Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

Математика 3

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам
для студентов специальности
5В074600-Космическая техника и технологии

Часть 1

Алматы 2013

СОСТАВИТЕЛИ: Л.Н.Ким. Математика 3. Методические указания и задания к расчетно-графическим работам (для специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии) . Часть1. - Алматы: АУЭС, 2013.- 28 с.

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам по «Теории функций комплексного переменного и операционному исчислению» содержат основные теоретические вопросы программы, варианты заданий и решение типового варианта.

Методические указания предназначены для студентов специальности 5В074500-Космическая техника и технологии.

Табл. 1 , библиогр.- 6 назв.

Рецензент: канд.физ.-мат.наук, доц. Байсалова М.Ж.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2013г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2013 г.

Введение

Методические указания представляют собой программу, задания и решение типового варианта к модулю 1 «Математики 3» для студентов специальности 5В074600 - Космическая техника и технологии. Задания состоят из тридцати вариантов. Вторая цифра номера задания указывает вариант студента.

Дисциплина «Математика 3» разделена на разделы:

а) теория функции комплексного переменного и операционное исчисление;

б) уравнения математической физики;

в) теория вероятностей и математическая статистика;

г) численные методы;

д) дискретная математика.

Эти разделы составляют три модуля. Каждый из этих разделов представляет собой отдельную математическую дисциплину, причем последующие не зависят от предыдущих.

Программа дисциплины «Математика 3» предполагает выполнение одной расчетно-графической работы (РГР) в каждом модуле. По итогам работы каждого модуля проводится рубежный контроль в виде теста на бумажном носителе. Они рассматриваются как защита РГР, так как основаны на задачах из РГР и как промежуточный тренинг по подготовке к экзаменационному тестированию. По итогам рубежного контроля составляется рейтинговая таблица.

Первый модуль включает раздел «Теория функции комплексного переменного и операционное исчисление».

Контрольные вопросы являются теоретическими вопросами для основной части экзамена.

На практическом занятии обсуждаются вопросы применения полученных теоретических знаний к выполнению РГР и подготовке к рубежному контролю, а также решаются задачи, соответствующие основной части экзамена.

Расчетно-графическая работа должна быть решена в отдельной тетради, решение задач должно быть кратким и в то же время достаточно объяснено ссылками на теорию и сопровождено необходимыми рисунками. Примером для оформления расчетно-графической работы может служить решение типового варианта, которое приведено в данном методическом указании.

Цель изучения функции комплексного переменного и операционного исчисления обусловлена необходимостью получения знаний для изучения

технических дисциплин. Эти разделы имеют широкое применение в теории электрических цепей и в других, не менее важных, дисциплинах.

Расчетно-графическая работа. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление

Цель расчетно-графической работы - освоение материала модуля 1, подготовка к рубежному контролю и к экзаменационному тестированию. Расчетно-графическая работа включает задачи, соответствующие основной части экзамена.

1 Расчетные задания

1 задание. Представить заданную функцию $\omega = f(z)$, где $z = x + iy$, в виде $\omega = u(x, y) + i\,v(x, y)$; проверить, является ли она аналитической. Если - да, то найти значение её производной в заданной точке z_0.

1.1	$f(z) = e^{3z},\ z_0 = -i$	1.2	$f(z) = sh\,2z,\ z_0 = \pi i$
1.3	$f(z) = (iz)^3,\ z_0 = -1 + i$	1.4	$f(z) = ze^{-z},\ z_0 = \pi$
1.5	$f(z) = z^3 + z^2 + i,\ z_0 = \frac{2i}{3}$	1.6	$f(z) = e^{iz^2},\ z_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} i$
1.7	$f(z) = z\sin z,\ z_0 = \frac{\pi}{2}$	1.8	$f(z) = \sin\frac{z}{3},\ z_0 = 1 + i$
1.9	$f(z) = i(1 - z^2) - 2z,\ z_0 = 1$	1.10	$f(z) = ze^{z},\ z_0 = -1 + \pi i$
1.11	$f(z) = \ln(z^2),\ z_0 = -i$	1.12	$f(z) = sh(z + i),\ z_0 = i$
1.13	$f(z) = e^{-z^2},\ z_0 = i$	1.14	$f(z) = z^2 + 2iz,\ z_0 = -5 + 2i$
1.15	$f(z) = e^{1-2z},\ z_0 = \frac{\pi i}{3}$	1.16	$f(z) = \cos\frac{z}{2},\ z_0 = \frac{\pi}{2}$
1.17	$f(z) = z^3 + i,\ z_0 = -2 + i$	1.18	$f(z) = \ln z,\ z_0 = 2 + 3i$
1.19	$f(z) = z^3 + 3z - i,\ z_0 = -i$	1.20	$f(z) = (z + 1)e^{z},\ z_0 = -\pi i$
1.21	$f(z) = e^{4z+1},\ z_0 = \frac{\pi i}{2}$	1.22	$f(z) = ch\,3z,\ z_0 = \frac{\pi i}{2}$
1.23	$f(z) = ch\,iz,\ z_0 = \pi/3$	1.24	$f(z) = z^3 - iz,\ z_0 = 2 + i$
1.25	$f(z) = e^{1-2iz},\ z_0 = \pi/6$	1.26	$f(z) = \sin(z + 1),\ z_0 = \pi/2$
1.27	$f(z) = 2z^2 - iz,\ z_0 = 1 - i$	1.28	$f(z) = \cos(2z + 1),\ z_0 = \pi$

1.29	$f(z)=sh\left(\frac{z}{3}\right),\ z_0=3\pi i$	1.30	$f(z)=e^{3iz},\ z_0=\frac{\pi}{3}$

2 задание. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$.

2.1 $u=x^2-y^2+x,\ f(0)=0$	2.2 $u=x^3-3xy+1,\ f(0)=1$
2.3 $v=e^x(y\cos y+x\sin y),\ f(0)=0$	2.4 $u=x^2-y^2-2y,\ f(0)=0$
2.5 $u=\frac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y,\ f(0)=2$	2.6 $u=\frac{x}{x^2+y^2},\ f(1)=1+i$
2.7 $v=e^{-y}\sin x+y,\ f(0)=2$	2.8 $v=e^x\cos y,\ f(0)=1+i$
2.9 $v=-\frac{y}{(x+1)^2+y^2},\ f(0)=1$	2.10 $v=y-\frac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=2$
2.11 $u=e^{-y}\cos x,\ f(0)=1$	2.12 $u=y-2xy,\ f(0)=0$
2.13 $u=x^2-y^2+2x+1,\ f(0)=i$	2.14 $u=x^2-y^2-2x+1,\ f(0)=1$
2.15 $v=3x^2y-y^3-y,\ f(0)=0$	2.16 $v=2xy+y,\ f(0)=0$
2.17 $u=e^x(x\cos y-y\sin y),\ f(0)=0$	2.18 $u=3x^2y-y^3,\ f(0)=1$
2.19 $v=2xy+2x,\ f(0)=0$	2.20 $u=1-e^x\cdot\sin y,\ f(0)=1+i$
2.21 $u=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y,\ f(0)=2$	2.22 $v=1-\frac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=1+i$
2.23 $u=e^{-y}\cos x+x,\ f(0)=1$	2.24 $v=e^{-y}\sin x,\ f(0)=1$
2.25 $u=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2},\ f(0)=1$	2.26 $u=\frac{x}{(x^2+y^2)+x},\ f(1)=2$
2.27 $v=x^2-y^2-x,\ f(0)=0$	2.28 $u=-2xy-2y,\ f(0)=i$
2.29 $v=2xy-2y,\ f(0)=1$	2.30 $u=x^3-3xy^2-x,\ f(0)=0$

3 задание. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

3.1 $\int\limits_L (z^3+\sin z)dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re} z\ge 0\}$	3.2 $\int\limits_L (z+1)e^z dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re} z\ge 0\}$
3.3 $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz;\ AB-$отрезок прямой, $z_A=0, z_B=2+2i$	3.4 $\int\limits_{AB} (z^2+7z+1)dz;\ AB-$отрезок прямой, $z_A=1, z_B=1-i$
3.5 $\int\limits_{ABC} \lvert z\rvert dz;\ ABC-$ломаная, $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=1+i$	3.6 $\int\limits_{AB} (12z^5+4z^3+1)dz;\ AB-$отрезок прямой, $z_A=1, z_B=i$

3.7 $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz;\ AB-$ отрезок прямой, $z_A=0, z_B=1+i$	3.8 $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz;\ ABC-$ ломаная, $z_A=i, z_B=1, z_C=0$
3.9 $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\frac{\overline{z}}{z} dz;\ AB:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\ge 0\}$, BC- отрезок прямой, $z_A=0, z_B=1+i$	3.10 $\int\limits_{ABC} \left(z^2+\cos z\right) dz;\ ABC-$ ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_C=i$
3.11 $\int\limits_{L} \frac{\overline{z}}{z} dz,$ L-граница области: $\{1<\lvert z\rvert<2, \operatorname{Re} z>0\}$	3.12 $\int\limits_{ABC} \left(chz+\cos iz\right) dz;\ ABC-$ -ломаная, $z_A=0, z_B=-1, z_C=i$
3.13 $\int\limits_{L} \lvert z\rvert \overline{z}\, dz;\ L:\{\lvert z\rvert=4, \operatorname{Re} z\ge 0\}$	3.14 $\int\limits_{L} \left(chz+z\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\le 0\}$
3.15 $\int\limits_{L} \lvert z\rvert \operatorname{Re} z^2\, dz;\ L:\{\lvert z\rvert=R, \operatorname{Im} z\ge 0\}$	3.16 $\int\limits_{L} z \operatorname{Re} z^2\, dz;\ L:\{\lvert z\rvert=R, \operatorname{Im} z\ge 0\}$
3.17 $\int\limits_{L} \left(\sin iz+z\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re} z\ge 0\}$	3.18 $\int\limits_{AB} \left(2z+1\right) dz;\ AB:\{y=x^3; z_A=0, z_B=1+i\}$
3.19 $\int\limits_{L} \left(\cos iz+3z^2\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\ge 0\}$	3.20 $\int\limits_{L} \lvert z\rvert dz;\ L:\left\{\lvert z\rvert=\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\le argz\le\frac{5\pi}{4}\right\}$
3.21 $\int\limits_{L} \left(z^3+\sin z\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re} z\ge 0\}$	3.22 $\int\limits_{L} z\,\lvert z\rvert dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\ge 0\}$
3.23 $\int\limits_{L} \lvert z\rvert \operatorname{Re} z^2\, dz;\ L:\{\lvert z\rvert=2, \operatorname{Im} z\ge 0\}$	3.24 $\int\limits_{L} z \operatorname{Re} z^2\, dz;\ L:\{\lvert z\rvert=3, \operatorname{Im} z\ge 0\}$
3.25 $\int\limits_{L} \left(\sin iz+z\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re} z\ge 0\}$	3.26 $\int\limits_{AB} \left(2z+1\right) dz;\ AB:\{y=x^3; z_A=0, z_B=1+i\}$
3.27 $\int\limits_{L} \left(\cos iz+3z^2\right) dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\ge 0\}$	3.28 $\int\limits_{L} \lvert z\rvert dz;\ L:\left\{\lvert z\rvert=\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\le argz\le\frac{5\pi}{4}\right\}$
3.29 $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz;\ AB:\{y=x^2; z_A=0, z_B=1+i\}$	3.30 $\int\limits_{L} z\,\lvert z\rvert dz;\ L:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Im} z\ge 0\}$

4 задание. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

4.1 $\frac{e^z-1}{\sin\pi z}$	4.2 $\frac{1}{\cos z}$	4.3 $\frac{e^{1/z}\sin\pi z}{z^4-1}$	4.4 $z^2\sin\frac{1}{z}$	4.5 $\frac{e^z-1}{z^3\left(z+1\right)^2}$	4.6 $\frac{z^2+1}{\left(z-i\right)^2\left(z^2+4\right)}$
4.7	4.8	4.9	4.10	4.11	4.12

$\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$	$tg\dfrac{1}{z}$	$ctg\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$	$\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$	$\dfrac{\sin^3 z}{(1-\cos z)z}$	$\dfrac{(z+\pi)\sin\dfrac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$
4.13 $ctg\pi z$	4.14 $ctg\dfrac{1}{z}$	4.15 $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$	4.16 $\dfrac{1}{\sin z^2}$	4.17 $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$	4.18 $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$
4.19 $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4-1}$	4.20 $tg^2 z$	4.21 $e^{\frac{1}{z}}/\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$	4.22 $\dfrac{1}{e^z+1}$	4.23 $\dfrac{\sin z}{(1-\cos z)z^3}$	4.24 $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$
4.25 $\dfrac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$	4.26 thz	4.27 $\dfrac{e^{1/z}\sin 3z^2}{z(z^3+1)}$	4.28 $z^2\sin\dfrac{1}{z}$	4.29 $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$	4.30 $\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)z}$

5 задание. Вычислить интеграл.

5.1 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2}\dfrac{dz}{z(z^2+1)}$	5.2 $\oint\limits_{\lvert z-1-i\rvert=5/4}\dfrac{2dz}{z^2(z-1)}$	5.3 $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3/2}\dfrac{dz}{z(z^2+4)}$
5.4 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\dfrac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$	5.5 $\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=1/2}\dfrac{e^z dz}{\sin z}$	5.6 $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$
5.7 $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\dfrac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$	5.8 $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\dfrac{ze^z}{\sin z}dz$	5.9 $\oint\limits_{\lvert z-1/4\rvert=1/3}\dfrac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz$
5.10 $\oint\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\dfrac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz$	5.11 $\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=1}\dfrac{\sin 3z+2}{z^2(\pi-z)}dz$	5.12 $\oint\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\dfrac{e^z+1}{z(z-1)}dz$
5.13 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\dfrac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}dz$	5.14 $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=3}\dfrac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$	5.15 $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3/2}\dfrac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$
5.16 $\oint\limits_{\lvert z-6\rvert=1}\dfrac{\sin^2 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$	5.17 $\oint\limits_{\lvert z+3/2\rvert=1}\dfrac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$	5.18 $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2}\dfrac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$
5.19 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=\pi/2}\dfrac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$	5.20 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\dfrac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$	5.21 $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=2}\dfrac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$

5.22 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$	5.23 $\oint\limits_{\lvert z-\pi\rvert=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz$	5.24 $\oint\limits_{\lvert z+3/2\rvert=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$
5.25 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=\pi/2} \frac{z^2+z+3}{\sin z(3+z)}dz$	5.26 $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$	5.27 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$
5.28 $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2} \frac{2z\lvert z-1\rvert}{\sin z}dz$	5.29 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$	5.30 $\oint\limits_{\lvert z-\pi\rvert=1} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz$

6 задание. Найти изображение функции, пользуясь теоремами линейности и подобия.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$
6.1	$t+2e^{3t}-\sin 2t$	6.2	$4\sin 2t-2t^3+3$	6.3	$7+2\sin 5t-t^5$
6.4	$1+3t^2-4\cos 5t$	6.5	$t^8-3\cos 6t+1$	6.6	$\cos 4t-t^3-1$
6.7	$t^3+5e^{-t}+2$	6.8	$2e^{9t}-11t^4+4$	6.9	$8e^{3t}-t+2$
6.10	$3-4ch2t+t^4$	6.11	$2+3ch4t-5t^6$	6.12	$t+7e^{3t}-\sin 4t$
6.13	$2t^2-3sh4t+2$	6.14	$7sh4t+3t^9-2$	6.15	$1-9t^2-4\cos 2t$
6.16	$4+2\sin 3t-t^5$	6.17	$t+8e^{4t}-\sin 5t$	6.18	$t^3+6e^{-t}-2$
6.19	$\cos 2t-3t^3+1$	6.20	$1+3t^5-4\cos 7t$	6.21	$3-7ch2t+t^5$
6.22	$3e^{3t}-5t+2$	6.23	$t^4+7e^{-t}+2$	6.24	$9t^2-3sh6t+2$
6.25	$2+8t^4-ch7t$	6.26	$3-9ch2t+t^6$	6.27	$2+\sin 3t-t^6$
6.28	$1-sh5t+3t^2$	6.29	$t^2-3sh5t+2$	6.30	$\cos 8t-3t^6+1$

7 задание. Найти изображение функции, пользуясь теоремой смещения.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$
7.1	$e^{2t}\cos t$	7.2	$5e^{-4t}\cos 3t$	7.3	$e^{-3t}\cos 5t$	7.4	$å^{-7t}\sin 8t$
7.5	$å^{-t}\sin 8t$	7.6	$e^{7t}\sin 4t$	7.7	$3e^{2t}sh4t$	7.8	$e^{4t}sh7t$
7.9	$3e^{4t}sh2t$	7.10	$e^{-2t}sh3t$	7.11	$e^{-3t}ch4t$	7.12	$e^{-2t}ch6t$
7.13	$e^{-2t}ch3t$	7.14	$e^{3t}ch(-t)$	7.15	$2e^{3t}\cos 9t$	7.16	$2e^{7t}\cos 2t$
7.17	$2e^{5t}\cos 2t$	7.18	$e^{-3t}\cos 4t$	7.19	$3e^{4t}\sin 9t$	7.20	$3e^{-5t}\sin t$
7.21	$3e^{-t}\sin t$	7.22	$e^{-7t}\sin 3t$	7.23	$e^{6t}sh5t$	7.24	$e^{-9t}sht$
7.25	$e^{8t}sht$	7.26	$e^{2t}sh(-8t)$	7.27	$e^{-4t}ch3t$	7.28	$e^{-8t}\sin 2t$
7.29	$e^{-5t}ch3t$	7.30	$e^{-t}\sin 8t$	7.31	$e^{6t}\cos t$	7.32	$e^{-2t}sh5t$

8 задание. Найти изображение функции, пользуясь теоремой запаздывания.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$

8.1	$(t-1)sh(t-1)$	8.2	$(t-4)^5$	8.3	$(t-5)ch(t-5)$
8.4	$(t-2)^2 \mathring{a}^{t-2}$	8.5	$(t-1)ch(t-1)$	8.6	$(t-1)^6$
8.7	$\cos^2(t-1)$	8.8	$(t-8)sh(t-8)$	8.9	$(t-9)\sin(t-9)$
8.10	$\sin^2(t-1)$	8.11	$(t-8)^4$	8.12	$(t-7)sh(t-7)$
8.13	$(t-3)\ e^{t-3}$	8.14	$(t-2)\sin(t-2)$	8.15	$(t-5)^2 \mathring{a}^{t-5}$
8.16	$(t-5)ch(t-5)$	8.17	$(t-6)sh(t-6)$	8.18	$\cos^2(t-6)$
8.19	$(t-1)^6$	8.20	$(t-4)^2 \mathring{a}^{t-4}$	8.21	$\sin^2(t-4)$
8.22	$(t-4)\sin(t-4)$	8.23	$\cos^2(t-2)$	8.24	$(t-8)\ e^{t-8}$
8.25	$(t-2)\cos(t-2)$	8.26	$\sin^2(t-2)$	8.27	$(t-5)ch(t-5)$
8.28	$(t-3)\ \mathring{a}^{t-3}$	8.29	$(t-8)\ e^{t-8}$	8.30	$(t-7)^6$

9 задание. Найти изображение функции, пользуясь теоремой дифференцирования изображения.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$
9.1	$t^2\cos t$	9.2	$t(\cos 2t - e^t)$	9.3	$t(e^{2t} + ch\,t)$	9.4	$t^3 e^{-2t}$
9.5	$t(e^t + ch\,t)$	9.6	$t^3 e^{-t}$	9.7	$(t+4)\sin 2t$	9.8	$(t+2)\sin t$
9.9	$(t+1)\sin 2t$	9.10	$(t+1)t\sin t$	9.11	$t\,sh5t$	9.12	$t^2 e^{4t}$
9.13	$t\,sh3t$	9.15	$t^2 e^{3t}$	9.15	$t^2\sin 2t$	9.16	$t\,ch4t$
9.17	$t^2\sin t$	9.18	$t\,ch3t$	9.19	$t(2 - sh\,t)$	9.20	$(t+5)\sin 4t$
9.21	$t(1 - sh\,t)$	9.22	$(t+3)\sin 4t$	9.23	$(t-4)\cos 3t$	9.24	$t^2 ch\,t$
9.25	$(t-2)\cos 3t$	9.26	$t^2 sh\,t$	9.27	$t^2 sh\,5t$	9.28	$t(\cos 4t - e^t)$
9.29	$t^2 sh\ t$	9.30	$t^2\cos 3t$	9.31	$t^2 sh\,2t$	9.32	$t^2\cos 5t$

10 задание. Найти изображение функции, пользуясь теоремой интегрирования оригинала.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$
10.1	$\int_0^t t^2 e^{-2t}dt$	10.2	$\int_0^t e^{-t} ch\,t\,dt$	10.3	$\int_0^t t\ ch^2 3t dt$
10.4	$\int_0^t t\ ch^2 t dt$	10.5	$\int_0^t \sin^2 t\,dt$	10.6	$\int_0^t t\,ch3t dt$
10.7	$\int_0^t t\,ch2t dt$	10.8	$\int_0^t \cos^2 t\,dt$	10.9	$\int_0^t t^2 e^{4t}dt$
10.10	$\int_0^t t^2 e^{3t}dt$	10.11	$\int_0^t (t+1)\sin 3t\,dt$	10.12	$\int_0^t t^3 e^{-6t}dt$

10.13	$\int_0^t t^3 e^{-2t} dt$	10.14	$\int_0^t (t+1)\, ch2t\, dt$	10.15	$\int_0^t t^3 e^{3t} dt$
10.16	$\int_0^t t^3 e^{-3t} dt$	10.17	$\int_0^t (t^2+1)\, e^{-t}\, dt$	10.18	$\int_0^t t \sin^2 2t\, dt$
10.19	$\int_0^t t \sin^2 t\, dt$	10.20	$\int_0^t (t-2)\, e^{t}\, dt$	10.21	$\int_0^t t^2 e^{-7t} dt$
10.22	$\int_0^t t^2 e^{-t} dt$	10.23	$\int_0^t t^2 e^{-4t} dt$	10.24	$\int_0^t e^{-t} ch2t\, dt$
10.25	$\int_0^t \sin^2 3t\, dt$	10.26	$\int_0^t \cos^2 3t\, dt$	10.27	$\int_0^t (t+1) \sin 5t\, dt$
10.28	$\int_0^t (t+1)\, ch3t\, dt$	10.29	$\int_0^t (t^2+2)\, e^{-t}\, dt$	10.30	$\int_0^t (t-5)\, e^{t}\, dt$

11 задание. По заданному изображению $\dfrac{Ap^2+Bp+C}{(p+a)(p^2+bp+c)}$ найти оригинал.

№	A	B	C	a	b	c	№	A	B	C	a	b	c
11.1	3	-9	18	-2	-6	13	11.2	0	-4	1	0	-2	1
11.3	2	16	9	-1	4	4	11.4	1	13	3	-3	2	2
11.5	1	15	20	-2	2	10	11.6	2	5	5	2	2	-3
11.7	9	-21	-6	1	-5	6	11.8	0	0	13	2	-2	10
11.9	0	-6	12	1	-4	13	11.10	2	-13	39	1	-4	4
11.11	-4	-3	-3	0	2	1	11.12	1	-6	8	2	-2	4
11.13	0	3	13	-1	2	5	11.14	4	0	1	1	1	0
11.15	2	-10	24	-2	-2	-3	11.16	1	9	44	-1	4	13
11.17	1	3	-6	1	6	13	11.18	1	-3	12	1	-2	5
11.19	7	12	-7	3	1	-2	11.20	2	-7	11	1	-2	2
11.21	3	2	11	3	-2	1	11.22	1	3	2	-1	1	1
11.23	3	8	17	-2	2	1	11.24	1	5	9	10	4	20
11.25	5	5	-58	-4	2	-3	11.26	2	4	8	8	-4	5
11.27	3	3	7	6	4	-5	11.28	4	2	6	4	6	-75
11.29	5	1	5	2	-8	25	11.30	0	-4	5	-1	0	-1

12 задание . Найти свёртку функций $f(t)$ и $g(t)$ и её изображение.

№	$f(t)$	$g(t)$	№	$f(t)$	$g(t)$	№	$f(t)$	$g(t)$
12.1	$\cos t$	$\sin t$	12.2	e^{2t}	$\sin 3t$	12.3	$\cos t$	$\cos t$
12.4	t	$\sin 2t$	12.5	e^{t}	e^{-t}	12.6	$t+1$	$\sin t$
12.7	t	$\cos t$	12.8	e^{t}	$\cos 2t$	12.9	1	$\sin t$

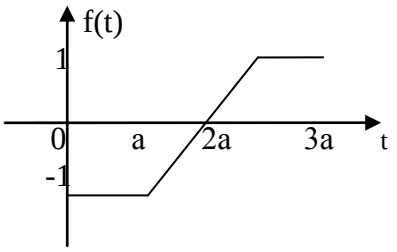
12.10	$\sin t$	$\sin t$	12.11	1	$\cos t$	12.12	1	e^{3t}
12.13	t	$ch3t$	12.14	e^{2t}	sht	12.15	e^{t}	$ch2t$
12.16	t	$sh3t$	12.17	$\cos 2t$	$\sin t$	12.18	e^{2t}	$\sin 6t$
12.19	$\cos t$	$\cos 2t$	12.20	t	$\sin 4t$	12.21	e^{3t}	e^{-t}
12.22	$t+2$	$\sin t$	12.23	$t+1$	$\cos t$	12.24	e^{t}	$\cos 4t$
12.25	1	$\sin 3t$	12.26	$\sin 2t$	$\sin t$	12.27	1	$\cos 4t$
12.28	$1+t$	e^{3t}	12.29	$t-2$	$ch3t$	12.30	e^{2t}	$sh5t$

13 задание . Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)$, применяя теорему умножения изображений.

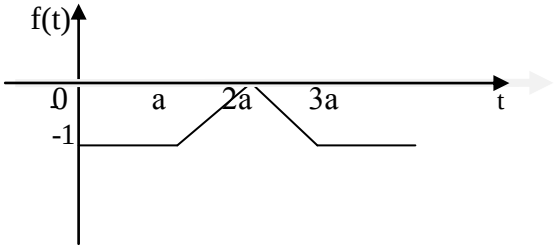
№	$F(p)$	№	$F(p)$	№	$F(p)$
13.1	$\frac{1}{(p-1)(p-2)}$	13.2	$\frac{1}{p^2-1}$	13.3	$\frac{1}{p^2(p^2+1)}$
13.4	$\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$	13.5	$\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$	13.6	$\frac{1}{p(p^2+1)}$
13.7	$\frac{1}{p^3(p-1)}$	13.8	$\frac{1}{(p^2+1)^2}$	13.9	$\frac{1}{(p-3)(p+2)}$
13.10	$\frac{1}{p^2-4}$	13.11	$\frac{1}{p^2(p^2+9)}$	13.12	$\frac{p^2}{(p^2+4)^2}$
13.13	$\frac{1}{p(p^2+4)}$	13.14	$\frac{1}{p^3(p+1)}$	13.15	$\frac{1}{(p-2)(p^2+1)}$
13.18	$\frac{1}{(p+1)(p-2)}$	13.17	$\frac{1}{p^2-9}$	13.18	$\frac{1}{p^2(p^2+9)}$
13.19	$\frac{p^2}{(p^2+9)^2}$	13.20	$\frac{1}{(p+3)(p^2+1)}$	13.21	$\frac{1}{p(p^2+16)}$
13.22	$\frac{1}{p^3(p-2)}$	13.23	$\frac{1}{(p^2+4)^2}$	13.24	$\frac{1}{(p+6)(p+2)}$
13.25	$\frac{1}{p^2-16}$	13.26	$\frac{1}{p^2(p^2+16)}$	13.27	$\frac{p^2}{(p^2+25)^2}$
13.28	$\frac{1}{p(p^2+25)}$	13.29	$\frac{1}{p^3(p+4)}$	13.30	$\frac{1}{(p-3)(p^2+4)}$

14 задание . По графику оригинала найти изображение полигональной функции.

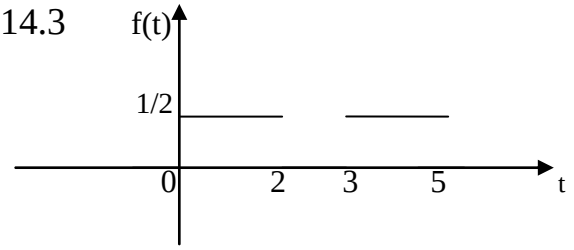
14.1



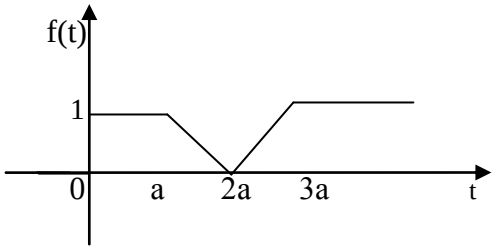
14.2



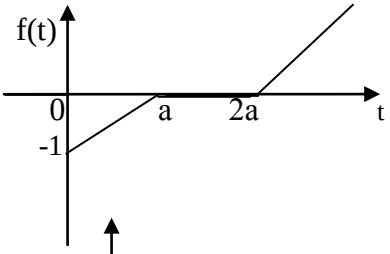
14.3



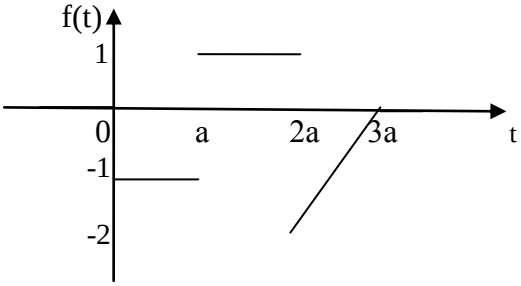
14.4



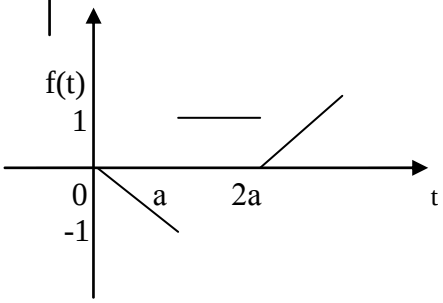
14.5



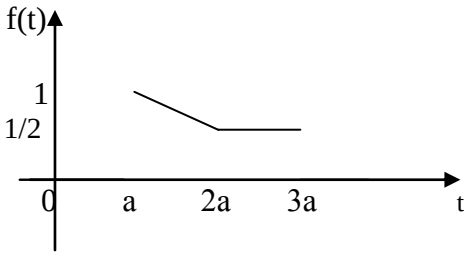
14.6



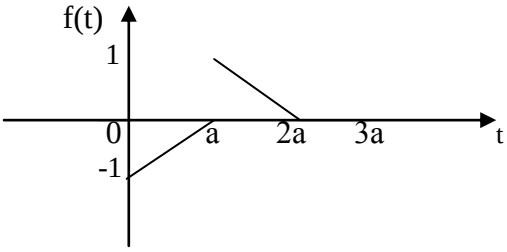
14.7



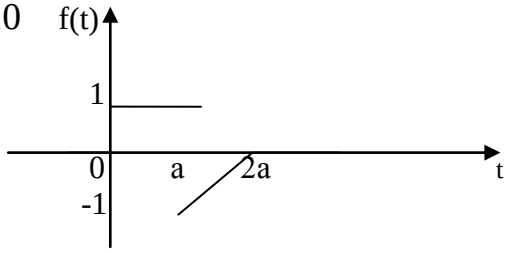
14.8



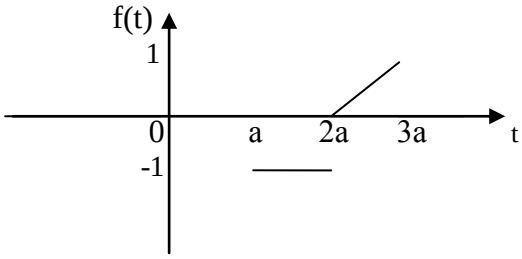
14.9



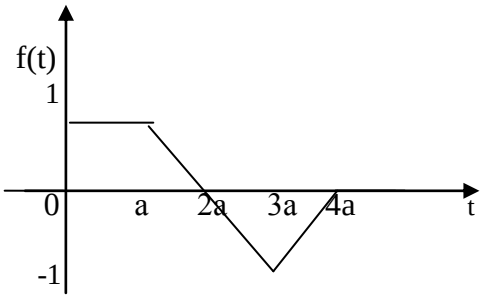
14.10



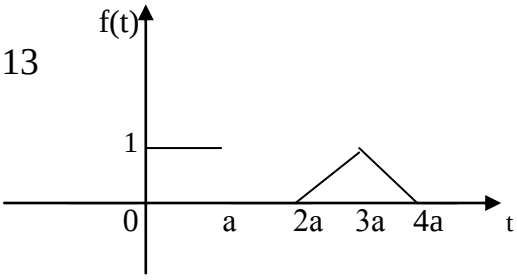
14.11



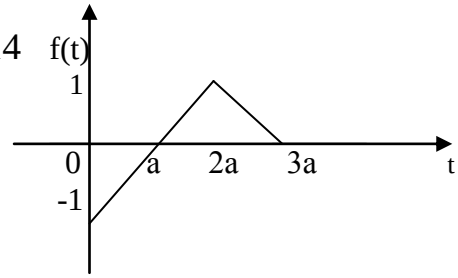
14.12



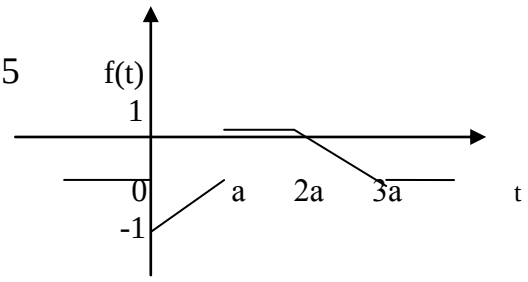
14.13



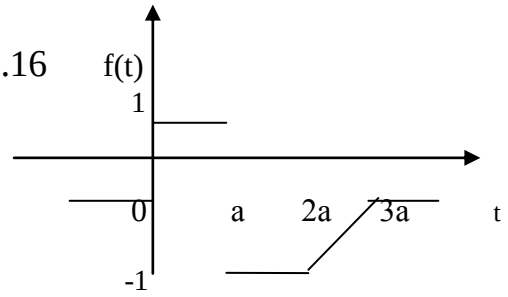
14.14



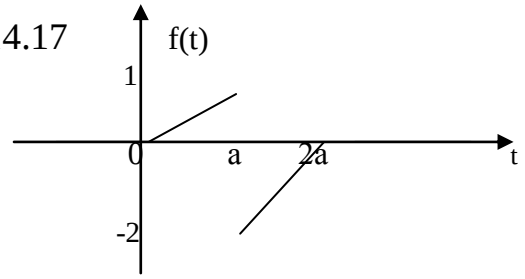
14.15



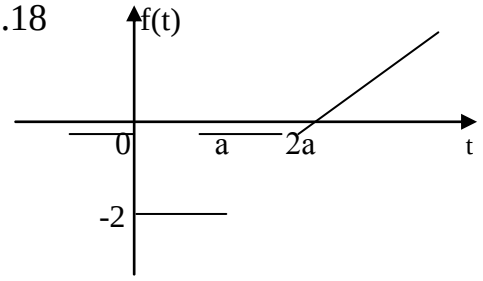
14.16



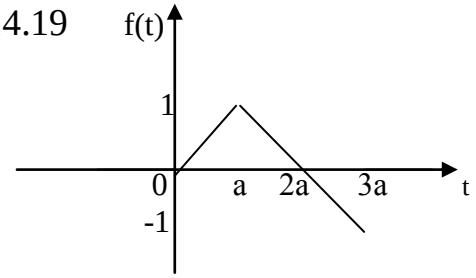
14.17



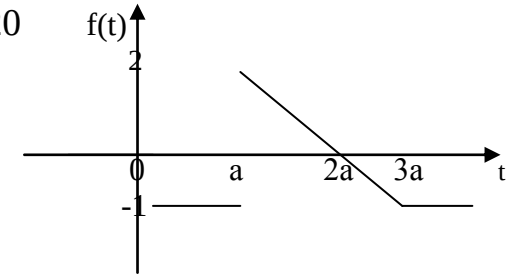
14.18



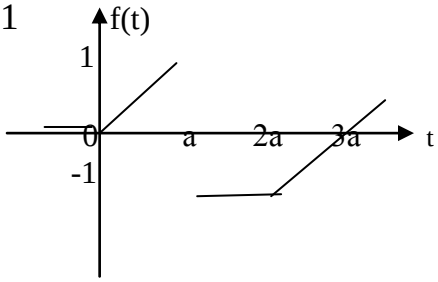
14.19



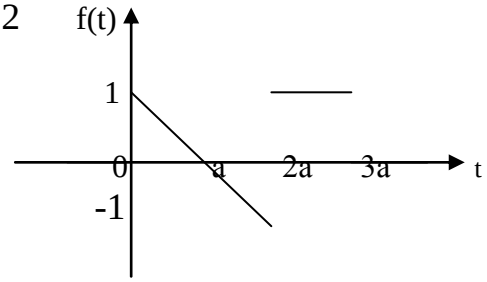
14.20



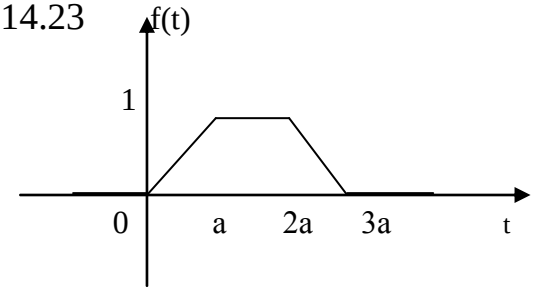
14.21



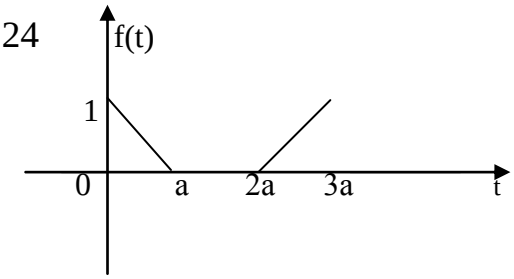
14.22



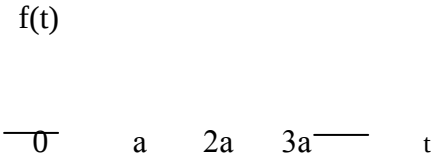
14.23



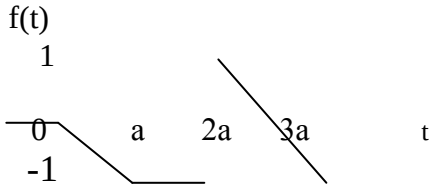
14.24

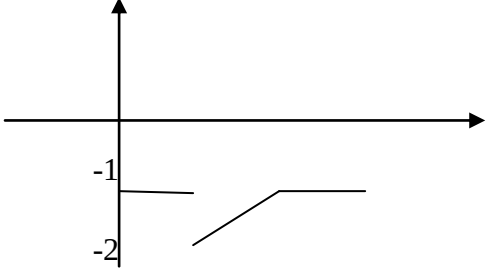


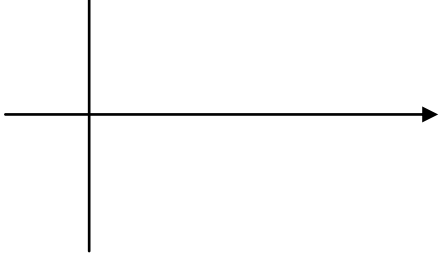
14.25



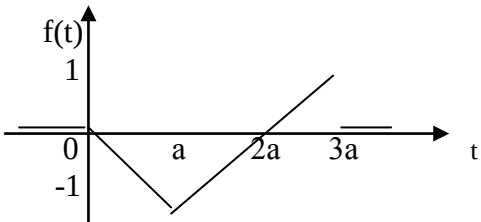
14.26



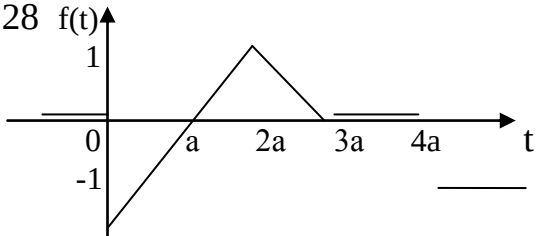




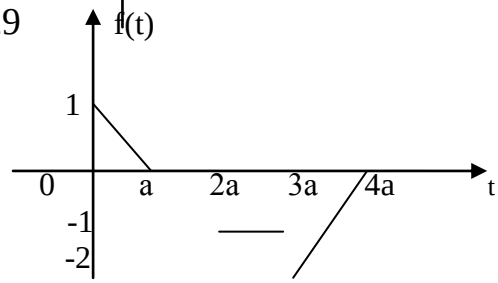
14.27



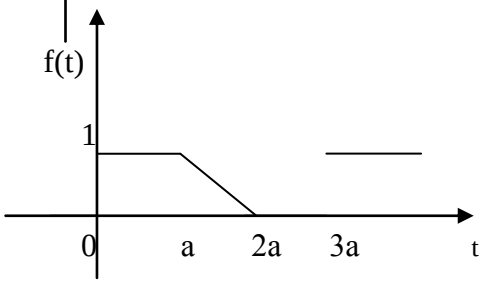
14.28



14.29



14.30



15 задание. Методом операционного исчисления решить задачу Коши.

15.1	$y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3, y'(0) = 1$	15.2	$y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
15.3	$y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = -2$	15.4	$y'' - y = \cos 3t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$
15.5	$y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 4$	15.6	$y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$
15.7	$y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$	15.8	$y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$
15.9	$2y'' - y' = \sin 2t$, $y(0) = 2, y'(0) = 1$	15.10	$y'' + 2y' = \sin\frac{t}{2}$, $y(0) = 0, y'(0) = 4$
15.11	$y'' + y' = sht$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$	15.12	$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
15.13	$y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$	15.14	$2y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
15.15	$y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$	15.16	$y'' + 4y' = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

15.17	$2y''+5y'=29\cos t,$ $y(0)=-1, y'(0)=0$	15.18	$y''+y'+y=t^2+t,$ $y(0)=1, y'(0)=-3$
15.19	$y''+4y=8\sin 2t,$ $y(0)=3, y'(0)=-1$	15.20	$y''-y'-6y=2,$ $y(0)=1, y'(0)=0$
15.21	$y''+4y=4e^{2t}+4t^2,$ $y(0)=1, y'(0)=2$	15.22	$y''+4y'+4y=t^3e^{2t},$ $y(0)=1, y'(0)=2$
15.23	$y''-3y'+2y=12e^{3t},$ $y(0)=2, y'(0)=6$	15.24	$y''+4y=3\sin t+10\cos 3t,$ $y(0)=-2, y'(0)=3$
15.25	$y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t,$ $y(0)=5, y'(0)=1$	15.26	$y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t,$ $y(0)=3, y'(0)=-1$
15.27	$y''+y=2\cos t,$ $y(0)=0, y'(0)=1$	15.28	$y''-2y'=e^t(t^2+t-3),$ $y(0)=2, y'(0)=2$
15.29	$y''+y=2\cos t,$ $y(0)=0, y'(0)=1$	15.30	$y''-y=4\sin t+5\cos 2t,$ $y(0)=-1, y'(0)=-2$

16 задание. Решить систему уравнений операционным методом.

16.1	$\begin{cases}\dot{x}=x+3y+2,\\ \dot{y}=x-y+1;\end{cases}$ $x(0)=-1, y(0)=2.$	16.2	$\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+1,\\ \dot{y}=x+y;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=2.$
16.3	$\begin{cases}\dot{x}=x+4y,\\ \dot{y}=2x-y+9;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$	16.4	$\begin{cases}\dot{x}=x+2y+1,\\ \dot{y}=4x-y;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$
16.5	$\begin{cases}\dot{x}=2x+5y,\\ \dot{y}=x-2y+2;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=1.$	16.6	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+5y+1,\\ \dot{y}=x+2y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=2.$
16.7	$\begin{cases}\dot{x}=3x+y,\\ \dot{y}=-5x-3y+2;\end{cases}$ $x(0)=2, y(0)=0.$	16.8	$\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=4x+y+1;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$
16.9	$\begin{cases}\dot{x}=-3x-4y+1,\\ \dot{y}=2x+3y;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=2.$	16.10	$\begin{cases}\dot{x}=x-2y+1,\\ \dot{y}=-3x;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$

16.11 $\begin{cases}\dot{x}=-2x+6y+1,\\ \dot{y}=2x+2;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$	16.12 $\begin{cases}\dot{x}=3y+2,\\ \dot{y}=x+2y;\end{cases}$ $x(0)=-1, y(0)=1.$
16.13 $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+1,\\ \dot{y}=4x-2y;\end{cases}$ $x(0)=-1, y(0)=0.$	16.14 $\begin{cases}\dot{x}=x+4y+1,\\ \dot{y}=2x+3y;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$
16.15 $\begin{cases}\dot{x}=x+2y,\\ \dot{y}=2x+y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=5.$	16.16 $\begin{cases}\dot{x}=2y,\\ \dot{y}=2x+3y+1;\end{cases}$ $x(0)=2, y(0)=1.$
16.17 $\begin{cases}\dot{x}=-x-2y+1,\\ \dot{y}=-(3/2)x+y;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$	16.18 $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+2,\\ \dot{y}=3x;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$
16.19 $\begin{cases}\dot{x}=2x-2y,\\ \dot{y}=-4x;\end{cases}$ $x(0)=3, y(0)=1.$	16.20 $\begin{cases}\dot{x}=4x+3,\\ \dot{y}=x+2y;\end{cases}$ $x(0)=-1, y(0)=0.$
16.21 $\begin{cases}\dot{x}=3x+5y+2,\\ \dot{y}=3x+y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=2.$	16.22 $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+2,\\ \dot{y}=x+y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$
16.23 $\begin{cases}\dot{x}=3x+2y,\\ \dot{y}=(5/2)x-y+2;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$	16.24 $\begin{cases}\dot{x}=x+3y+3,\\ \dot{y}=x-y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$
16.25 $\begin{cases}\dot{x}=2y+1,\\ \dot{y}=2x+3;\end{cases}$ $x(0)=-1, y(0)=0.$	16.26 $\begin{cases}\dot{x}=y+3,\\ \dot{y}=x+2;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$
16.27 $\begin{cases}\dot{x}=2x+8y+1,\\ \dot{y}=3x+4y;\end{cases}$ $x(0)=2, y(0)=1.$	16.28 $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2,\\ \dot{y}=4y+1;\end{cases}$ $x(0)=0, y(0)=1.$
16.29 $\begin{cases}\dot{x}=3y,\\ \dot{y}=3x+1;\end{cases}$ $x(0)=2, y(0)=0.$	16.30 $\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\\ \dot{y}=x-y;\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=0.$

2 Решение типового варианта

1. Представить заданную функцию $f(z)=\sin(2z+i)$, где $z=x+iy$, в виде $\omega=u(x,y)+iv(x,y)$; проверить, является ли функция аналитической. Если - да, то найти ее производную в точке $z_0=\pi/2$.

Решение: выделим действительную и мнимую части функции:

$\sin(2z+i) = /\, z = x+iy\, / = \sin\left[2x+i(2y+1)\right] = \sin 2x \cdot \cos i(2y+1) + \cos 2x \cdot$

$\sin i(2y+1) = \sin 2x \cdot ch(2y+1) + i\cos 2x \cdot sh(2y+1).$

$u(x,y) = \sin 2x \cdot ch(2y+1),$

$v(x,y) = \cos 2x \cdot sh(2y+1).$

Проверим выполнение условий Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos 2x \cdot ch(2y+1) = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin 2x \cdot sh(2y+1) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Они выполняются для всех (x,y), следовательно, функция аналитическая на всей комплексной плоскости и ее можно дифференцировать по известным правилам дифференцирования функций действительного переменного:

$f'(z) = 2\cos(2z+i),\quad f'(\pi/2) = 2\cos(\pi+i) = -2\cos i = -2ch1.$

2. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y) = e^x \cos y,\ f(0) = 1.$ Определить аналитическую функцию $f(z).$

Решение: в силу условий Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y. \quad (2)$$

Интегрируя уравнение (2) по переменной x, находим мнимую часть $v = e^x \sin y + C(y).$ (3)

Слагаемое $C(y)$ представляет постоянную (относительно x) интегрирования. Дифференцируя (3) по y и сопоставляя результат с (1), получаем $C'(y) = 0,$ откуда $C(y) = C.$

Таким образом, $v = e^x \sin y + C,$ и $f(z) = u + iv = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) + C.$

$f(z) = e^z + C.$ По условию $f(0) = 1,$ откуда C=0. Значит $f(z) = e^z.$

3. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

$\int\limits_L \left(1+i-2\overline{z}\right)dz$ по параболе $y = x^2.$

Решение: для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $\left(0 \le x \le 1\right).$

Следовательно, $\int\limits_L \left(1+i-2\overline{z}\right)dz = \int\limits_0^1 \left[1-2x-\left(1+2x^2\right)2x\right]dx +$

$$+i\int_0^1\left[1+2x^2+(1-2x)2x\right]dx=-2+\frac{4}{3}i.$$

4. Для данной функции $f(z)$ найти изолированные особые точки и определить их тип:

а) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

б) $e^{\frac{1}{z+2}}$;

в) $\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$.

Решение: а) особая точка функции $f(z)$ есть $z_0=0$.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, точка $z_0=0$ есть устранимая особая точка.

По определению точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0;

б) точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to -2} e^{\frac{1}{z+2}}$ не существует, поэтому точка $z_0=-2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$;

в) функция $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$ имеет две особые точки: $z_0=-1$, $z_0=0$.

Исследуем точку $z_0=-1$. Представим $f(z)$ в виде: $f(z)=\dfrac{\frac{1}{z^2}}{(z+1)^2}$,

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{z^2}$, причем $\varphi(-1)=1\neq 0$.

Следовательно, точка $z_0=-1$ является полюсом второго порядка данной функции.

Аналогично, записав функцию в виде $f(z)=\dfrac{\frac{1}{(z+1)^2}}{z^2}$, заключаем, что точка $z_0=0$ есть полюс второго порядка.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

5. Вычислить интеграл:

а) $\oint\limits_L \dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz,\ L:|z-2|=5;$

б) $\oint\limits_L \dfrac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

Решение: а) пользуясь интегральной формулой Коши в области, ограниченной окружностью $|z-2|=5,$ имеем две точки $z=0,\ z=6,$ в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль.

Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z-6}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z}$ на простейшие, чтобы применить интегральную формулу Коши $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\dfrac{f(z)dz}{z-z_0}.$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}dz=\frac{1}{6}2\pi i e^{36}-\frac{1}{6}2\pi i=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Или по теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}dz}{z}+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^{z^2}}{z}}{z-6}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6}=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

б) в области, ограниченной эллипсом, подынтегральная функция имеет две особые точки $z=-2,\ z=2.$ Эти точки - простые полюсы.

Найдем вычеты по формулам:

$$resf(z_0)=\underset{z\to z_0}{res}\ f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

или если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad resf(z_0)=\underset{z\to z_0}{res}\ f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$

$$f(z)=\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4},\qquad resf(2)=\underset{z\to 2}{res}\,f(z)=\lim_{z\to 2}\left[\frac{\cos\frac{z}{2}}{(z-2)(z+2)}(z-2)\right]=\frac{\cos 1}{4}.$$

$$resf(-2)=\underset{z\to -2}{res}\,f(z)=\lim_{z\to -2}\left[\frac{\cos\frac{z}{2}}{(z-2)(z+2)}(z+2)\right]=-\frac{\cos 1}{4}.$$

По теореме Коши о вычетах $\oint\limits_L f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}resf(z_k)$ получаем:

$$\oint\limits_L \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz=2\pi i\left(\frac{\cos 1}{4}-\frac{\cos 1}{4}\right)=0.$$

6. Найти изображение $F(p)$ функций:

а) $f(t)=t^4+7e^{2t}-4;$

б) $f(t)=\sin 5t\cdot\sin 3t,$ пользуясь теоремами линейности и подобия.

Решение: а) используя таблицу соответствия и теорему линейности, имеем: $t^4+7e^{2t}-4\div\frac{4!}{p^5}+7\frac{1}{p-2}-\frac{4}{p};$

преобразуем данную функцию $f(t)=\sin 5t\cdot\sin 3t$ по формулам тригонометрии $\sin 5t\cdot\sin 3t=\left|\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\right|=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 8t).$

б) применяя таблицу соответствия и теорему линейности, получим

$$\sin 5t\cdot\sin 3t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 8t)\div\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+64};$$

7. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)=e^{-8t}sh\,7t$, пользуясь теоремой смещения.

Решение: по таблице соответствия $sh\,7t\div\frac{7}{p^2-49}$. Применяя далее теорему смещения, получим: $e^{-8t}sh\,7t\div\frac{7}{(p+8)^2-49};$

8. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)=(t-1)^2$, пользуясь теоремой запаздывания.

Решение: по таблице соответствия $t^2 \div \frac{2}{p^3}$, а по теореме запаздывания $(t-1)^2 \div \frac{2}{p^3} \cdot e^{-p}$;

9. Найти изображение $F(p)$ функций пользуясь теоремой дифференцирования изображения и теоремой дифференцирования оригинала:

а) $f(t) = t^2 e^t$;

б) $f(t) = \cos^2 6t$.

Решение: а) по таблице соответствия $e^t \div \frac{1}{p-1}$, а по теореме о дифференцировании изображения

$$t^2 e^t \div (-1)^2 \left(\frac{1}{p-1}\right)'' = \left[-\frac{1}{(p-1)^2}\right]' = \frac{2}{(p-1)^3};$$

б) так как $f(t) = \cos^2 6t$, то

$$f'(t) = -12\cos 6t \cdot \sin 6t = -6\sin 12t \div -\frac{72}{p^2+144}.$$

По теореме дифференцирования оригинала:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0) = \left| f(0) = \cos^2 0 = 1 \right| = pF(p) - 1.$$

Таким образом, $-\frac{72}{p^2+144} = pF(p) - 1$, откуда $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{72}{p(p^2+144)}$.

10. Найти изображение $F(p)$ функции $\int_0^t e^t dt$, пользуясь теоремой интегрирования оригинала и найти изображение $F(p)$ функции $\frac{\sin t}{t}$, пользуясь теоремой интегрирования изображения.

Решение: по таблице $e^t \div \frac{1}{p-1}$. Поэтому по теореме об интегрировании оригинала $\int_0^t e^t dt \div \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$.

Так как $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то по теореме об интегрировании изображения

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = arctg\ p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - arctg\ p.$$

11. По заданному изображению $F(p)$ найти оригинал $f(t)$.

а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+6p+10)}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Решение: а) разложим дробно-рациональную функцию на сумму простых дробей:

$$F(p)=\frac{p^2}{(p-1)(p^2+6p+10)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+6p+10},$$

$$p^2=A(p^2+6p+10)+(Bp+C)(p-1)$$

при $p=1$ имеем: $1=17A, A=\dfrac{1}{17}$,

при p^2: $1=A+B, B=1-A=1-\dfrac{1}{17}=\dfrac{16}{17}$,

при p^0: $0=10A-C, C=10A=\dfrac{10}{17}$.

Таким образом, $F(p)=\dfrac{1}{17}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{17}\cdot\dfrac{16p+10}{p^2+6p+10}$.

По таблице соответствия $\dfrac{1}{p-1}\div e^t$; $\dfrac{16p+10}{p^2+6p+10}=\dfrac{16p+10}{(p+3)^2+1}=$

$$=\frac{16(p+3)-38}{(p+3)^2+1}=16\frac{p+3}{(p+3)^2+1}-38\frac{1}{(p+3)^2+1}\div 16e^{-3t}\cos t-38e^{-3t}\sin t.$$

Итак, искомый оригинал: $f(t)=\dfrac{1}{17}e^t+\dfrac{16}{17}e^{-3t}\cos t-\dfrac{38}{17}e^{-3t}\sin t.$

б) по таблице соответствия $\dfrac{1}{p^2+1}\div\sin t,$

и по теореме об интегрировании оригинала $\dfrac{1}{p(p^2+1)}\div\int\limits_0^t\sin t dt=-\cos t\Big|_0^t=1-\cos t.$

12. Найти свёртку функций t и e^t и её изображение.

Решение: свёртка функций $f(t)$ и $g(t)$ находится по формуле $f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Поэтому $t * e^t = \int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau = \int_0^t (t-\tau) e^\tau d\tau = (te^\tau - \tau e^\tau + e^\tau)\Big|_0^t = e^t - t - 1.$

Изображение свёртки найдём по таблице соответствия и теореме линейности

$$t * e^t = e^t - t - 1 \div \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

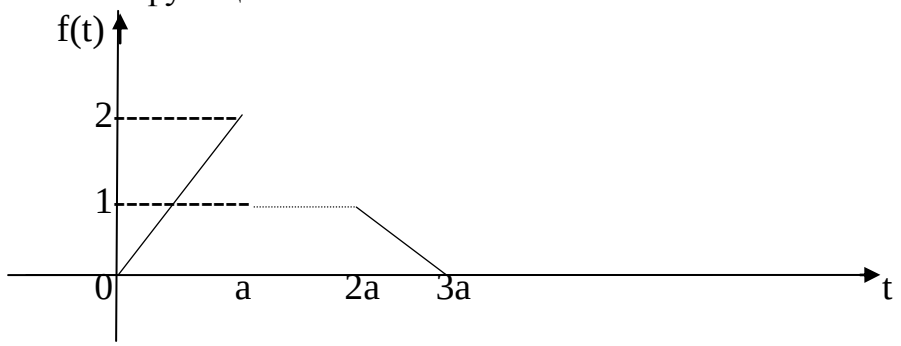
13. Найти оригинал функции $\frac{1}{(p+1)(p-3)}$, применяя теорему умножения изображений.

Решение: если $f(t) \div F(p), g(t) \div G(p),$ то по теореме умножения $F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p-3} \div e^{-t} * e^{3t} = \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{3(t-\tau)} d\tau = \ldots = -\frac{1}{4}(e^{-t} - e^{3t}).$$

14. По заданному графику оригинала найти изображение полигональной функции.



Решение: обозначим точки, в которых происходит разрыв или изменение функции через τ_k ; скачок функции в точке разрыва - через δ_k ; угловой коэффициент $k-$го участка - через a_k и разность угловых коэффициентов через $\alpha_k = a_{k+1} - a_k$. Изображение такого вида функций можно найти по формуле:

$$F(p) = \sum_k \left(\frac{\delta_k}{p} + \frac{\alpha_k}{p^2} \right) \cdot e^{-\tau_k p}.$$

В нашей задаче: $a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{a}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{a}, a_5 = 0.$

$\tau_1 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{2}{a} - 0 = \frac{2}{a}.$

$\tau_2 = a, \quad \delta_2 = 1 - 2 = -1, \quad \alpha_2 = 0 - \frac{2}{a} = -\frac{2}{a}.$

$$\tau_3 = 2a, \quad \delta_3 = 0, \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{a} - 0 = -\frac{1}{a}.$$

$$\tau_4 = 3a, \quad \delta_4 = 0, \qquad \alpha_4 = 0 - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \left(\frac{0}{p} + \frac{2}{ap^2}\right) \cdot e^0 + \left(\frac{-1}{p} - \frac{2}{ap^2}\right) \cdot e^{-ap} + \left(\frac{0}{p} - \frac{1}{ap^2}\right) \cdot e^{-2ap} + \left(\frac{0}{p} + \frac{1}{ap^2}\right) \cdot e^{-3ap} =$$

$$= \frac{2}{ap^2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{ap^2}\right) \cdot e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} \cdot e^{-2ap} + \frac{1}{ap^2} \cdot e^{-3ap}.$$

15. Методом операционного исчисления решить задачу Коши:

$y'' + 4y = \sin 2t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Решение: пусть $y(t) \div Y(p)$, тогда по теореме дифференцирования оригинала $y''(t) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1.$

По таблице соответствия $\sin 2t \div \dfrac{2}{p^2 + 4}.$

Операторное уравнение имеет вид: $p^2 Y(p) - 1 + 4Y(p) = \dfrac{2}{p^2 + 4}.$

Откуда $Y(p)(p^2 + 4) = \dfrac{2}{p^2 + 4} + 1, \quad Y(p) = \dfrac{2}{(p^2 + 4)^2} + \dfrac{1}{p^2 + 4}.$

По таблице соответствия $\dfrac{1}{p^2 + 4} \div \dfrac{1}{2} \cdot \sin 2t.$

Оригинал изображения $\dfrac{2}{(p^2 + 4)^2}$ можно найти по теореме умножения:

$$\frac{2}{(p^2+4)^2} = \frac{2}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4} \div \sin 2t * \frac{1}{2}\sin 2t =$$

$$\int_0^t \sin 2\tau \cdot \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)d\tau = 2\left(\frac{1}{16}\sin 2t - \frac{t}{8}\cos 2t\right).$$

Таким образом, искомое решение:

$$y(t) = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t.$$

16. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 0.$$

Решение: пусть x(t)=X(p), y(t)=Y(p). Составим операторную систему, используя свойства преобразования Лапласа, таблицу 1 и начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p)+1=4X(p)-3Y(p)+\dfrac{1}{p^2+1} \\ pY(p)=2X(p)-Y(p)-\dfrac{2p}{p^2+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (p-4)X(p)+3Y(p)=\dfrac{-p^2}{p^2+1} \\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=-\dfrac{2p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Решаем эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-4 & 3 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}=p^2-3p+2=(p-1)(p-2),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{-p^2}{p^2+1} & 3 \\ \dfrac{-2p}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{-p^3-p^2+6p}{p^2+1}, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} p-4 & \dfrac{-p^2}{p^2+1} \\ -2 & \dfrac{-2p}{p^2+1} \end{vmatrix}=\frac{-4p^2+8p}{p^2+1}.$$

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}, \quad Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}.$$

Для определения $x(t)$ и $y(t)$ разложим эти функции на сумму простых дробей:

$$\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+1},$$

$$\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{B_1}{p-2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+1}.$$

Известным способом найдем A=-1, B=0, C=1, D=-1,A_1=-2,B_1=0,C_1=2,D_1=-2.

Таким образом, $X(p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{p-1}{p^2+1}\div -e^t+\cos t-\sin t,$

$$Y(p)=-\frac{2}{p-1}+2\frac{p-1}{p^2+1}\div -2e^t+2\cos t-2\sin t.$$

Ответ: $x(t)=-e^t+\cos t-\sin t,$

$y(t)=2(-e^{-t}+\cos t-\sin t).$

3 Краткая теоретическая часть

3.1 Свойства преобразования Лапласа

Пусть $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$.

1 $Af(t)+Bg(t) \div AF(p)+BG(p)$, (теорема линейности) .

2 $f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, (теорема подобия).

3 $e^{at} f(t) \div F(p-a)$, (теорема смещения).

4 $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$, ($\tau > 0$, теорема запаздывания).

5 $f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0)$, $f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$,…

$f^{(n)} \div p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$,

(теорема дифференцирования оригинала).

6 $\int_0^t f(z)dz \div \frac{F(p)}{p}$, (теорема интегрирования оригинала).

7 $(-t) f(t) \div F'(p)$, …, $(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \div F^{(n)}(p)$,

(теорема дифференцирования изображения).

8 $\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(z)dz$, (теорема интегрирования изображения) .

9 $f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \div F(p)G(p)$, (теорема умножения изображений) .

10 $pF(p)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) = g'(t) * f(t) + g(0) f(t)$,

(интеграл Дюамеля).

3.2 Таблица - Оригинал-изображение

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)}$
2	$\mathring{a}^{at}$	$\frac{1}{p-a}$	8	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)}$
3	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	10	$t^n \mathring{a}^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$sh\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6	$ch\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	12	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$

Контрольные вопросы

1 Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
2 Интегрирование. Интегральная формула Коши.
3 Теория вычетов. Интегрирование с помощью вычетов.
4 Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения.
5 Теоремы линейности, подобия, смещения, запаздывания.
6 Теоремы дифференцирования и интегрирования оригиналов и изображений.
7 Свёртка функций. Теорема умножения.
8 Теорема обращения. Нахождение оригинала по известному изображению.
9 Применение преобразования Лапласа при решении дифференциальных уравнений и систем.

Список литературы

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.-М.: Высш.шк., 1986.-Ч.2-352с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3ч. /А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, и др./ Под ред. А.П.Рябушко.-Минск: Вышэйшая школа, 1991.-Ч.3.-351с.
3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: Типовые расчеты.-М.: Высш.шк., 1983.-176с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.:Наука,1971.-256 с.
5. Хасеинов К.А. Каноны математики. Учебник – Алматы: 2003.-686 с.
6. Математика 3. Конспект лекций для студентов всех форм обучения всех специальностей. Алматинский институт энергетики и связи: 2007.

Содержание

Введение 3
Расчетно-графическая работа . Функции комплексного переменного и операционное исчисление 4
1 Расчетные задания 4
2 Решение типового варианта 16
3 Краткая теоретическая часть 25
3.1 Свойства преобразования Лапласа 25
3.2 Таблица оригинал-изображение 26
Контрольные вопросы 26
Список литературы 27

Сводный план 2013 г., поз.179