Сондықтан, берілген қатарымыз абсолютті жинақталмайды. Енді, Лейбниц шарттарын тексеріп көрейік, 1) $2>\frac{5}{8}>\frac{10}{27}>...;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=0$ шарттар орындалып тұр, демек, берілген қатарымыз шартты жинақты.

с) бұл қатар үшін Лейбниц шарттарының бір шарты $\left(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\right)$ орындалмайды. Шынында да, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{9n-1}=\frac{1}{9}\neq 0.$

Сондықтан қатар жинақсыз .

8 Жалпы мүшесі $u_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2x+5)^n}{3^n\cdot n!}$ болатын $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x+5)^n}{3^n\cdot n!}$ функционалдық қатары берілсін. Қатардың $n-$ ші дербес қосындысын $S_n(x)$ және $r_n(x)$ қалдығын жазыңыздар.

Шешуі:

Функционалдық қатардың жалпы түрі төмендегідей беріледі

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+....+u_n(x)+... \; .$$

Біздің жағдайда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x+5)^n}{3^n\cdot n!}=\frac{2x+5}{3}-\frac{(2x+5)^2}{18}+\frac{(2x+5)^3}{162}-...+(-1)^{n-1}\frac{(2x+5)^n}{3^n\cdot n!}+...$$

Ал, дербес қосындымыз төмендегідей анықталады

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$, яғни,

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2x+5)^k}{3^k\cdot k!}=\frac{2x+5}{3}-\frac{(2x+5)^2}{18}+\frac{(2x+5)^3}{162}-....+(-1)^{n-1}\frac{(2x+5)^n}{3^n\cdot n!}.$$

Ал, қатар қалдығы төмендегідей өрнектеледі

$r_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}(x)$, яғни,

$$r_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k-1}\frac{(2x+5)^{n+k}}{3^{n+k}\cdot(n+k)!}=(-1)^n\frac{(2x+5)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{(2x+5)^{n+2}}{3^{n+2}(n+2)!}+(-1)^{n+2}\frac{(2x+5)^{n+3}}{3^{n+3}(n+3)!}+...$$

9 Төмендегі функционал қатарлардың жинақталу облысын табыңыздар

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n.$

Шешуі:

а) Қатардың n - ші және $n+1$ -ші мүшелерін жазып шығайық,

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}},\quad u_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+2}}.$$

Даламбер белгісі бойынша $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{|x-2|}{2}<1$, онда $|x-2|<2$ немесе $0<x<4$. Бұл дегеніміз, $(0;4)$ - интервалы, берілген қатардың жинақталу интервалы.

Енді интервал ұштарын жинақтылыққа тексеріп көрелік: $x=0$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ қатарын аламыз, бұл қатарымыз салыстырудың екінші белгісі бойынша жинақсыз. Сондықтан, $x=0$ нүктесі қатардың жинақтылық облысына кірмейді; енді $x=4$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ қатарын аламыз. Бұл қатарымыз Лейбниц шарттарын қанағаттандырады, демек, шартты жинақталады: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>...$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$ Сондықтан $x=4$ нүктесі қатардың жинақталу облысына кіреді. Сонымен жинақталу облысымыз $(0,4]$.

б) Қатардың n - ші және $n+1$ -ші мүшелерін жазып шығайық, $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$. Қатардың жинақталу радиусын формула бойынша табамыз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Сонымен, қатарымыз тек $x=0$ нүктесінде ғана жинақты.

10 Төмендегі қатардың қосындысын α дәлдікпен есептеңіздер

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2\cdot 2^n}.$$

Шешуі:

Бұл қатарымыздың таңбасы ауыспалы және жинақты, қатардың $n-$ ші дербес қосындысы S_n қатар қосындысынан S ауытқуының абсолюттік шамасы, S_n -ге кірмейтін бірінші мүшенің абсолюттік шамасынан кем болады, яғни:

$$|S-S_n|=|r_n|<\omega_{n+1}.$$

Осы қатардың алғашқы мүшелерінің абсолюттік мәндерін берілген дәлдіктен кіші болғанша бірінен соң бірін есептейміз:

$a_1 = 0.5,\ a_2 = -0.0625, \ldots$ біздің жағдайда бұл, $a_6 = \dfrac{1}{6^2 \cdot 2^6} = 0,000434 < 0,001.$
Онда жоғарыда келтірілген таңбасы ауыспалы қатарлардың қасиеті бойынша:

$$S = S_5 = 0,5 - 0,0625 + \frac{1}{75} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} \approx 0,449.$$

11 Төмендегі функцияларды x-тің дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеңіздер.

$$a)\ \ f(x) = \ln(1 + 3x + 2x^2); \quad b)\ \ f(x) = (1 + x)e^x .$$

Шешуі:

$a)$ алдымен квадраттық үш мүшенің түбірлерін табайық

$1 + 3x + 2x^2$: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$, $x_{1,2} = \left\{ -\dfrac{1}{2}, -1 \right\}$

бұдан, функциямызды төмендегідей түрлендірсек болады

$$\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln 2\left(x + \frac{1}{2} \right)(x+1) = \ln(2x+1)(x+1) = \ln(2x+1) + \ln(x+1).$$

Енді әрбір қосылғышты формула бойынша Тейлор қатарына жіктейміз:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, -1 < x \le 1,$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < 2x \le 1, \rightarrow -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2},$$

енді осы қатарларды мүшелеп қоса отырып берілген функцияның Тейлор катарына жіктелуін аламыз:

$$\ln(1 + 3x + 2x^2) = (1+2)x - \frac{(1+2^2)x^2}{2} + \frac{(1+2^3)x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(1+2^n)x^n}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(1+2^n)}{n}x^n, \quad -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} .$$

$b)$ $1 + x$ функциясын дәрежелік қатар ретінде қарастыралық, мұнда көріп тұрғанымыздай алғашқы екі коэффициенттен басқалары нөл және бұл қатарымыз бүкіл сан өсінде жинақты. Бұл қатарымызды, бүкіл сан өсінде жинақты, e^x функциясының Тейлор қатарына көбейтіп, керекті нәтижемізді аламыз:

$$(1+x)e^{x}=(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\ldots+\frac{n+1}{n!}x^n+\ldots,\ -\infty<x<\infty.$$

12 Төмендегі анықталған интегралды 0,0001 -ге дейінгі дәлдікпен есептеңіздер.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Шешуі:

Алдымен, интеграласты функциямызды биномиалды қатарға жіктейік

$$(1+t)^m=1+mt+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n+\ldots,$$

және төмендегідей алмастырулар енгізейік

$$t=x^4,\ m=-\frac{1}{2}:\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8-\frac{5}{16}x^{12}+\ldots,$$

бұл қатарымыз $|x|<1$ шарты орындалғанда ғана жинақты. Енді бұл қатарымызды 0 мен $\frac{1}{2}$ аралығында мүшелеп интегралдайық:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8-\frac{5}{16}x^{12}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^9}{9}-\frac{5}{16}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot5\cdot2^5}+\frac{3}{8\cdot9\cdot2^9}-\frac{5}{16\cdot13\cdot2^{13}}+\ldots.$$

нәтижсінде таңбасы ауыспалы қатар аламыз. Енді осы қатардың қосындысын 0,0001 -ге дейінгі дәлдікпен есептейік. Ол үшін қатардың алғашқы мүшелерінің мәндерін тізбектеп шығайық, яғни:

$a_1\approx0{,}5;a_2\approx-0{,}00312;a_3\approx0{,}00008.$

Демек $|a_3|<0{,}0001,$ бұл дегеніміз таңбасы ауыспалы жинақталатын қатарлардың қасиеті бойынша, төмендегі мәнді аламыз:

$$I\approx S_2=a_1+a_2=0{,}5-0{,}00313\approx0{,}4969.$$

13 Төменде берілген периодты функцияны Фурье қатарына жіктеңіздер.

$$f(x)=\begin{cases}6,\ 0<x<2,\\3x,\ 2<x<4.\end{cases}$$

Шешуі:

Фурье коэффициенттерін анықтайтын төмендегі формулалар бізге белгілі:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

мұндағы $a=0,\ a+2l=4,$ онда $l=\dfrac{4-0}{2}=2.$

Демек: $$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6dx+\int_2^4 3xdx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{nx\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{nx\pi}{2}dx+\int_2^4 3x\cos\frac{nx\pi}{2}dx\right)=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ dv=\dfrac{\cos nx\pi}{2}dx,\ v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{nx\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{nx\pi}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{nx\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{nx\pi}{2}\right)\Big|_2^4\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0,\ n=2k\\ \dfrac{12}{n^2\pi^2},\quad n=2k+1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{nx\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{nx\pi}{2}dx+\int_2^4 3x\sin\frac{nx\pi}{2}dx\right)=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin\dfrac{nx\pi}{2}dx,\ v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{nx\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{nx\pi}{2}\Big|_0^2+3\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{nx\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{nx\pi}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}(1-\cos n\pi)+3\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi-\frac{8}{n\pi}\right)\right]=-\frac{6}{n\pi}.$$

Табылған коэфициенттерді бәрімізге белгілі формулаға қойсақ,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l},\qquad \text{мұнда}\quad l=2\quad ,$$

онда іздеген өрнегімізді аламыз:

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\cos n\pi)\cos\frac{nx\pi}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{nx\pi}{2}.$$

14 Төменде берілген периодты функцияны Фурье қатарына жіктеңіздер

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Шешуі:

Фурье коэффициенттерін есептейік:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\frac{(\pi+x)^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=\pi+x,\ du=dx,\\ dv=\cos nxdx,\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi+x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi\cdot n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi\cdot n^2}(1-\cos n\pi)=$$

$$=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ \ n=2k,\\ \dfrac{2}{n^2\pi},\ \textit{если}\ \ \ n=2k+1.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=\pi+x,\ du=dx\\ dv=\sin nxdx,\ v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}\right)=-\frac{1}{n}.$$

Онда бұл функция үшін Фурье қатары төмендегідей болады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Табылған коэффициенттерді формулаға қоятын болсақ, іздеген өрнегімізді аламыз:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

15 $[0,2]$ кесіндісінде анықталған , $y=3x+1$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіздер.

Шешуі:

Берілген функцияның $y=f(x)$ Фурье қатары төмендегі формуламен анықталатыны белгілі:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

және Фурье қатарының коэффициенттерін a_0, a_n, b_n төмендегі формулалармен есептелінеді:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

мұндағы $l = \frac{2-0}{2} = 1$.

$$a_0 = \int_0^2 (3x+1)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{2}\cdot 4^2 + 2 = 8.$$

$$a_n = \int_0^2 (3x+1)\cos n\pi x dx = \begin{vmatrix} u = 3x+1 & dx = 3dx \\ dv = \cos n\pi x dx & v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3x+1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^2 - \frac{3}{n\pi}\int_0^2 \sin \pi x dx = \frac{3}{n^2\cdot\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^2 = 0$$

$$b_n = \int_0^2 (3x+1)\sin n\pi x dx = -\frac{3x+1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^2 + \frac{3}{n\pi}\int_0^2 \cos n\pi x dx = -\frac{7}{n\pi}\cos 2\pi + \frac{1}{n\pi}\cos 0 +$$

$$+\frac{3}{n^2\cdot\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^2 = -\frac{6}{n\pi}.$$

Онда, берілген функцияның Фурье қатары төмендегідей болады:

$$4 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{6}{n\pi}\right)\sin n\pi x = 4 - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x.$$

Әдебиеттер тізімі

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.- М.: Высш. Шк., 1986. – Ч.2-352 с.

2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3 ч. /А.П.Рябушко, В.В.Бархатов и др./ Под редакцией А.П.Рябушко.- Минск: Вышэйшая школа, 1991.-Ч.3-351 с.

3. Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.-М.: Высш.шк., 1983.-176 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть.- М.: Айрис-пресс, 2003.-256 с.

5. Хасеинов К.А. Каноны математики. Учебник – Алматы: 2003.-686 с.

6. Математика 3. Конспект лекций для студентов всех форм обучения всех специальностей. Алматинский институт энергетики и связи: 2007.

Мазмұны

Қосымша жоспар 2011 ж._____реті

Людмила Николаевна Ким
Бекзат Копжасарович Жахаев

Математика 3

Барлық мамандықтар үшін есептік-графикалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар
Бөлім 3

Редакторы С.У. Байбосынова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басылуға қол қойылды Форматы 6084 1/16

Таралымы дана. Типографиялық қағаз №
Көлемі ___________ Тапсырыс Бағасы тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті »
Коммерциялық емес акционерлік қоғамы
Көшіру- көбейту бюросы
050013, Алматы қ., Байтұрсынов к.,126