Коммерциялық емес
Акционерлы қоғам

АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика
кафедрасы

МАТЕМАТИКА 1

5В073100 – Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қаупсіздігі,
5В071600 – Аспап жасау мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Алматы 2015

Құрастырушылар: А.К.Искакова, А.М.Бексултанова. Математика 1. 5В073100 – Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қаупсіздігі, 5В071600 – Аспап жасау мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. – Алматы, 2015 -59 б.

«Математика 1» пәні бойынша әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар 5В073100 – Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қаупсіздігі, 5В071600 – Аспап жасау мамандықтарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған.

Студенттер, жалпы кредиттің санына сәйкес, таңдап алынған бағыттарына байланысты үш есептеу-сызбалық жұмыстарды орындайды. Әрбір модульдің көлемі мен мазмұны білімалушылардың жастық психологиялық ерекшеліктерімен АЭжБУ-да қолданған студенттердің аттестациялау графигіне сай анықталған. Материалдарды беру жолдары пәнаралық байланыстарға сәйкес жасалынған.

Бағдарламаның негізгі теориялық сұрақтары мен типтік нұсқаның шешуі келтірілген.

Кестелер – 31, сызба – 7, әдеб.көрсеткіші – 7.

Пікір беруші: доцент Қ.С.Чежимбаева

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2015ж. жоспары бойынша басылды.

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2015 ж.

2015 ж. Жтынтық жоспары, реті 171

Искакова Ақжолтай Құрмантаевна
Бексултанова Алтынай Молыбаевна

МАТЕМАТИКА 1

5В073100 – Қоршаған ортаны қорғау және өмір тіршілігінің қаупсіздігі,
5В071600 – Аспап жасау мамандықиарының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Редакторы Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басуға қол қойылды _____
Таралымы 60 дана
Көлемі оқу-бас.ә. 4,1

Пішіні 60х84 1/16
№1 типографиялық қағаз
Тапсырыс_____ Бағасы 2050 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқауда «Математика 1» пәнінің бағдарламасы АЭжБУ-да пайдаланып жүрген оқу бағдарламасына сәйкес модульдер (мөлшерлік) түрінде құрастырылған. Бұл модульдер міндетті түрде бақылау жұмыстарымен аяқталады. Барлық студенттер, жалпы кредиттің санына сәйкес, таңдап алынған бағыттарына байланысты үш модульден оқиды. Әрбір модульдің көлемі мен мазмұны білім алушылардың жастық психологиялық ерекшеліктерімен АЭжБУ-да қолданған студенттердің аттестациялау графигіне сай анықталған. Қажетті теориялық материалдар мен теориялық сұрақтар келтірілген.

Әрбір студент өз нұсқасын топ тізіміндегі нөмірі бойынша анықтайды. Есептеу-сызба жұмыстары оқушы дәптеріне орындалуы тиіс. Барлық есептер анық және түсінікті жазылуы керек.

ЕСЖ мақсаты: пәнді оқу барысында жоғары математика курсының типтік оқу бағдарламасы көлемінде студенттің векторлық және сызықтық алгебра элементтерін, аналитикалық геометрия тарауын игеруіне және оларды қолданбалы есептерді шешуде тиімді әдістерді пайдалана білуге дағдыландыру.

Еесептеу-сызба жұмыстары жеке жұқа дәптерде орындалады, әр тапсырманың екінші цифры нұсқаның номірін білдіреді.

Теориялық сұрақтар

№1 есептеу-сызба жұмысы. 1-модуль. Сызықтық және векторлық алгебра, аналитикалық геометрия

1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар, олардың қасиеттері.
2. Алгебралық толықтауыштар және минорлар.
3. Матрица. Кері матрица, оны есептеу әдісі.
4. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін матрицалық әдісімен шешу.
5. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу.
6. Векторлар, оларға амалдар қолдану.
7. Векторлардың скалярлы, векторлық, аралас көбейтінділер, олардын қасиеттері. Вектор ұзындығы. Векторлар арасындағы бұрыш.
8. Векторлардың коллинеарлық және компланарлық шарттары.
9. R^3 кеңістіктегі жазықтық теңдеуі.
10. R^2 жазықтықтағы бірінші ретті сызықтар (түзудің жалпы теңдеуі, бұрыштық коэффициенті арқылы берілген түзу теңдеуі, кесінділердегі түзу теңдеуі, екі берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі).
11. R^3 кеңістіктегі түзудің теңдеуі.
12. Жазықтықтағы екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеулері.
13. Эллипс, гипербола және параболаның канондық теңдеулері.

2-модуль. Математикалық талдаудың элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функциялардың дифференциалдық есептеулері.

1. Сандық тізбек және оның шегі.
2. Функция ұғымы. Функция шегі.
3. Тамаша шектер.
4. Үзіліссіздік. Үзіліс нүктелер, олардың классификациясы.
5. Құрделі, параметрлік және айқын емес түрде берілген функциялар, олардың туындылары.
6. Функция дифференциалы, қасиеттері және қолдануы.
7. Жоғары ретті туындылар.
8. Анықталмағандықтарды Лопиталь ережесі бойынша ашу.
9. Бірінші ретті туындылар көмегімен функцияны зерттеу (өсу, кему, экстремумдар).
10. Бірінші ретті туындылар көмегімен функцияны зерттеу (ойыс және дөнес облыстары).
11. Екінші ретті туындылар көмегімен функцияны зерттеу (ойыс және дөнес облыстары, иілу нүктесі).
12. Асимптоталар.
13. Функцияны зерттеу, жалпы сұлбасы.
14. Тейлор және Маклорен формулалары.

3-модуль. Математикалық талдаудың элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функциялардың интегралдық есептеулері.

1. Анықталмаған интеграл (анықтамасы, қасиеттері).
2. Интегралдаудың негізгі әдістері.
3. Рационал функцияларды интегралдау.
4. Анықталған интеграл (Ньютон – Лейбниц формуласы, қасиеттері).
5. Анықталған интегралды интегралдау әдістері.
6. Анықталған интегралдын қолданулары.

№1 есептеу-сызба жұмысы. 1-модуль. Сызықтық және векторлық алгебра, аналитикалық геометрия

Тапсырмалар.

1-тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген. Табу керек:

а) a_{ij} элементінің M_{ij} минорын және A_{ij} алгебралық толықтауышын;

б) анықтауышты екі әдіспен есептеу: үшбұрыштар (Саррюс) ережесі бойынша және жол (баған) бойынша жіктеу арқылы.

1.1	$\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.3	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$

1.4	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, i=1, j=1$	1.5	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.6	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.7	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.8	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.9	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}, i=2, j=2$
1.10	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=2$	1.11	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.12	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=2$
1.13	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=3$	1.14	$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.15	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i=3, j=1$
1.16	$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, i=2, j=2$	1.17	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.18	$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.19	$\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.20	$\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.21	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=1$
1.22	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.23	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.24	$\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, i=1, j=2$
1.25	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.26	$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.27	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix}, i=3, j=2$
1.28	$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.29	$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.30	$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=3$

2-тапсырма. *A*, *B*, *C* матрицалары берілген. Табу керек:

а) *AB* және *BC* матрицалар көбейтіндісін (бар болса). Көбейтінді мүмкін емес жағдайды түсіндіріңіз;

б) *A* матрицасына кері A^{-1} матрицасын.

2.1	$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 6 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -3 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

2.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 11 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -4 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 6 & 4 & 1\end{pmatrix}$
2.3	$A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 3 & 1 & -8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -5\\ 0 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\end{pmatrix}$
2.4	$A=\begin{pmatrix}7 & 6 & -4\\ 1 & 1 & 8\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
2.5	$A=\begin{pmatrix}7 & 7 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -8 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9\\ 8\\ 1\end{pmatrix}$
2.6	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 6 & 4 & 11\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 9 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$
2.7	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ -4 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
2.8	$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 4 & 9 & 11\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & 8\\ 3 & 1 & -8 & 1\end{pmatrix}$
2.9	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 5 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\end{pmatrix}$
2.10	$A=\begin{pmatrix}11 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15 & 0 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 9 & 16\\ 3 & 8\end{pmatrix}$
2.11	$A=\begin{pmatrix}14 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -4\\ 7 & 1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 3 & 6 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$
2.12	$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 2 & 1 & -11\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 16\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 10 & -2\\ -3 & 3 & 5\end{pmatrix}$

2.13	$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 5 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -5 & 9\\ 1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
2.14	$A=\begin{pmatrix}8 & -2 & 4\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -4 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 13\\ 4 & -6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & -11 & 10 & 0\\ -3 & 9 & -2 & 1\end{pmatrix}$
2.15	$A=\begin{pmatrix}-8 & 1 & 6\\ 3 & 3 & -7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\end{pmatrix}$
2.16	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ 1 & -5 & 6\\ -4 & 1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\\ 1 & -9\end{pmatrix}$
2.17	$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 8 & -5 & 7\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$
2.18	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ 9 & -3 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 12\\ -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -5\end{pmatrix}$
2.19	$A=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
2.20	$A=\begin{pmatrix}9 & 3 & -1\\ -45 & 1 & 2\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 1\\ 7 & 9 & 10 & -12\end{pmatrix}$
2.21	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 7 & 3\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 5\\ 3 & 4\\ -6 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 7 & -1\end{pmatrix}$
2.22	$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

2.23	$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\ 2 & 6 & -3\end{pmatrix}$, $=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$
2.24	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$
2.25	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 5 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
2.26	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 5\\ -4 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$
2.27	$A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 4\end{pmatrix}$
2.28	$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 5\\ 5 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3-тапсырма. *A* және *B* нүктелері мен $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары берілген. Табу керек:

а) $|\bar{a}|=|\overline{AB}|$ векторынын модулін (ұзындығын) және *AB* кесіндінің ортасын;

б) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ скаляр көбейтіндісін, $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ векторлық көбейтіндісін және $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ аралас көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары арқылы құрылған пирамиданың көлемін.

3.1	A(5, -4, 3), B(1, 2, -8), $\bar{b}$=(0, 1, 4), $\bar{c}$=(5, 2, -3)	3.2	A(-3, 1, 0), B(7, 1, -5), $\bar{b}$=(7, 1, 4), $\bar{c}$=(5, 8, -3)
3.3	A(0, 4, 5), B(3, -2, 1), $\bar{b}$=(6, 4, 4), $\bar{c}$=(0, 2, -2)	3.4	A(3, -2, 5), B(4, 5, 7), $\bar{b}$=(5, 1, 4), $\bar{c}$=(5, -3, -3)
3.5	A(2, -3, 7), B(3, 2, 8), $\bar{b}$=(6, 4, 6), $\bar{c}$=(0, 6, -2)	3.6	A(2, -1, 7), B(6, 3, 4) , $\bar{b}$=(4, 5, 4), $\bar{c}$=(7, 8, 5)
3.7	A(3, 1, 7), B(2, -3, 9), $\bar{b}$=(9, 1, 4), $\bar{c}$=(8, 2, -3)	3.8	A(2, 1, -6), B(1, 4, 9), $\bar{b}$=(1, 1, 8), $\bar{c}$=(5, -3, 9)
3.9	A(2, -4, 8), B(5, 4, 7), $\bar{b}$=(6, 3, 4), $\bar{c}$=(7, 2, -2)	3.10	A(3, 2, 5), B(4, 0, -3), $\bar{b}$=(7, 2, 4), $\bar{c}$=(5, 8, 4)
3.11	A(2, 3, -1),B(-6, 4, 2), $\bar{b}$=(2, 9, 6), $\bar{c}$=(0, 6, 4)	3.12	A(-4, 2, 3), B(8, 7, -2), $\bar{b}$=(5, 3, 4), $\bar{c}$=(5, 3, 4)
3.13	A(5, 3, 6), B(-2, 3, 5), $\bar{b}$=(6, 2, 4), $\bar{c}$=(7, 2, -7)	3.14	A(0, 6, 0), B(5, 3, -4), $\bar{b}$=(8, 5, 3), $\bar{c}$=(7, 8, 7)
3.15	A(4, 2, 0), B(1, -7, 8), $\bar{b}$=(2, 8, 6), $\bar{c}$=(0, 6, 3)	3.16	A(4, 2, 5), B(-1, 0, 6), $\bar{b}$=(2, 1, 8), $\bar{c}$=(5, 9, 9)
3.17	A(3,-5, 8), B(6, 3, 9), $\bar{b}$=(7, 3, 4), $\bar{c}$=(3, 2, -2)	3.18	A(7, 2, 2), B(-5, 7, -7), $\bar{b}$=(6, 1, 3), $\bar{c}$=(1, 8, 7)
3.19	A(5, -3, 1), B(2, 3, 7), $\bar{b}$=(2, 7, 6), $\bar{c}$=(7, 6, 4)	3.20	A(8, -6, 4), B(10, 5, 1), $\bar{b}$=(9, 1, 8), $\bar{c}$=(4, 9, 1)
3.21	A(5, 6,-8), B(8, 10,7), $\bar{b}$=(1, 3, 4), $\bar{c}$=(3, 6, -2)	3.22	A(1, -1, 3), B(6, 5, 8), $\bar{b}$=(7, 8, 3), $\bar{c}$=(1, 8, 9)
3.23	A(3, 5,-7), B(8, 4, 1), $\bar{b}$=(2, 5, 6), $\bar{c}$=(7, 6, 8)	3.24	A(6, -6, 5), B(4, 9, 5), $\bar{b}$=(6, 1, 4), $\bar{c}$=(0, 9, 1)
3.25	A(4,6,11), B(9,3,-4), $\bar{b}$=(3, 7, 6), $\bar{c}$=(8, 6, 4)	3.26	A(5, 7, 4),B(4,-10, 9), $\bar{b}$=(8, 1, 7), $\bar{c}$=(4, 5, 1)
3.27	A(-9, 8, 9), B(7, 1,-2), $\bar{b}$=(7, 2, 4), $\bar{c}$=(5, 2, -1)	3.28	A(5, 2, 6), B(1, 8, -2), $\bar{b}$=(4, 2, 3), $\bar{c}$=(2, 3, 7)
3.29	A(2, 8, -9), B(7, 5,-5), $\bar{b}$=(8, 1, 6), $\bar{c}$=(6, 1, 4)	3.30	A(-2, 7, 0), B(6, 3, 5), $\bar{b}$=(2, -3, 8), $\bar{c}$=(3, 9, 2)

4-тапсырма. Жазықтықта A_1, A_2 нүктелер және L_1 түзуінің теңдеуі берілген. Жазу керек:

а) A_1, A_2 екі нүктелерден өтетін L_2 түзудің теңдеуін;

б) L_2 түзудің жалпы теңдеуін;

в) бұрыштық коэффициенті бар L_2 түзудің теңдеуін;

г) кесіндідегі L_2 түзудің теңдеуін;

д) A_2 нүктеден өтетін және L_1 түзуіне перпендикуляр L_3 түзудің теңдеуін.

4.1	$A_1(-1,6),\ A_2(-1,7),\ L_1: 7x-4y-1=0$	4.2	$A_1(5,1),\ A_2(1,-3),\ L_1: x+6y+3=0$
4.3	$A_1(10,2),\ A_2(-1,5),\ L_1: x+2y-8=0$	4.4	$A_1(-6,3),\ A_2(1,-7),\ L_1: 5x-7y+9=0$
4.5	$A_1(2,4),\ A_2(-2,3),\ L_1: 4x-4y+1=0$	4.6	$A_1(-4,1),\ A_2(8,-1),\ L_1: 8x-y+6=0$
4.7	$A_1(-1,7),\ A_2(-2,4),\ L_1: 2x-3y+2=0$	4.8	$A_1(4,1),\ A_2(7,-1),\ L_1: 3x-5y+4=0$
4.9	$A_1(2,1),\ A_2(-1,-4),\ L_1: 6x-8y+5=0$	4.10	$A_1(-7,1),\ A_2(1,-6),\ L_1: 9x-9y+7=0$
4.11	$A_1(6,5),\ A_2(-5,1),\ L_1: 2x-2y-10=0$	4.12	$A_1(-3,3),\ A_2(8,-2),\ L_1: x-3y+3=0$
4.13	$A_1(-4,7),\ A_2(3,1),\ L_1: 6x-7y-1=0$	4.14	$A_1(5,2),\ A_2(6,-2),\ L_1: 8x-y+5=0$
4.15	$A_1(1,8),\ A_2(6,-4),\ L_1: 4x-6y-2=0$	4.16	$A_1(4,8),\ A_2(4,-1),\ L_1: 7x-9y+4=0$
4.17	$A_1(9,1),\ A_2(-1,2),\ L_1: 3x+4y+8=0$	4.18	$A_1(-8,1),\ A_2(1,-3),\ L_1: 5x-5y+7=0$
4.19	$A_1(6,1),\ A_2(-3,2),\ L_1: 9x-8y+6=0$	4.20	$A_1(-4,4),\ A_2(3,-3),\ L_1: 3x-5y+2=0$
4.21	$A_1(-4,1),\ A_2(5,1),\ L_1: 7x-2y+5=0$	4.22	$A_1(7,1),\ A_2(5,-2),\ L_1: x-9y+8=0$
4.23	$A_1(-2,2),\ A_2(7,3),\ L_1: 4x-7y-6=0$	4.24	$A_1(-1,6),\ A_2(4,-1),\ L_1: 5x-y+9=0$
4.25	$A_1(7,2),\ A_2(-1,3),\ L_1: 2x+8y-3=0$	4.26	$A_1(3,1),\ A_2(6,-2),\ L_1: 8x-3y+1=0$
4.27	$A_1(5,2),\ A_2(-4,1),\ L_1: 6x-4y-4=0$	4.28	$A_1(-3,6),\ A_2(3,-14),\ L_1: x-6y+5=0$
4.29	$A_1(-4,2),\ A_2(5,3),\ L_1: 5x-5y-5=0$	4.30	$A_1(5,1),\ A_2(4,-1),\ L_1: 3x-7y+7=0$

5-тапсырма. A_1, A_2, A_3 нүктелер берілген. Жазу керек:

а) A_1, A_2, A_3 нүктелерден өтетін P_1 жазықтықтың теңдеуін;

б) P_1 жазықтықтың теңдеуін жалпы түрде;

в) P_1 жазықтықтың теңдеуін кесіндідегі теңдеу түрінде;

г) P_1 жазықтықтың теңдеуін A_1 нүктеден өтетін жазықтықтын жалпы теңдеуі түрінде;

д) $L_1 = (A_2A_3)$ түзудің канондық теңдеуін;

е) $L_1 = (A_2A_3)$ түзудін параметрлік теңдеуін;

ж) P_1 жазықтығына перпендикуляр $L_2 = (A_1N)$ түзуінің теңдеуін.

5.1	$A_1(-1,6,5),\ A_2(-1,7,1),\ A_3(4,-6,2)$	5.2	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$
5.3	$A_1(3,4,5),\ A_2(3,-9,1),\ A_3(4,5,7)$	5.4	$A_1(-3,4,2),\ A_2(9,5,1),\ A_3(4,-3,-1)$
5.5	$A_1(0,8,5),\ A_2(3,-2,4),\ A_3(2,5,6)$	5.6	$A_1(2,5,6),\ A_2(3,-7,8),\ A_3(5,4,-2)$
5.7	$A_1(-1,4,2),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,40,7)$	5.8	$A_1(1,9,-1),\ A_2(2,6,1),\ A_3(2,8,-6)$
5.9	$A_1(-1,4,2),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(4,4,7)$	5.10	$A_1(5,4,1),\ A_2(3,-4,2),\ A_3(1,7,4)$
5.11	$A_1(-1,4,5),\ A_2(3,-5,1),\ A_3(4,6,2)$	5.12	$A_1(-1,4,1),\ A_2(1,-462),\ A_3(6,7,2)$
5.13	$A_1(0,9,5),\ A_2(4,-2,4),\ A_3(2,7,6)$	5.14	$A_1(-1,3,5),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,5,2)$
5.15	$A_1(3,4,-1),\ A_2(1,-7,2),\ A_3(1,7,2)$	5.16	$A_1(-1,4,1),\ A_2(1,-4,6),\ A_3(3,7,2)$
5.17	$A_1(1,4,1),\ A_2(1,8,1),\ A_3(4,3,-6)$	5.18	$A_1(0,9,5),\ A_2(4,-2,4),\ A_3(2,7,6)$
5.19	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$	5.20	$A_1(8,4,-1),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,2,7)$
5.21	$A_1(1,8,-3),\ A_2(2,8,1),\ A_3(6,3,-6)$	5.22	$A_1(5,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,6,2)$
5.23	$A_1(8,4,-1),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,2,7)$	5.24	$A_1(1,8,-3),\ A_2(2,8,1),\ A_3(6,3,-6)$
5.25	$A_1(1,4,-2),\ A_2(9,8,1),\ A_3(4,-3,-6)$	5.26	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$
5.27	$A_1(2,5,-1),\ A_2(3,-7,8),\ A_3(5,9,-2)$	5.28	$A_1(9,-5,6),\ A_2(3,2,-7),\ A_3(-5,1,-2)$
4.29	$A_1(1,8,-1),\ A_2(2,6,1),\ A_3(2,3,-6)$	4.30	$A_1(3,9,1),\ A_2(-4,6,1),\ A_3(2,7,5)$

6-тапсырма. Берілген жүйені шешу керек:

а) Крамер әдісімен;

б) матрицалық әдісімен (кері матрицалар көмегімен).

6.1	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.2	$\begin{cases} 4x+y=-3 \\ x+2y=1 \end{cases}$	6.3	$\begin{cases} 5x+y=2 \\ -x+2y=3 \end{cases}$
6.4	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$	6.5	$\begin{cases} 8x+y=-3 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.6	$\begin{cases} 6x+y=2 \\ -x+2y=4 \end{cases}$
6.7	$\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$	6.8	$\begin{cases} 4x+y=-3 \\ 6x+2y=11 \end{cases}$	6.9	$\begin{cases} 9x+y=2 \\ -x-3y=3 \end{cases}$

6.10	$\begin{cases}2x+5y=7\\x+3y=1\end{cases}$	6.11	$\begin{cases}4x+y=-3\\x+7y=1\end{cases}$	6.12	$\begin{cases}7x+y=2\\-x+3y=4\end{cases}$
6.13	$\begin{cases}2x+y=7\\x+3y=1\end{cases}$	6.14	$\begin{cases}2x+y=7\\6x+2y=1\end{cases}$	6.15	$\begin{cases}5x+6y=2\\-x+2y=3\end{cases}$
6.16	$\begin{cases}x+8y=3\\2x+3y=1\end{cases}$	6.17	$\begin{cases}8x+y=7\\x+2y=1\end{cases}$	6.18	$\begin{cases}6x-y=6\\-x+2y=4\end{cases}$
6.19	$\begin{cases}4x+3y=7\\x+3y=-1\end{cases}$	6.20	$\begin{cases}-3x+y=7\\6x+3y=11\end{cases}$	6.21	$\begin{cases}7x+y=2\\-x+2y=3\end{cases}$
6.22	$\begin{cases}x+2y=13\\x+3y=1\end{cases}$	6.23	$\begin{cases}3x-y=12\\x+2y=6\end{cases}$	6.24	$\begin{cases}7x+y=2\\-x+2y=4\end{cases}$
6.25	$\begin{cases}2x+y=7\\x+3y=1\end{cases}$	6.26	$\begin{cases}7x-y=2\\x+2y=6\end{cases}$	6.27	$\begin{cases}x-4y=7\\x+y=6\end{cases}$
6.28	$\begin{cases}2x+y=-3\\6x+2y=1\end{cases}$	6.29	$\begin{cases}x-y=12\\x+2y=6\end{cases}$	6.30	$\begin{cases}x-y=2\\x+2y=5\end{cases}$

7-тапсырма. Теңдеулер жүйесі берілген.

а) жүйенің бірге шешуін Гаусс әдісімен тексеріңіз;

б) егер жүйе бірге шешу мүмкін болса, оны шешіңіз;

в) берілген және кеңейтілген матрицаларының рангісін табыңыз.

7.1	$c)\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1\\2x_1+4x_2-5x_3=11\\2x_1-4x_2+2x_3=2\end{cases}$	7.16	$c)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-5\\x_1+x_2+x_3=1\\2x_1-2x_2+4x_3=-10\end{cases}$
7.2	$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=-7\\x_1+3x_2-x_3=11\\-x_1+2x_2-2x_3=7\end{cases}$	7.17	$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=-7\\x_1+3x_2-x_3=11\\-x_1-3x_2+x_3=-11\end{cases}$
7.3	$\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9\\x_1+x_2-x_3=-2\\-x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$	7.18	$\begin{cases}-x_1-3x_2+x_3=-11\\x_1+3x_2-x_3=11\\4x_1-2x_2+x_3=2\end{cases}$
7.4	$\begin{cases}2x_1-2x_2+10x_3=2\\x_1-x_2+5x_3=1\\4x_1-4x_2-9x_3=0\end{cases}$	7.19	$\begin{cases}6x_1+10x_2-8x_3=10\\4x_1-9x_2+5x_3=1\\7x_1-4x_2+x_3=11\end{cases}$
7.5	$\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3=19\\2x-x_2+2x_3=11\\x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$	7.20	$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\4x_1+x_2+4x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=4\end{cases}$
7.6	$\begin{cases}3x_1+3x_2+15x_3=18\\2x_1-2x_2+2x_3=4\\x_1+x_2+5x_3=6\end{cases}$	7.21	$\begin{cases}2x_1-3x_2-4x_3=1\\-2x_1+3x_2+4x_3=-1\\5x_1-6x_2+3x_3=7\end{cases}$

7.7	$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=4 \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36 \\ x_1-4x_2-2x_3=-19 \end{cases}$	7.22	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ 5x_1+x_2+3x_3=4 \\ 4x_1+2x_2+2x_3=4 \end{cases}$
7.8	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$	7.23	$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1-2x_3=5 \end{cases}$
7.9	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$	7.24	$\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15 \\ 3x_1+x_2+4x_3=13 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$
7.10	$\begin{cases} 5x_1-2x_2-4x_3=-16 \\ x_1+3x_3=-6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$	7.25	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+4x_2-7x_3=2 \\ 5x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$
7.11	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12 \\ x_1+2x_2+4x_3=6 \\ 5x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases}$	7.26	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=9 \\ 5x_1-x_2+2x_3=11 \\ x_1+2x_2+4x_3=19 \end{cases}$
7.12	$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=-5 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ -2x_1-2x_2+2x_3=-4 \end{cases}$	7.27	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8 \end{cases}$
7.13	$\begin{cases} 2x_1-10x_2+2x_3=6 \\ 3x_1+2x_2-x_3=7 \\ x_1-5x_2+x_3=3 \end{cases}$	7.28	$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5 \\ 2x_1+3x_2-7x_3=12 \\ x_1-2x_2+3x_3=-1 \end{cases}$
7.14	$\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10 \end{cases}$	7.29	$\begin{cases} 2x_1+8x_2-7x_3=0 \\ 2x_1-5x_2+6x_3=1 \\ 4x_1+3x_2-x_3=7 \end{cases}$
7.15	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8 \\ x_1+x_2+2x_3=11 \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$	7.30	$\begin{cases} -3x_1+5x_2+6x_3=-8 \\ 3x_1+x_2+x_3=-4 \\ x_1-4x_2-2x_3=-9 \end{cases}$

8-тапсырма. *A* нүктесі, шеңбер радиусы *R*, *a*,*b* қисықтардың жартылай осьтері және *D* түзуінің теңдеуі берілген:

а) центрі *A* нүктесінде, радиусы *R* тең шеңбердің теңдеуін жазу керек;

б) жартылай осьтері *a* және *b* болатын эллипстің канондық теңдеуін жазып, онын фокустарымен эксцентриситетін табу керек;

в) нақты осі *a*, жорамал осі *b* болатын гиперболанын канондық теңдеуін жазып, онын фокустарын, эксцентриситетін және асмптоталар теңдеуін табу керек;

г) *D* директрисасы болатын параболаның канондық теңдеуін жазып, онын фокустарын және эксцентриситетін табу керек;

д) эллипс, гипербола және параболаның сызбаларын салу керек.

8.1	*A(2,-4), R=4, a=1, b=3, D: x=-5*	8.2	*A(-8,2), R=1, a=6, b=5, D: x=-5*
8.3	*A(1,-4), R=5, a=8, b=3, D: y=-6*	8.4	*A(5,-4), R=2, a=6, b=4, D: y=-2*
8.5	*A(2,-5), R=7, a=3, b=2, D: x=4*	8.6	*A(1,8), R=5 , a=3, b=2, D: x=-3*
8.7	*A(3,-4), R=9, a=7, b=6, D: y=-2*	8.8	*A(10,1), R=8, a=1, b=6, D: y=-4*
8.9	*A(5,-4), R=1, a=6, b=4, D: x=-5*	8.10	*A(6,3), R=8 , a=2, b=3, D: x=-5*
8.11	*A(1,-3), R=5 , a=8, b=2, D: y=6*	8.12	*A(5,5), R=2, a=1, b=3, D: y=-7*
8.13	*A(2,-6), R=7, a=3, b=4, D: x=5*	8.14	*A(12,6), R=7, a=6, b=2, D: x=-5*
8.15	*A(3,4), R=9 , a=2, b=6, D: y=-8*	8.16	*A(0,5), R=4, a=6, b=4, D: y=8*
8.17	*A(2,-9), R=7, a=5, b=2, D: x=6*	8.18	*A(-5,0), R=7, a=4, b=5, D: x=1*
8.19	*A(8,4), R=6 , a=8, b=5, D: y=2*	8.20	*A(5,1), R=2, a=9, b=1, D: x=-1*
8.21	*A(5,-4), R=4, a=6, b=4, D: x=1*	8.22	*A(-3,2), R=4, a=8, b=4, D: y=1*
8.23	*A(1,8), R=5, a=9, b=4, D: y=-6*	8.24	*A(9,1), R=6, a=4, b=7, D: x=-3*
8.25	*A(2,-5), R=7, a=7, b=4, D: x=9*	8.26	*A(-9,2), R=7, a=1, b=8, D: y=7*
8.27	*A(7,4), R=5, a=1, b=7, D: y=8*	8.28	*A(11,-4), R=2, a=2, b=4, D: x=8*
8.29	*A(-2,5), R=5, a=7, b=1, D: x=8*	8.30	*A(12,4), R=7, a=3, b=5, D: y=-9*

9-тапсырма. Екінші ретті беттердің түрін (атауын) анықтап, сызбасын салу керек.

9.1	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$	9.2	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=z$
9.3	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$	9.4	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=-z$
9.5	$x^2+y^2+z^2=1$	9.6	$-\frac{z^2}{6}=4y$
9.7	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$	9.8	$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}=2y$
9.9	$x^2+z^2=4$	9.10	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$
9.11	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=-1$	9.12	$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$
9.13	$x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$	9.14	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$
9.15	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=z$	9.16	$-x^2+y^2+z^2=-1$
9.17	$\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{4}=y$	9.18	$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{6}=1$
9.19	$x^2+y^2+z^2=16$	9.20	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$
9.21	$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=2z$	9.22	$-\frac{z^2}{6}=4y$
9.23	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{1}=1$	9.24	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$

9.25	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	9.26	$x^2+z^2=5$
9.27	$\frac{x^2}{3}=3z$	9.28	$x^2+z^2=4y$
9.29	$y^2+\frac{z^2}{9}=6x$	9.30	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$

10-тапсырма. Екінші ретті сызықты канондық түріне келтіріп, сызбасын салу керек.

10.1	$-16-4x-64y-64=0$	10.2	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$
10.3	$x^2-y^2-4y-4=0$	10.4	$-y^2+12x-2y-25=0$
10.5	$-3y^2+2x-12y+30=0$	10.6	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$
10.7	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$	10.8	$-y^2+8x-2y-9=0$
10.9	$4y^2+8x+16y+30=0$	10.10	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$
10.11	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$	10.12	$y^2-8x+8y+32=0$
10.13	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$	10.14	$4x^2+8x+2y+30=0$
10.15	$4y^2+8x+12y+10=0$	10.16	$y^2+4x+8y+16=0$
10.17	$x^2+6x-2y+30=0$	10.18	$3x^2-4y^2+18x+20=0$
10.19	$9x^2+10y^2+40y-50=0$	10.20	$4y^2-2x+8y+28=0$
10.21	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	10.22	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
10.23	$x^2+6x-2y+5=0$	10.24	$4x^2+8x-6y+28=0$
10.25	$-5y^2+x+20y-6=0$	10.26	$x^2+2y^2-2x+8y+7=0$
10.27	$2x^2-2y^2+2x=0$	10.28	$x^2+8x-2y-16=0$
10.29	$9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$	10.30	$x^2+8x+2y+20=0$

Типтік нұсқаның шешуі.

1-тапсырма. Үшінші ретті анықтауыш берілген

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, i=2,\ j=3.$$

Табу керек:

а) $i=2;\ j=3$ тең болғанда a_{ij} элементінің M_{ij} минорын және A_{ij} алгебралық толықтауышын;

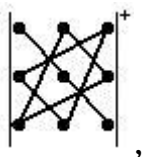
б) анықтауышты екі әдіспен: үшбұрыштар (Саррюс) ережесі бойынша және жол (баған) бойынша жіктеу арқылы.

Шешуі. а) a_{ij} элементінің M_{ij} миноры деп берілген анықтауштың *i*-ші жолын, *j*-ші бағанын сызып тастағанда алынған анықтауышты атайды. Сонда берілген анықтаушта 2-ші жолын 3-ші бағанын сызып тастағанда 2-ші ретті анықтауыш аламыз

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-1\cdot 4=11.$$

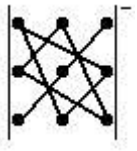
a_{ij} элементінің алгебралық толықтаушысы $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ формула бойынша есептеледі, яғни $A_{23}=(-1)^5 M_{23}=-11$;

б) *1-ші әдіс* - үшбұрыштар (Саррюс) ережесі: үшінші ретті анықтауыш келесі сұлба бойынша есептелетін алты мүшенің қосындысына тең – үш оң таңбалы мүшелер



,

үш теріс таңбалы мүшелер



.

Сондықтан

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot(-2)+4\cdot 8\cdot 1+0\cdot 5\cdot(-1)-1\cdot 2\cdot(-1)-3\cdot 8\cdot 5-4\cdot 0\cdot(-1)=-98.$$

2-ші әдіс – үшінші баған бойынша жіктеу формуласы

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}.$$

Сонда

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}+8\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-98.$$

2-тапсырма. *A*, *B*, *C* матрицалары берілген

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -7 & 1\\ 4 & -1 & 3 & -6\end{pmatrix}.$$

Табу керек:

а) *AB* және *BC* матрицалар көбейтіндісін (бар болса). Көбейтінді мүмкін емес жағдайды түсіндіріңіз;

б) A матрицасына кері A^{-1} матрицасын.

Шешуі. а) Берілген матрицалардың өлшемі: $A_{3\times3}, B_{3\times2}, C_{2\times4}$. Егер $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=D_{m\times k}$ орындалса, матрицаларды көбейтуге болады. $A_{3\times3}\cdot B_{3\times2}=D_{3\times2}$. D матрицасының d_{ij} элементі A матрицасының i- жолын B матрицасының j - бағанына көбейткенге тең.

$$\begin{pmatrix}3&0&2\\1&-1&3\\4&-1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-3\\-3&6\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+0\cdot(-3)+2\cdot1&3\cdot(-3)+0\cdot6+2\cdot7\\1\cdot4+(-1)\cdot(-3)+3\cdot1&1\cdot(-3)+(-1)\cdot6+3\cdot7\\4\cdot4+(-1)\cdot(-3)+6\cdot1&4\cdot(-3)+(-1)\cdot6+6\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&5\\10&12\\25&24\end{pmatrix}.$$

$B_{3\times2}\cdot C_{2\times4}=D_{3\times4}$.

$$\begin{pmatrix}4&-3\\-3&6\\1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-7&1\\4&-1&3&-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot2+(-3)\cdot4&4\cdot3+(-3)\cdot(-1)&4\cdot(-7)+(-3)\cdot3&4\cdot1+(-3)\cdot(-6)\\(-3)\cdot2+6\cdot4&(-3)\cdot3+6\cdot(-1)&(-3)\cdot(-7)+6\cdot3&(-3)\cdot1+6\cdot(-6)\\1\cdot2+7\cdot4&1\cdot3+7\cdot(-1)&1\cdot(-7)+7\cdot3&1\cdot1+7\cdot(-6)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4&15&-37&22\\18&-15&39&-39\\30&-4&14&-41\end{pmatrix}$$

$B_{3\times2}\cdot A_{3\times3}$ көбейтіндісі орындалмайды, себебі B матрицасының бағандар саны A матрицасының жолдар санына тең емес;

б) Егер шаршы $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ матрицасы үшін оның $\det A\neq0$ болса, онда оның A^{-1} кері матрицасы бар және

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Кері матрицаны табу формуласы:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij} - a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы;

$$\det A=\begin{vmatrix}3&0&2\\1&-1&3\\4&-1&6\end{vmatrix}=-3\neq0.$$

Енді барлық элементтерінің алгебралық толықтауышын табайық.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & 6\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 6\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=10,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 6 & 10 & -7\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Тексеру жүргізсек:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 6 & 10 & -7\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 6 & 10 & -7\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3-тапсырма. *A* және *B* нүктелері мен $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары берілген. Табу керек:

а) $|\bar{a}|=|\overline{AB}|$ векторының модулін (ұзындығын) және *AB* кесіндінің ортасын;

б) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ скаляр көбейтіндісін, $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ векторлық көбейтіндісін және $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ аралас көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары арқылы құрылған пирамиданың көлемін.

Шешуі. Егер $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ берілген болса, онда $\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Егер $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ векторы берілсе оның ұзындығын $|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ формуласы бойынша анықтаймыз. *AB* кесіндінің ортасы келесідей анықталады:

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Біздің жағдайда:

$\vec{a}=\vec{AB}=((-6)-(-2),3-7,-1-0)=(-4,-4,-1)$;

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{33}$; $\quad C\left(\frac{-2-6}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{0-1}{2}\right) = \left(-4{,}5, -\frac{1}{2}\right)$.

б) егер $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ болса, онда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = (-4)\cdot(-3) + (-4)\cdot 4 + (-1)\cdot 1 = 12 - 16 - 1 = -5.$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_t \\ b_x & b_y & b_t \end{vmatrix};$$

$$\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} + 9\vec{j} - 33\vec{k} = (1, 9, -33);$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \qquad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

в) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары арқылы құрылған пирамиданың көлемін

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

формуласы бойынша табамыз.

$\vec{a} = (-4, -4, -1)$ болғандықтан, олардың аралас кобейтіндісі төмендегі анықтауышқа тең:

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 4\cdot 0 + (-4)\cdot 1\cdot 9 + (-3)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 9 - (-1)\cdot 1\cdot(-4) -$$

$$-(-4)\cdot(-3)\cdot 0 = 0 - 36 - 3 + 36 - 4 - 0 = -7.$$

Сонымен, пирамиданың көлемі

$$V = \frac{1}{6}\cdot|-7| = \frac{1}{6}\cdot 7 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$$

4-тапсырма. Жазықтықта L_1: $x+4y+5=0$ түзудің теңдеуі және A_1 (4;-2), A_2 (8;1) нүктелер берілген. Жазу керек:

а) A_1, A_2 екі нүктелерден өтетін L_2 түзудің теңдеуін;

б) L_2 түзудің жалпы теңдеуін;

в) бұрыштық коэффициенті бар L_2 түзудің теңдеуін;

г) кесіндідегі L_2 түзудің теңдеуін;

д) A_2 нүктеден өтетін және L_1 түзуіне перпендикуляр L_3 түзудің теңдеуін.

Шешуі. а) (x_1, y_1) және (x_2, y_2) екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Сонда L_2 теңдеуі келесі түрде жазылады

$$\frac{x-4}{8-4}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{3};$$

б) L_2 түзудің жалпы теңдеуі $Ax+By+C=0$:

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{3} \rightarrow 3x-12=4y+8 \rightarrow 3x-4y-20=0, \quad (A=3,\ B=-4,\ C=-20).$$

A және B коэффициенттерінің геометрикалық мағынасы: A және B коэффициенттері L_2 түзуінің нормалді (перпендикуляр) векторының координаталары, яғни $\overline{N}=(A,B)=(3,-4)\perp L_2$ векторы;

в) бұрыштық коэффициенті бар L_2 түзудің теңдеуі $y=kx+m$:

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{3} \rightarrow \frac{3}{4}(x-4)=y+2 \rightarrow y=\frac{3}{4}x-5, \quad (k=\frac{3}{4},\ m=-5);$$

г) кесіндідегі L_2 түзудің теңдеуі $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$:

$$3x-4y=20 \rightarrow \frac{x}{20/3}+\frac{y}{-5}=1 \quad (a=20/3,\ \ b=-5);$$

,

д) (x_1, y_1) нүктеден өтетін және $\bar{b}=(m,n)$ векторына параллель тузудің теңдеуі

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

$\overline{N_1}=(A,B)=(-1;4)$ векторы L_1 түзуіне перпендикуляр, ал L_3 түзуі L_1 түзуіне перпендикуляр болса, онда есеп шарты бойынша бағыттаушы вектор $\bar{b}=(m,n)=\overline{N_1}=(-1;4)$ болады және теңдеу келесі түрде жазылады

$$L_3\perp L_1: \frac{x-8}{-1}=\frac{y-1}{4}.$$

5-тапсырма. A_1 (1, 2, -1), A_2 (3, 3, 2), A_3 (2, -3, 7) нүктелер берілген:

а) $P_1=(A_1A_2A_3)$ жазықтықтың теңдеуін табу керек;

б) P_1 жазықтықтың теңдеуін жалпы түрде жазу керек;

в) P_1 жазықтықтың теңдеуін кесіндідегі теңдеу түрінде жазу керек;

г) P_1 жазықтықтың теңдеуін A_1 нүктеден өтетін жазықтықтың жалпы теңдеуі түрінде жазу керек;

д) $L_1=(A_2A_3)$ түзудің канондық теңдеуін;

е) $L_1 = (A_2A_3)$ түзудің параметрлік теңдеуін;

ж) P_1 жазықтығына перпендикуляр $L_2 = (A_1N)$ түзудің теңдеуін.

Шешуі. а) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) нүктелерінен өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сонда P_1:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3-1 & 3-2 & 2+1 \\ 2-1 & -3-2 & 7+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*);$$

б) (*) анықтауышты ашып P_1 жазықтықтың теңдеуін жалпы түрде аламыз $Ax+By+Cz+D=0$:

$$23x - 13y - 11z - 8 = 0, \quad (A=23,\ B=-13,\ C=-11,\ D=-8).$$

A, B, C коэффициенттерінің геометрикалық мағынасы – $\overline{N} = (23,-13,-11) \perp P_1$ векторы.

в) жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі бос мүшесін теңдеудің оң жағына шығарып, теңдеудің екі жағын 8 санына бөліп, жазықтықтың кесіндідегі теңдеуін аламыз

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1:$$

$$\frac{x}{8/23} + \frac{y}{-8/13} + \frac{z}{-8/11} = 1,$$

мұндағы $a=8/23$, $b=-8/13$, $c=-8/11$ –бас нүктеден бастап, координаттар остерін қиятын кесінділер;

г) (*) анықтауышты 1-ші жол арқылы жіктеп, $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ түріндегі теңдеуді аламыз:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 23(x-1)-13(y-2)-11(z+1)=0.$$

мұндағы $(x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1)$;

д) (x_1, y_1, z_1) және (x_2, y_2, z_2), нүктелерден өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Онда L_1 түзуінің теңдеуі

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-3}{-3-3} = \frac{z-2}{7-2} \qquad \text{немесе} \qquad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{5};$$

е) түзудің канондық теңдеуі мына түрде жазылады

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{немесе} \quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5},$$

мұндағы $\bar{a}(m,n,p)$ – бағыттаушы вектор.

Параметрлі түрде берілген түзудің теңдеуі мына түрде жазылады

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0. \end{cases}.$$

Параметрлі түрде берілген түзуді алу үші канондық теңдеудің әр бөлігін t параметіріне теңістіріп, алынған теңдеулерден x, y, z табамыз

$$L_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5}, \quad t\to\begin{cases} \frac{x-3}{-1}=t\to x=-t+3, \\ \frac{y-3}{-6}=t\to y=-6t+3, \\ \frac{z-2}{5}=t\to z=5t+2. \end{cases}$$

Сонымен, L_1 түзуінін параметрлік теңдеуі

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-6t+32 \\ z=5t+2; \end{cases}$$

ж) $(A_1N)\perp P_1$ болғандықтан, $\overline{N}=(23,-13,-11)\perp P_1$ векторы $L_2=(A_1N)$ түзудің бағыттаушы векторы, онда $L_2=(A_1N)$ теңдеуінің канондық теңдеуі

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{-13}=\frac{z+1}{11}.$$

6-тапсырма. Берілген жүйені шешу керек:

а) Крамер әдісімен;

б) матрицалық әдісімен (кері матрицалар көмегімен)

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ -3x+4y=3. \end{cases}.$$

Шешуі. а) берілген жүйенің

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

шешімін Крамер әдісі бойынша келесі түрде іздейміз

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

мұндағы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - берілген жүйенін анықтауышы;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ - қосымша анықтауыштар, оларды берілген жүйенін анықтауышының бірінші және екінші бағандарын бос мүшелер бағанымен алмастырғанда аламыз.

Сонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Осыдан, x=-1/5, y=3/5. Есеп жауабын вектор түрінде жазуға болады:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix};$$

б) берілген жүйенің

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

шешімі матрицалық түрінде жазылуы:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

мұндағы $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрица–баған;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрица-баған;

A^{-1} матрицасы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ берілген матрицаның кері матрицасы.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының кері A^{-1} матрицасын табамыз (2б мысалын қараңыз). $|A| = \Delta = 10 \neq 0$ болғандықтан кері матрица бар

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Онда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

Есеп жауабы: x=-1/5, y=3/5.

7-тапсырма. Теңдеулер жүйесі берілген

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ 2x - 3y + 4z = 2, \\ 3x - 3y - z = -7. \end{cases}$$

а) жүйенің бірге шешуін Гаусс әдісімен тексеріңіз;

б) берілген және кеңейтілген матрицаларының рангісін табыңыз;

в) егер жүйе бірге шешу мүмкін болса, оны шешіңіз.

Шешуі. а) берілген жүйенің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кеңейтілген матрица $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

A матрицасы кеңейтілген $\overline{A}$ матрицасының құрамында болғандықтан, кеңейтілген $\overline{A}$ матрицасының қарастыру жеткілікті. Бірінші жолды -2 көбейтіп, матрицаның екінші жолына қосамыз. Бірінші жолды 3 санына көбейтіп, матрицаның үшінші жолына қосамыз. Нәтижесінде кеңейтілген $\overline{A}$ матрицасының, сонымен қатар A матрицасында үш нольге тең емес жолдары бар сатылы матрица түріне келтірілді:

$$\overline{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix};$$

б) Кронекер-Капелли теоремасы бойынша $r_A = r_{\overline{A}} = 3$, яғни жүйені бірге шешуге болады және жүйенің бір ғана шешімі бар;

в) берілген жүйе келесі түрге келтірілді:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ -2y - 6z = -4, \\ -16z = -16. \end{cases}.$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен бастап шешімдерді табамыз:

$x_3 = 1;\ -x_2 = -4 + 6 \cdot 1 = 2,\ x_2 = -2;\ x_1 = 3 + (-2) - 5 \cdot 1 = -4.$

Жауабы: (-4; -2; 1).

8-тапсырма. $A(3;-7)$ нүктесі, шеңбер радиусы R=6; $a = 2$; $b = 3$ қисықтардың жартылай осьтері және D түзудің теңдеуі y=-3 берілген. Табу керек:

а) центрі A нүктесінде, радиусы R тең шеңбердің теңдеуін;

б) жартылай осьтері *a* және *b* болатын эллипстің канондық теңдеуін жазып, онын фокустарымен эксцентриситетін;

в) нақты осі *a*, жорамал осі *b* болатын гиперболаның канондық теңдеуін жазып, оның фокустарын, эксцентриситетін және асимптоталар теңдеуін;

г) *D* директрисасы бар параболаның канондық теңдеуін жазып, оның фокустарын және эксцентриситетін;

д) эллипс, гипербола және параболаның сызбаларын салу.

Шешуі. а) центрі (x_0, y_0) нүктесінде жататын радиусы *R*-ге тең шеңбердің теңдеуі $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, сонда: $(x-3)^2+(y+7)^2=36$;

б) эллипстің канондық теңдеуі

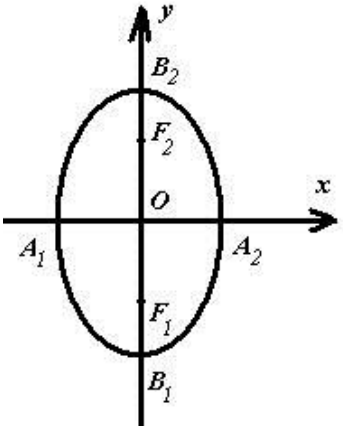
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

Осыдан $a=2;\ b=3$ болғанда

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Эллипс фокустары $F_1(-c.0), F_2=(c,0)$ нүктелер, егер $a>b$ және $c=\sqrt{a^2-b^2}$ болса, эллипс эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}$ тең, ал егер $b>a$, онда $c=\sqrt{a^2-b^2}$ және $F_1(0,-c), F_2=(0,c)$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Есеп шарты бойынша $b>a$, онда, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ эксцентриситеті тең $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $(\varepsilon<1)$. Фокустары *Oy* осінде жатады: $F_1(0,-\sqrt{5}), F_2=(0,\sqrt{5})$. Эллипстың сызбасын саламыз (1 сурет), мұндағы A_1, A_2, B_1, B_2 - эллипс төбелері;



1 сурет

в) нақты осі *a*, жорамал осі *b* болатын гиперболаның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нақты осі b және жорамал осі a

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{немесе} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

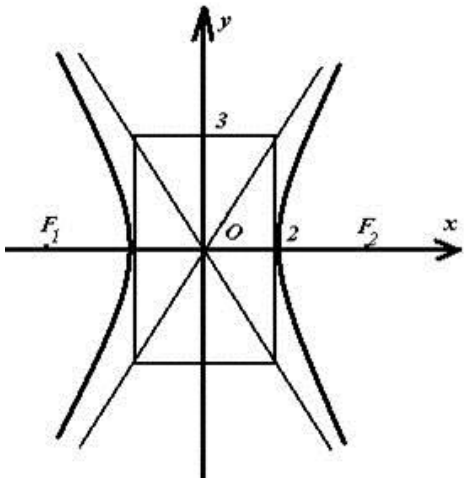
Нақты осі a болатын гиперболаның эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}$ тең, $c=\sqrt{a^2+b^2}$; гиперболаның асимптоталар теңдеуі $y=\pm\frac{b}{a}x$, фокустары – $F_1(-c.0), F_2=(c,0)$.

Есеп шарты бойынша a=2, b=3, сондықтан нақты осі a болатын гиперболаның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,$$

$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$; эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2},(\varepsilon>1)$; фокустары $F_1(-\sqrt{13}.0), F_2=(\sqrt{13},0)$; асимптоталар теңдеуі: $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Гиперболаның сызбасын салу үшін қабырғалары $x=\pm a, y=\pm b$ тең тіктөртбұрыш тұрғызамыз ($x=\pm 2, y=\pm 3$). Тіктөртбұрыш диагональдары гиперболаның асимптоталары, гиперболаның төбелері - тіктөртбұрыштың қабырғалары нақты осімен қиылысу нүктелері болады (2 сурет);



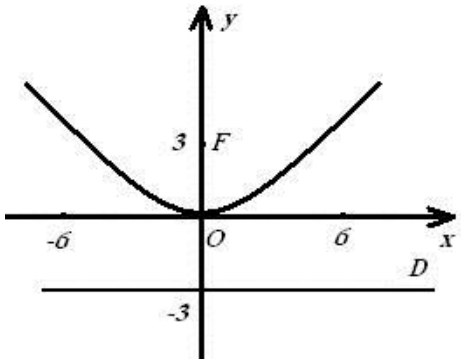
2 сурет

г) егер $y=-\frac{p}{2}$ парабола директрисасы болса, онда төбесі бас нүктеде жататын параболаның симметрия осі Оx болады, яғни параболаның канондық теңдеуі $x^2=2py$.

Егер $x=-\frac{p}{2}$. парабола директрисасы болса, онда төбесі бас нүктеде жататын параболаның симметрия осі Оy болады, ал параболаның канондық теңдеуі $y^2=2px$.

Есеп шарты бойынша y=-3 парабола директрисасы, онда $-\frac{p}{2}=-3 \Rightarrow p=6.$ Параболаның директрисасының теңдеуі y=-3 болғандықтан, $-\frac{p}{2}=-3 \Rightarrow p=6.$ Параболаның канондық теңдеуі $x^2=2\cdot 6\cdot y \to x^2=12y$.

Параболаның фокусы – симметрия осінде жататын $F(0,\frac{p}{2})$ нүктесі, яғни $F(0,3)$. Параболаның сызбасын тұрғызамыз (3 сурет).



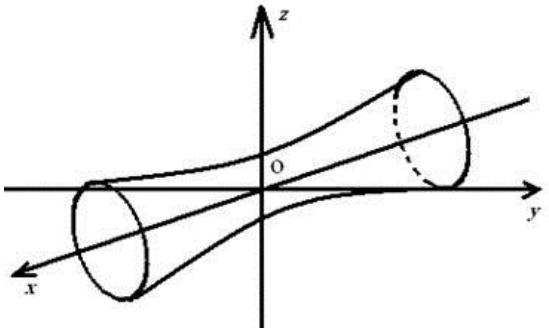
3 сурет.

9-тапсырма. Екінші ретті беттердің түрін (атауын) анықтап, сызбасын салу керек:

а) $-\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1;$

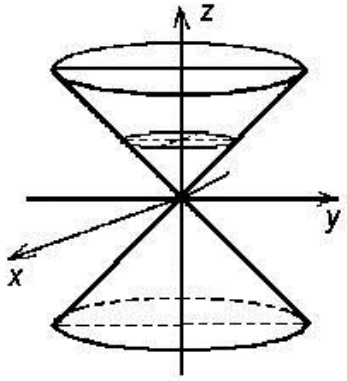
б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Шешуі. а) $-\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ - симметрия осі *Ox* болатын бір қуысты гиперболоид. Сызбасы (4 сурет);



4 сурет

б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$- төбесі бас нүктеде жататын, симметрия осі *Oz* болатын екінші ретті конустын канондық теңдеуі (5 сурет).



5 сурет

10-тапсырма. Екінші ретті сызықты $9x^2-16y^2-18x-64y-19=0$ канондық түріне келтіріп, сызбасын салу керек.

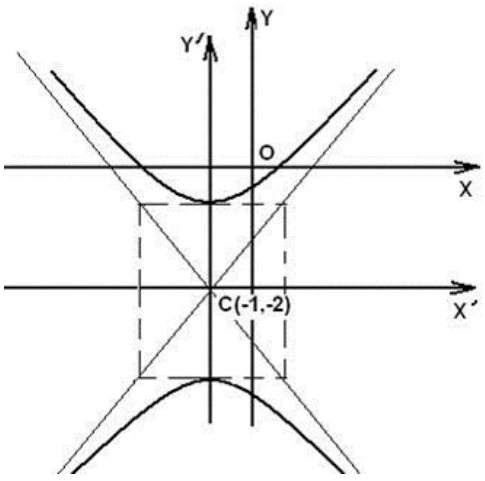
Шешуі. Келесі теңдеулер

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ (x-x_0)^2=2p(y-y_0)\ ,(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

эллипстің (гиперболаның) симметрия центрі немесе параболаның төбесі $C(x_0,y_0)$ нүктесі болатын эллипс, гипербола немесе параболаны анықтайды. Толық квадратты жекешелейік:

$$9(x^2-2x+1-1)-16(y^2+4y+4-4)-19=0;$$
$$9(x^2-2x+1)-16(y^2+4y+4)-19-9\cdot1-16\cdot(-4)=0;$$
$$9(x+1)^2-16(y+2)^2=-36;$$
$$\frac{(x+1)^2}{-36/9}+\frac{(y+2)^2}{36/16}=1;\quad -\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9/4}=1;$$

алынған теңдеу центрі *C*(-1;-2), нақты осі *b*=3/2 (*Oy* осі бойынша) және жорамал осі *a*=2 болатын гипербола теңдеуі (6 сурет)



6 сурет

№2 есептеу-сызба жұмысы. 2-модуль. Математикалық талдаудың элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функциялардың дифференциалдық есептеулері

Тапсырмалар.

1-тапсырма. Шеткі a нүктесі а) және б) мәндерін қабылдағандағы функцияның шегін табыңыз.

№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	а) $a=$	б) $a=$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	а) $a=$	б) $a=$
1.1	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+6x-16}{x^2-7x+10}$	2	-3	1.2	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-9x-8}{x^2-6x-16}$	8	0
1.3	$\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-2x-2}{x^2+5x+4}$	-1	2	1.4	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}$	-1	2
1.5	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+4x-5}{4x^2+3x-1}$	-5	3	1.6	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$	-2	3
1.7	$\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-x-3}{x^2-4x-5}$	-1	4	1.8	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-12x+32}{x^2-5x-24}$	8	1
1.9	$\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-13x+4}{2x^2-3x-20}$	4	-1	1.10	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-7x-6}{x^2-2x-24}$	-6	2
1.11	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$	2	1	1.12	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$	4	3
1.13	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$	-2	3	1.14	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+11x+24}{x^2-2x-15}$	-3	1
1.15	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-7x-8}{x^2-5x-24}$	8	-1	1.16	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-7x+10}{3x^2-14x-5}$	5	-1
1.17	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-6x-7}{x^2-x-14}$	7	0	1.18	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+x-6}{4x^2+13x+3}$	-3	2
1.19	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-20}$	4	1	1.20	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}$	3	-1
1.21	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-x-6}{x^2+4x-12}$	3	2	1.22	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+8x-9}{x^2+6x-27}$	-9	2
1.23	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+x-20}{x^2+8x+5}$	-5	1	1.24	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}$	-3	4
1.25	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+6x-7}{x^2+11x+28}$	-7	3	1.26	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-8x-9}{x^2-11x+18}$	9	-1
1.27	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+3x-18}{x^2+5x-6}$	-6	1	1.28	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-x-20}{x^2-2x-24}$	-4	1

1.29	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-x-6}$	-2	4	1.30	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$	1	5

2-тапсырма. Шектерді есептеңіз ($\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты екі әдіспен ашу керек – Лопиталь ережесін қолданып және түрлендіру жолымен).

№	а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
2.1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x^3+x-4}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6-8x^2+7}{x^4-3x^2+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-9}{2x^3+3x+2}$
2.2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-18}{8x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^6-9x^2+1}{7x^4-3x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-9}{6x^3+6x+7}$
2.3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{x^4-2x+7}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-7x^2+2}{3x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-9}{2x^3+6x-3}$
2.4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-18}{8x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^6-2x^2-1}{x^4-3x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+8x-1}{7x^3+2x+7}$
2.5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{x^4-2x+7}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-8x^2+2}{6x^4-5x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-1}{9x^3+2x+5}$
2.6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x^2-17}{5x^3+11x^2+8}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6-7x^2+2}{x^4-4x^2+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x-9}{7x^3+2x-6}$
2.7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4+2x+8}{4x^2+x+9}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{5x^3-x^2+2}$
2.8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{8x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7-7x-2}{2x^2-5x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{x^5-2x+8}$
2.9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+7}{5x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x^2+5}{x^5-x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^3-2}{x^2+4x-4}$
2.10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-x-6}{3x^2+4x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{x^9+x^7-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{5x^2+6x-1}$
2.11	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-9}{x^2+6x+7}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^3+4}{5x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-12}{5x^3-2x-3}$
2.12	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{7x^2-x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x-3}{x^2-4x+9}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-13x^2+4}{2x^2-3x-7}$
2.13	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+8}{4x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+4x-5}{4x^2+3x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{4x^6+5x+3}$
2.14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{9x^2-2x+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-2x-1}{5x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{9x^6-4x-1}$
2.15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-7x-2}{2x^2-5x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-4}{8x^5-3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+3x^2+2}{9x^3-2x-5}$

2.16	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{x^2+4x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x-2}{3x^2+6x-5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+2}{x^2+x-4}$
2.17	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-6x^2+3}{x^3-x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-8}{2x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x+5}{3x^3-2x+7}$
2.18	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2+2x-3}{5x^2+6x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^8+6x^2-7}{5x^3+11x^2+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{3x^5-2x+5}$
2.19	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x-4}{2x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+7}{3x^8-x-2}$
2.20	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-x-8}{x^2-6x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^9-x-6}{3x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x-8}{x^2-6x-1}$
2.21	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^3+4}{5x^4+x-6}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^6-x^2+2}{x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-9}{7x^3+6x+7}$
2.22	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+9}{3x^2-4x-15}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^6-5x^2+1}{x^4-7x^2-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{8x^3+3x+7}$
2.23	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-5}{7x^2+5x+1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^6-7x^2+2}{x^4-9x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+x-5}{2x^3+6x+1}$
2.24	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-15}{4x^2+3x-21}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^6-2x^2+1}{x^4-5x^2-7}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{7x^3+2x+9}$
2.25	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x^4-x^2+2}{x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x^6-3x^2+7}{x^4-9x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-1}{7x^3+3x+5}$
2.26	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-16}{4x^2+5x+23}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x^6-x^2+7}{x^4-6x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-9}{7x^3+x+4}$
2.27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-3}{5x^2-4x+9}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^6-x^2+5}{6x^4-x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-7}{7x^3+5x+1}$
2.28	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-13x^2+4}{2x^4-3x^2-27}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^6-x^2+4}{x^4-3x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-2}{x^3+7x+5}$
2.29	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+x-12}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^6-2x^2+7}{3x^4-5x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^3+6x+7}$
2.30	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-12}{8x^2+6x-5}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^6-2x^2+1}{x^4-7x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-1}{7x^3+6x+5}$

3-тапсырма. Шектерді есептеңіз.

3.1	$а)\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$	3.2	$а)\lim\limits_{x\to0}\frac{9x}{\sin x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$
3.3	$а)\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$	3.4	$а)\lim\limits_{x\to0}\frac{7x}{tgx},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$

3.5	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{3}{x}}$	3.6	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{4x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$
3.7	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin 3x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{7}{x}}$	3.8	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{2}{x}}$
3.9	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$	3.10	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$
3.11	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$	3.12	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg\,5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{9x}$
3.13	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{7x}$	3.14	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tgx},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$
3.15	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg\,9x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{6}}$	3.16	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,8x}{3x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{x}}$
3.17	$а)\lim\limits_{x\to 0}x\,ctg\,7x,\ б)\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{11}{2}x\right)^{\frac{2}{x}}$	3.18	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 3x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-8x)^{\frac{7}{x}}$
3.19	$а)\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\,ctg\,3x,\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{7x}$	3.20	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{9x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$
3.21	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 9x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{2}{x}}$	3.22	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg\,7x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{5}x\right)^{\frac{2}{x}}$
3.23	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{9}{x}}$	3.24	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,9x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$
3.25	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{7}{x}}$	3.26	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg\,2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{5x}{2}}$
3.27	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{7x}$	3.28	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{7x}$
3.29	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg\,9x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$	3.30	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg\,3x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{2x}$

4-тапсырма. Шектерді есептеңіз.

№	а)	б)	№	а)	б)
4.1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{5-2x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-4}{6x+1}\right)^{x}$	4.2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-4}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3x-4}\right)^{2+x}$
4.3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)^{x-1}$	4.4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{3+5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x+8}\right)^{3+x}$

4.5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x}\right)^{3x+4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{9x}\right)^{x+4}$	4.6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+5}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{4x+5}\right)^{2x-1}$
4.7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x-5}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{7x-2}\right)^{x-5}$	4.8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{7+x}\right)^{-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+4x}{7+x}\right)^{x}$
4.9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^{-8x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+7}{8x+1}\right)^{x}$	4.10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{x+5}\right)^{x+5}$
4.11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-8}\right)^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-8}\right)^{x-1}$	4.12	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+7}\right)^{x}$
4.13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-1}\right)^{x+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{5x-1}\right)^{x+8}$	4.14	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-8}{x+6}\right)^{4x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{5x+6}\right)^{x-3}$
4.15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{5-4x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{3x+9}\right)^{x+5}$	4.16	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-2}{x+5}\right)^{x+1}$
4.17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x}{7x-1}\right)^{3-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-8}\right)^{x-1}$	4.18	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x}{6x-1}\right)^{2-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{5x+6}\right)^{x-3}$
4.19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-2}{7x+3}\right)^{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{8x-1}\right)^{5+x}$	4.20	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^{4x+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{6x+1}\right)^{x-1}$
4.21	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+6x}{4+x}\right)^{x+5}$	4.22	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-8}{x+3}\right)^{7x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)^{3x-1}$
4.23	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x-1}{9x+2}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{8x+2}\right)^{x+2}$	4.24	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{5x+1}\right)^{x}$
4.25	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{5x+2}\right)^{x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+5x}{8+x}\right)^{1+x}$	4.26	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{5x+2}\right)^{x}$
4.27	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x}\right)^{-4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{7x+1}\right)^{1+x}$	4.28	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7-2x}{3-2x}\right)^{3x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+6x}{3+5x}\right)^{5+x}$
4.29	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9+x}{3+2x}\right)^{x+1}$	4.30	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{8+x}\right)^{1-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{5x+1}\right)^{x}$

5-тапсырма. Шекті есептеңіз.

№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
5.1	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	5.2	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	5.3	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

5.4	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	5.5	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$	5.6	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
5.7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	5.8	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	5.9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$
5.10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	5.11	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	5.12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$
5.13	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	5.14	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$	5.15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
5.16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$	5.17	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{5+3x}}$	5.18	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$
5.19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$	5.20	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{6+x}}{2x^2-7x-15}$	5.21	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$
5.22	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$	5.23	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{6-x}-\sqrt{3-2x}}$	5.24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
5.25	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	5.26	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	5.27	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-3x-10}$
5.28	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	5.29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{7}\ x}$	5.30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

6-тапсырма. Берілген функцияның

а) үзіліс нүктесін табу керек;

б) үзіліс нүктесіндегі оң және сол жақты шектерін табу, үзіліс нүктенің түрін анықтау керек.

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
6.1	$5^{\frac{1}{x-2}}$	$\dfrac{3}{x+8}$	6.2	$4^{\frac{1}{x-3}}$	$\dfrac{1}{5+x}$
6.3	$7^{\frac{1}{x+5}}$	$\dfrac{6}{1-x}$	6.4	$6^{\frac{1}{2+x}}$	$\dfrac{8}{2-x}$

6.5	$9^{\frac{1}{x-1}}$	$\frac{7}{x-9}$	6.6	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\frac{5}{x+4}$
6.7	$4^{\frac{1}{2-x}}$	$\frac{3}{7-x}$	6.8	$4^{\frac{1}{x-7}}$	$\frac{1}{5+x}$
6.9	$7^{\frac{1}{x-2}}$	$\frac{3}{5+x}$	6.10	$9^{\frac{1}{7-x}}$	$\frac{3}{x-6}$
6.11	$3^{\frac{1}{4+x}}$	$\frac{3}{x+14}$	6.12	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\frac{3}{x+2}$
6.13	$9^{\frac{1}{1-x}}$	$\frac{1}{2-x}$	6.14	$3^{\frac{1}{2-x}}$	$\frac{1}{11-x}$
6.15	$7^{\frac{1}{8-x}}$	$\frac{2}{x+10}$	6.16	$4^{\frac{1}{3+x}}$	$\frac{2}{x+7}$
6.17	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\frac{5}{x+12}$	6.18	$8^{\frac{1}{3-x}}$	$\frac{5}{x+9}$
6.19	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\frac{3}{9-x}$	6.20	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\frac{1}{1-x}$
6.21	$3^{\frac{1}{2+x}}$	$\frac{7}{x+6}$	6.22	$7^{\frac{1}{4-x}}$	$\frac{1}{9-x}$
6.23	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\frac{2}{x+7}$	6.24	$2^{\frac{1}{7+x}}$	$\frac{8}{x+6}$
6.25	$5^{\frac{1}{2+x}}$	$\frac{2}{x+7}$	6.26	$8^{\frac{1}{2-x}}$	$\frac{9}{3-x}$
6.27	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\frac{6}{x+8}$	6.28	$3^{\frac{1}{2-x}}$	$\frac{7}{2-x}$
6.29	$7^{\frac{1}{6-x}}$	$\frac{1}{7-x}$	6.30	$9^{\frac{1}{5-x}}$	$\frac{3}{x+1}$

7-тапсырма. Берілген функцияның туындысын табыңыз.

7.1	$y=2x^2-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$	7.16	$y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$
7.2	$y=\frac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\frac{2}{x^2}$	7.17	$y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$
7.3	$y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$	7.18	$y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$
7.4	$y=7\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-3x^3+\frac{4}{x}$	7.19	$y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3$
7.5	$y=7x+\frac{5}{x^2}+\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$	7.20	$y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$

7.6	$y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$	7.21	$y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}$
7.7	$y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^5}$	7.22	$y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$
7.8	$y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^6}$	7.23	$y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$
7.9	$y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}$	7.24	$y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$
7.10	$y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$	7.25	$y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$
7.11	$y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$	7.26	$y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x$
7.12	$y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$	7.27	$y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$
7.13	$y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$	7.28	$y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$
7.14	$y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4$	7.29	$y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$
7.15	$y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$	7.30	$y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$

8-тапсырма. Берілген функцияның туындысын табыңыз.

8.1	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}$	8.16	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\frac{3}{7x^3-x^2-4}$
8.2	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$	8.17	$y=\frac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$
8.3	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\frac{5}{2x^2+4x-1}$	8.18	$y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{8}{6x^6+3x-7}$
8.4	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}$	8.19	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\frac{3}{(x-3)^4}$
8.5	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\frac{3}{(x-5)^4}$	8.20	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\frac{5}{(x+1)^3}$
8.6	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\frac{4}{(x+2)^3}$	8.21	$y=\sqrt[4]{5x^3-4x+1}-\frac{7}{(x-5)^2}$
8.7	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\frac{5}{4x^2+3x-5}$	8.22	$y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{4}{(x-7)^5}$
8.8	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\frac{2}{2x^2-3x+7}$	8.23	$y=\sqrt{(x-3)^7}+\frac{9}{7x^2-5x-8}$

8.9	$y=\frac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	8.24	$y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\frac{2}{1+3x-4x^2}$
8.10	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{3}{(x-3)^5}$	8.25	$y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$
8.11	$y=\frac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	8.26	$y=\frac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$
8.12	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^4}$	8.27	$y=\frac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$
8.13	$y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\frac{8}{(x-5)^2}$	8.28	$y=\sqrt{(x-4)^7}-\frac{10}{3x^2-5x+1}$
8.14	$y=\frac{3}{(x+2)^4}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	8.29	$y=\frac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$
8.15	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$	8.30	$y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\frac{5}{2x^2-4x+7}$

9-тапсырма. Берілген функцияның туындысын табыңыз.

9.1	$y=ch^2 5x\cdot arctg\sqrt{x}$	9.16	$y=\sqrt[3]{x-4}\cdot\arcsin^4 5x$
9.2	$y=sh^4 5x\cdot\arccos 3x^2$	9.17	$y=\sqrt{(x+3)^5}\cdot\arcsin 2x^3$
9.3	$y=th^4 x\cdot arcctgx^3$	9.18	$y=tg^3 x\cdot arcctg\,3x$
9.4	$y=ch^2 5x\cdot arctgx^4$	9.19	$y=\sqrt[4]{(x+4)^2}\cdot\arcsin 7x^2$
9.5	$y=cth4x^5\cdot\arccos 2x$	9.20	$y=e^{-\cos x}\cdot\arcsin 2x$
9.6	$y=th^4 3x\cdot arcctg\sqrt{x}$	9.21	$y=(x-2)^4\cdot\arcsin 5x^4$
9.7	$y=cth^2 4x\cdot\arcsin x^3$	9.22	$y=(x+6)^6\cdot arcctg\,3x^5$
9.8	$y=cth^4 2x\cdot arctgx^3$	9.23	$y=\sqrt[3]{x-4}\cdot\arcsin^4 5x$
9.9	$y=ch^3 9x\cdot\arcsin(5x-1)$	9.24	$y=\sqrt{(x+3)^5}\cdot\arcsin 2x^3$
9.10	$y=cth^3 4x\cdot\arcsin(3x+1)$	9.25	$y=tg^3 x\cdot arcctg\,3x$
9.11	$y=\sqrt[4]{(x+4)^2}\cdot\arcsin 7x^2$	9.26	$y=2^{-x^2}\cdot arctg\,7x^4$
9.12	$y=e^{-\cos x}\cdot\arcsin 2x$	9.27	$y=3^{\cos x}\cdot\ln(x^3-3x+7)$
9.13	$y=(x-2)^4\cdot\arcsin 5x^4$	9.28	$y=\arccos x^2\cdot ctg\,7x^4$
9.14	$y=(x+6)^6\cdot arcctg\,3x^5$	9.29	$y=(x+2)^2\cdot\arccos 3x^4$
9.15	$y=th^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$	9.30	$y=\log_2(x-4)\cdot arctg^3 4x$

10-тапсырма. Берілген y функцияның $y'''(x_0)$ туындысының x_0 нүктесіндегі мәнін табыңыз.

10.1	$y=\sin^2 x,\ \ x_0=\pi/2$	10.16	$y=arctgx,\ \ x_0=1$
10.2	$y=\ln(2+x^2),\ \ x_0=0$	10.17	$y=e^x\cdot\cos x,\ \ x_0=0$
10.3	$y=e^x\cdot\sin 2x,\ \ x_0=0$	10.18	$y=e^{-x}\cdot\cos x,\ \ x_0=0$
10.4	$y=\sin 2x,\ \ x_0=\pi$	10.19	$y=(2x+1)^5,\ \ x_0=1$
10.5	$y=\ln(1+x),\ \ x_0=2$	10.20	$y=x^2\cdot e^x/2,\ \ x_0=0$
10.6	$y=\arcsin x,\ \ x_0=0$	10.21	$y=(5x-4)^5,\ \ x_0=2$
10.7	$y=x\cdot\sin x,\ \ x_0=\pi/2$	10.22	$y=x^2\cdot\ln x,\ \ x_0=1/3$
10.8	$y=x\cdot\sin 2x,\ \ x_0=-\pi/4$	10.23	$y=x\cdot\cos 2x,\ \ x_0=\pi/12$
10.9	$y=x^4\cdot\ln x,\ \ x_0=1$	10.24	$y=x+arctgx,\ \ x_0=1$
10.10	$y=\cos^2 x,\ \ x_0=\pi/4$	10.25	$y=\ln(x^2-4),\ \ x_0=3$
10.11	$y=x^2\cdot\cos x,\ \ x_0=\pi/2$	10.26	$y=x\cdot\arccos x,\ \ x_0=\sqrt{3}/2$
10.12	$y=(x+1)\ln(1+x),\ \ x_0=-1/2$	10.27	$y=\ln^3 x,\ \ x_0=1$
10.13	$y=2^{x^2},\ \ x_0=1$	10.28	$y=(4x-3)^5,\ \ x_0=1$
10.14	$y=x\cdot arctgx,\ \ x_0=2$	10.29	$y=(7x-4)^6,\ \ x_0=1$
10.15	$y=x\cdot\sin 2x,\ \ x_0=\pi/4$	10.30	$y=\sin(x^3+\pi),\ \ x_0=\sqrt[3]{\pi}$

11-тапсырма. $y=f(x)$ функциясы берілген. Табу керек:

1) анықталу облысын;

2) жұп, тақтығын;

3) функцияның графигінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін;

4) функцияның графигінің асимптоталарын;

5) монотондық интервалдарын және экстремумдарын;

6) ойыс және дөнес интервалдарын, иілу нүктелерін.

11.1	$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$	11.16	$y=\ln(x^2+1)$
11.2	$y=e^{1/(5+x)}$	11.17	$y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$
11.3	$y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$	11.18	$y=x\ln x$
11.4	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	11.19	$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

11.5	$y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$	11.20	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$
11.6	$y=\frac{x}{9-x}$	11.21	$y=\frac{x^5}{x^4-1}$
11.7	$y=\frac{x^2}{4x^2-1}$	11.22	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$
11.8	$y=x+\frac{\ln x}{x}$	11.23	$y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$
11.9	$y=x-\ln(1+x^2)$	11.24	$y=\frac{x^3}{x^4-1}$
11.10	$y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$	11.25	$y=(e^{2x}+1)/e^x$
11.11	$y=x^2-2\ln x$	11.26	$y=x^2+\frac{1}{x^2}$
11.12	$y=x^3e^{-x^2/2}$	11.27	$y=(5x^4+3)/x$
11.13	$y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$	11.28	$y=\frac{4-2x}{1-x^2}$
11.14	$y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$	11.29	$y=\frac{5x}{4-x^2}$
11.15	$y=-\ln\frac{1+x}{1-x}$	11.30	$y=\frac{\ln x}{x}$

Типтік нұсқаның шешуі.

Шекті есептеңіз: Шектерді есептерде, ең алдымен, функциядағы айнымалының орнына шектік нүктені қойып есептеу керек.

Егер айқын мән шықса (тұрақты сан немесе шексіздік)болса, онда ол жауап болады

Анықталғандықтар түрлері:

$$\frac{0}{a}=0;\quad \frac{a}{0}=\infty;\quad \frac{a}{\infty}=0;\quad \frac{\infty}{a}=\infty;$$

$$a\cdot 0=0;\quad a\cdot\infty=\infty;\quad a^{\infty}_{(a>1)}=\infty;\quad a^{\infty}_{(a<1)}=0;\quad a^0=1.$$

Егер есептеудің нәтижесінде төмендегі анықталмағандықтың бірі кездессе (анықталмағандықтың 7 түрі: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$), онда 16 кестедегі әдістерді қолданып анықталмағандықты ашу керек.

Бұл әдістерді мысалдардан көрсетейік.

1-тапсырма. Шектерді есептейік $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}$ бұл жерде

а) a=2;

б) a=5.

Шешуі:

а) x шектік нүктенің орнына a=2 қойып,бірден нақты жауап аламыз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\left|\frac{2^2-6\cdot 2+5}{3\cdot 2^2-14\cdot 2-5}\right|=\frac{-3}{-21}=\frac{1}{7};$$

б) a = 5 болғанда, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықтылмағандық болады

$$\left(\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\left|\frac{5^2-6\cdot 5+5}{3\cdot 5^2-14\cdot 5-5}=\frac{0}{0}\right|\right),$$

оны төмендегі екі әдіспен шешуге болады:

1) бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп, бірдей көбейткіштерді қысқартып жіберуге болады:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)}{3(x-5)(x+1/3)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{3x+1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4};$$

2) Лопиталь ережесін пайдаланып:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-6}{6x-14}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

нәтижесін аламыз.

2- тапсырма. Шектерді табыңыз:

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-12x+7}{5x^2+4x-8}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x+7}{x^3-3x^2-4}$;

в) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{4x^2-8x^4+1}$.

Шешуі:

Бұл шектерді есептеу барысында ∞ қойғанда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты аламыз, оны ашу үшін 16-кестедегі 1-ережені пайдаланамыз:

а) алымы мен бөлімінің дәреже көрсеткіші бірдей болғандықтан ($m=n=2$), дәрежесі үлкенінің коэффициенттерінің қатынасын аламыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-12x+7}{5x^2+4x-8}=\frac{2}{5};$$

б) ($m=5,\ n=3,\ m>n$) алымының дәрежесі үлкен болғандықтан,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x+7}{x^3-3x^2-4}=\infty;$$

в) ($m=2,\ n=4,\ n>m$) бөлімінің дәрежесі үлкен болғандықтан,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{4x^2-8x^4+1}=0.$$

3- тапсырма. Шекті есептеңіз:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 9x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{4x}$.

Шешуі. а) берілген функция шектік нүктесінде анықталмаған, бұл анықталмағандықтын түрі $\dfrac{0}{0}$. Анықталмағандықты ашу үшін бірнеше әдіс қолданамыз.

1-әдіс – бірінші тамаша шекке $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ және оның салдарына келтіру:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin 9x)/7x}=\frac{1}{9/7}=\frac{7}{9};$$

2-әдіс – шексіз аз шамаларды салыстыру және эквивалентті шексіз аз шамалар туралы теоремаларды қолдану

$$\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)\quad(\alpha(x)\to 0).$$

Онда

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{9}=\frac{7}{9};$$

б) 1^∞ анықталмағандықты ашу үшін екінші тамаша шекті $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ және оның салдарын $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ қолданамыз:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-8}{x}\right)^{\frac{x}{-8}}\right]^{\frac{-8}{x}4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{x}4x}=e^{-32}.$$

4- тапсырма. Шектерін табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+7}\right)^{x-3}$.

Шешуі. а) ∞ қояр болсақ 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты аламыз, оны ашудың төмендегідей бірнеше әдісі бар:

1) бірінші әдіс - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ түріндегі екінші тамаша шекке келтіру немесе жалпыланған түрі $\lim\limits_{N(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{N(x)}\right)^{N(x)}=e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4+1}{3x+4}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4}\right]^{\frac{7x}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{3x+4}}=e^{\frac{7}{3}}.$$

2) екінші әдіс – 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} түріндегі анықталмағандықтарды ашудың жиі қолданылатын формуласын:

$$\lim_{x\to a(\infty)} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)\ln f(x)}$$

пайдаланып есептеу. Бұл формула бойынша

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}7x\cdot\ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}7x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)}=$$

(ақырсыз аз шамалы функцияны ақырсыз аз шамаға алмастыру теоремасын қолданып: $\ln(1+\frac{1}{3x+4})\approx\frac{1}{3x+4}$ мұнда $x\to\infty$)

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{3x+4}}=e^{\frac{7}{3}}.$$

Жоғарыдағы формуланы есте сақтамай-ақ осы формулаға алып келген әдісті сақтасақ болады:

$$y=\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}$$

берілсін, *e* негізінде логарифмдеп:

$$\ln y=7x\ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right),$$

шектің есептелуін жоғарыдан қараңыз

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}7x\ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)=\frac{7}{3}.$$

Сонымен,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\frac{7}{3},\qquad\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}=e^{\frac{7}{3}};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{-3}=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right|=0\cdot 8=0.$

5- тапсырма. Шегін табу керек $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6}$.

Шешуі: шектік нүктені қойып есептесек, $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты аламыз, оны ашудың ең тиімді әдісі алымы мен бөлімін алымының түйіндесіне көбейту керек, сонымен қатар бөлімін кобейткіштерге жіктей отырып, ортақ көбейткіштерді қысқартып жіберу керек:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(3-\sqrt{4x+1})(3+\sqrt{4x+1})}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})}=\lim_{x\to 2}\frac{9-4x-1}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4(x-2)}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{(x+3)(3+\sqrt{4x+1})}=-\frac{4}{5\cdot 6}=-\frac{2}{15}.$$

Лопиталь ережесін пайдаланып есептесек, дәл сол жауапты аламыз :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{-\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}}{2x+1}=-\frac{2}{15}.$$

6- тапсырма. $f(x)=5^{\frac{3}{x+2}}$ және $g(x)=\dfrac{x+4}{x-6}$ функциялары үшін:

а) үзіліс нүктесін;

б) үзіліс нүктесіндегі оң және сол жақ шектерін;

в) үзіліс нүктесінің сипатын беру керек.

Шешуі:

$f(x)=5^{\frac{3}{x+2}}$ функциясын қарастырайық:

а) $x=-2$ нүктесі анықталу облысына кірмейді,бірақ оның аймағында анықталған, сондықтан $x=-2$ үзіліс нүктесі болады;

б) $f(-2-0)=\lim\limits_{x\to -2-0}5^{\frac{3}{x+2}}=\left|5^{\frac{3}{-0}}=5^{-\infty}\right|=0,$

$$f(-2+0)=\lim_{x\to -2+0}5^{\frac{3}{x+2}}=\left|5^{\frac{3}{+0}}=5^{+\infty}\right|=\infty;$$

в) бір жақты шектердің біреуі $f(-2+0)=\infty$ болғандықтан, x=–2 нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі болады;

$g(x)=\dfrac{x+4}{x-6}$ функциясын қарастырайық:

а) x=6 нүктесі анықталу облысына кірмейді,бірақ оның аймағында анықталған, сондықтан $x=6$ үзіліс нүктесі болады;

б) $g(6-0)=\lim\limits_{x\to 6-0}\dfrac{x+4}{x-6}=\left|\dfrac{10}{-0}\right|=-\infty,$

$$g(6+0)=\lim_{x\to 6+0}\frac{x+4}{x-6}=\left|\frac{10}{+0}\right|=+\infty;$$

в) бір жақты шектердің екеуі де ∞ болғандықтан, $x = 6$ нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі болады.

Шектердің түрлері және оларды есептеу әдістері

Шектердің түрлері	Шектік нүктені қоюдың нәтижесі	Шекті есептеудің әдісі немесе нәтижесі
1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\begin{cases} a_0/b_0, & m=n \\ 0, & m<n \\ \infty, & m>n \end{cases}$
2 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$	а) көбейткіштерге жіктеу; б) Лопиталь ережесі; в) өрнекті түйіндесіне көбейту; г) эквивалентті ақырсыз аз шамаларды пайдалану; д) осы кестедегі 1- ережені қолдану
3 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{0}{c}$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{0}{\infty}$	0
4 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{c}{0}$, $\frac{\infty}{c}$, $\frac{\infty}{0}$	∞
5 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}f(x)\cdot g(x)$	$0\cdot\infty$	$\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарға келтіру, сосын осы кестедегі 1 немесе 2 ережені пайдалану керек
6 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}f(x)\cdot g(x)$	$\infty\cdot\infty$, $\infty\cdot c$	∞
7 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}f(x)\cdot g(x)$	$0\cdot 0$, $0\cdot c$	0
8 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}[f(x)\pm g(x)]$	$\infty-\infty$	$\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарға келтіру, сосын осы кестедегі 1 немесе 2 ережені пайдалану керек
9 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}[f(x)\pm g(x)]$	$\infty+\infty$	∞
10 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}}f(x)^{g(x)}$	1^∞, 0^0, ∞^0	а) 2-тамаша шекке келтіру $\lim\limits_{N(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{N(x)}\right)^{N(x)}=e$; б) $\lim\limits_{x\to a(\infty)}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)\ln f(x)}$ формуласын пайдалану керек

11 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)^{g(x)}$	$c^{+\infty}$	$\begin{cases}\infty, & c>1\\ 0, & 0\le c<1\end{cases}$
12 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)^{g(x)}$	$c^{-\infty}$	$\begin{cases}0, & c>1\\ \infty, & 0\le c<1\end{cases}$

7-тапсырма. Берілген y функцияның туындысын табыңыз

$$y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^2}x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Шешуі.

$$y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^2}=x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3},$$

$$y'=\left(x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}\right)'=(x^{1/2})'+5(x^{-1/3})'-(x^{-2})'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-1/2}+5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}-1(-2)x^{-3}+\frac{1}{3}(-3)x^{-4}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}.$$

8-тапсырма. Берілген функцияның туындысын табыңыз

а) $y=(1+5x)^3$;

б) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$.

Шешуі. а) $y=(1+5x)^3$,

$$y'=\left[(1+5x)^3\right]'=3(1+5x)^2(1+5x)'=3(1+5x)^2\cdot(0+5\cdot1)=15(1+5x)^2.$$

б) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$,

$$\left(\sqrt[3]{2+x^4}\right)'=\left[\left(2+x^4\right)^{1/3}\right]'=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-2/3}\cdot(2+x^4)'=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-2/3}\cdot(0+4x^3)=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

9-тапсырма. Берілген $y=ch^3 8x\cdot\arccos 2x^6$. функцияның туындысын табыңыз

Шешуі. Берілген функция – екі функцияның көбейтіндісі, сондықтан келесі формуланы қолданамыз $y=u\cdot v,\quad y'=u'\cdot v+v'\cdot u.$ Егер $u=ch^3 8x,$ $v=\arccos 2x^6$ болса, онда

$$y'=(ch^3 8x\cdot\arccos 2x^6)'=(ch^3 8x)'\cdot\arccos 2x^6+ch^3 8x\cdot(\arccos 2x^6)'=$$

$$= 3ch^2 8x \cdot (ch8x)' \cdot \arccos 2x^6 + ch^3 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} (2x^6)' =$$

$$= 3ch^2 8x \cdot sh8x \cdot (8x)' \cdot \arccos 2x^6 + ch^3 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} \cdot 12x^5 =$$

$$= 3ch^2 8x \cdot sh8x \cdot 8 \cdot \arccos 2x^6 + \frac{12x^5 \cdot ch^3 8x}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} =$$

$$= 24ch^2 8x \cdot sh8x \cdot \arccos 2x^6 + \frac{12x^5 \cdot ch^3 8x}{\sqrt{1-(2x^6)^2}}.$$

10-тапсырма. Берілген $y = \cos 2x$ функцияның $y'''(x_0)$ туындысын $x_0 = \frac{\pi}{4}$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешуі. Берілген функцияның үшінші ретті туындысын табыңыз.

$$y' = (\cos 2x)' = -2\sin 2x;$$

$$y'' = (y')' = -2(\sin 2x)' = -4\cos 2x;$$

$$y''' = (y'')' = -4(\cos 2x)' = 8\sin 2x.$$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$ нүктесіндегі мәнін табамыз

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 8.$$

11-тапсырма. $y = \frac{\ln x}{x}$ функциясы берілген. Табу керек:

1) анықталу облысын;

2) жұп, тақтығын;

3) функцияның графигінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін;

4) функцияның графигінің асимптоталарын;

5) монотондық интервалдарын және экстремумдарын;

6) ойыс және дөнес интервалдарын, иілу нүктелерін.

Шешуі.

1) функцияның анықталу облысы $0 < x < \infty$, себебі $y = \ln x$ функциясы бұл облыста анықталған;

2) функция тақта, жұпта емес;

3) функцияның графигінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерін анықтау үшін $\frac{\ln x}{x} = 0,$ теңдеуін шешеміз. $\ln x = 0$, $x = 1$ аламыз.

$x > 0$ болғандықтан, берілген функция Оy осімен қиылыспайды;

4) функцияның графигінің асимптоталарын табамыз. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ функциясы – екі функцияларының бөліндісі, ол анықталу облысында үзіліссіз, бірақ $x=0$ нүктесінде

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty,$$

яғни функцияның вертикаль асимптотасы $x=0$ түзуі (ординаталар осі).

$x\to-\infty$ болғандықтан функцияның сол жақты көлбеу асимптотасы жоқ. Оң жақты көлбеу асимптотасын табайық

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Осыдан оң жақты көлбеу асимптотасы y=0 түзуі, яғни Оx осі;

5) монотондық интервалдарын және экстремумдарын табайық, ол үшін

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{x(\ln x)'-x'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$x^2>0$ болғандықтан, тек қана $1-\ln x>0$ болғанда $y'>0$ болады, яғни $1>\ln x$. Осыдан $x\in(0;e)$ болғанда $y'>0$. Тек қана $1-\ln x=0$ болғанда $y'<0$ болады, осыдан $x=e$ нүктесі – максимум нүктесі. Сонымен $x=e$ нүкте берілген функцияның локальді минимумы нүктесі;

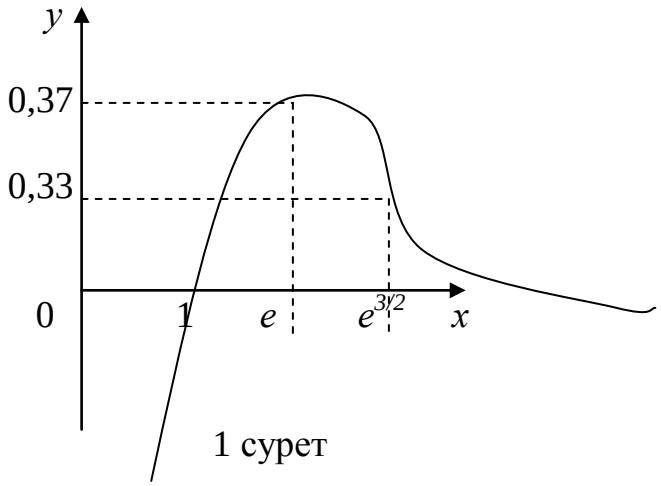
6) ойыс және дөнес интервалдарын, иілу нүктелерін табайық, ол үшін берілген функцияның екінші ретті туындысын табамыз

$$y''=(y')'=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

$y''>0$ сонда тек сонда ғана, егер $2\ln x-3>0$ болса, осыдан $\ln x>\dfrac{3}{2}$, яғни $x\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ интервалында берілген функция ойыс.

$y''<0$ сонда тек сонда ғана, егер $2\ln x-3<0$ болса, осыдан $\ln x<\dfrac{3}{2}$, яғни $x\in(0;e^{3/2})$ интервалында берілген функция дөнес. Қорытынды $x=e^{3/2}$ нүктесі – иілу нүкте және $y_{\max}=y(e)\approx 037;\quad y(e^{3/2})\approx 0{,}33.$

Берілген функцияның сызбасы



1 сурет

№3 есептеу-сызба жұмысы. 3-модуль. Математикалық талдау элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функцияның интегралдық есептеулері

Тапсырмалар.

1-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

1.1	$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}} 3x^2 dx$	1.16	$\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$
1.2	$\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$	1.17	$\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$
1.3	$\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2} dx$	1.18	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx$
1.4	$\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx$	1.19	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}} dx$
1.5	$\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x} dx$	1.20	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2} dx$
1.6	$\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x} dx$	1.21	$\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$
1.7	$\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx$	1.22	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x} dx$
1.8	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx$	1.23	$\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x} dx$
1.9	$\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x} \right) dx$	1.24	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2} dx$

1.10	$\int \frac{3x^2\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx$	1.25	$\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$
1.11	$\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$	12.26	$\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$
1.12	$\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$	1.27	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$
1.13	$\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$	1.28	$\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$
1.14	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$	1.29	$\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$
1.15	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$	1.30	$\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$

2-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

2.1	$\int\sqrt{3+x}dx$	2.11	$\int\cos(2+3x)dx$	2.21	$\int\frac{dx}{3-x}$
2.2	$\int\sqrt[3]{(1+x)^2}dx.$	2.12	$\int\frac{dx}{4-3x}$	2.22	$\int\sqrt[3]{(1-2x)^5}dx.$
2.3	$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$	2.13	$\int\frac{dx}{(2-5x)^3}$	2.23	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-9x}}$
2.4	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$	2.14	$\int(1-3x)^4dx$	2.24	$\int(1-4x)^7dx.$
2.5	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	2.15	$\int\sqrt[3]{1+5x}dx$	2.25	$\int(1+2x)^5dx$
2.6	$\int\sin(2-3x)dx$	2.16	$\int\frac{dx}{2-3x}.$	2.26	$\int\sqrt{(1+3x)^7}dx$
2.7	$\int e^{3x-5}dx$	2.17	$\int\cos(3+2x)dx$	2.27	$\int\frac{dx}{1-4x}$
2.8	$\int\frac{dx}{2+3x}$	2.18	$\int\frac{dx}{2-5x}$	2.28	$\int\frac{dx}{3x-4}$
2.9	$\int e^{3-8x}dx$	2.19	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+7x}}$	2.29	$.\int\sin(3-x)dx$
2.10	$\int\sin(3+4x)dx$	2.20	$\int\sqrt{1+3x}dx$	2.30	$\int e^{5-3x}dx$

3-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

3.1	$\int\frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$	3.11	$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	3.21	$\int\frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$
3.2	$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	3.12	$\int\frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	3.22	$\int\frac{2dx}{4+3x^2}$

3.3	$\int \frac{dx}{9x^2+3}$	3.13	$\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	3.23	$\int \frac{dx}{4x^2+5}$
3.4	$\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	3.14	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	3.24	$\int \frac{dx}{8x^2-25}$
3.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	3.15	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+7}}$	3.25	$\int \frac{dx}{4x^2-9}$
3.6	$\int \frac{dx}{7x^2-4}$	3.16	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$	3.26	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$
3.7	$\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$	3.17	$\int \frac{dx}{3x^2+1}$	3.27	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-49x^2}}$
3.8	$\int \frac{dx}{5x^2+3}$	3.18	$\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$	3.28	$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+81}}$
3.9	$\int \frac{dx}{5x^2-3}$	3.19	$\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$	3.29	$\int \frac{dx}{4x^2+1}$
3.10	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	3.20	$\int \frac{dx}{8x^2+9}$	3.30	$\int \frac{dx}{x^2+16}$

4-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

4.1	$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$	4.16	$\int xe^{1-6x^2}dx$
4.2	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1-x)}}{x-1}dx$	4.17	$\int \frac{x}{e^{x^2-3}}dx$
4.3	$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$	4.18	$\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2xdx$
4.4	$\int \frac{dx}{(3+x)\sqrt[5]{\ln^2(3+x)}}$	4.19	$\int \sqrt{\cos 7x}\sin 7xdx$
4.5	$\int \frac{\ln^3(2-x)dx}{x-2}$	4.20	$\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$
4.6	$\int \sin^4 2x\cos 2xdx$	4.21	$\int e^{2x^3-1}x^2dx$
4.7	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$	4.22	$\int e^{\cos x}\sin xdx$
4.8	$\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$	4.23	$\int \frac{x^2}{e^{x^3+1}}dx$

4.9	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}dx$	4.24	$\int \frac{x}{e^{x^2+7}}dx$
4.10	$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$	4.25	$\int \frac{x}{e^{3x^2+4}}dx$
4.11	$\int \frac{\sqrt{tg^3 x}}{\cos^2 x}dx$	4.26	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4.12	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{tgx}}$	4.27	$\int \frac{arcctg^7 2x}{1+4x^2}dx$
4.13	$\int \frac{dx}{\sin^2 x ctg^4 x}$	4.28	$\int \frac{\sqrt[5]{\arccos^2 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$
4.14	$\int \frac{ctg^5 x}{\sin^2 x}dx$	4.29	$\int \frac{\sqrt{\arcsin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4.15	$\int \frac{tg^4 5x}{\cos^2 5x}dx$	4.30	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 3x}}{1+9x^2}dx$

5-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

5.1	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$	5.11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	5.21	$\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$
5.2	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$	5.12	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$	5.22	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$
5.3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$	5.13	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$	5.23	$\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$
5.4	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$	5.14	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$	5.24	$\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$
5.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$	5.15	$\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$	5.25	$\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$
5.6	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$	5.16	$\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$	5.26	$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
5.7	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$	5.17	$\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$	5.27	$\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$
5.8	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$	5.18	$\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$	5.28	$\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$

5.9	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$	5.19	$\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	5.29	$\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$
5.10	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$	5.20	$\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$	5.30	$\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$

6-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

6.1	$\int (5-x)e^{3x}dx$	6.11	$\int x^2 \cos x dx$	6.21	$\int arctg8xdx$
6.2	$\int x\cos 6xdx$	6.12	$\int \ln^2 xdx$	6.22	$\int \arccos 2xdx$
6.3	$\int (3x+5)\sin 4xdx$	6.13	$\int x\sin x\cos xdx$	6.23	$\int arcctg3xdx$
6.4	$\int \ln(x+2)dx$	6.14	$\int (3-x)\cos xdx$	6.24	$\int 3x\cos xdx$
6.5	$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$	6.15	$\int xarctgxdx$	6.25	$\int arctg2xdx$
6.6	$\int xe^{3x}dx$	6.16	$\int (x+1)e^{2x}dx$	6.26	$\int x^2e^{-2x}dx$
6.7	$\int (6-5x)\sin xdx$	6.17	$\int (3x+1)e^{x}dx$	6.27	$\int (x+1)e^{-4x}dx$
6.8	$\int \ln(x^2+1)dx$	6.18	$\int (1-x)\cos 7xdx$	6.28	$\int x^2e^{-x}dx$
6.9	$\int xarctg2xdx$	6.19	$\int (x-7)\cos 3xdx$	6.29	$\int arctg4xdx$
6.10	$\int (x+2)e^{x}dx$	6.20	$\int (x+2)\sin 3xdx$	6.30	$\int \ln(x-5)dx$

7-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

7.1	$\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx$	7.11	$\int \frac{x^4}{x^2-3}dx$	7.21	$\int \frac{1-2x^4}{x^2+1}dx$
7.2	$\int \frac{7-x^2}{1-x}dx$	7.12	$\int \frac{x^2+5x}{x^2+1}dx$	7.22	$\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx$
7.3	$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$	7.13	$\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$	7.23	$\int \frac{2x^2+5}{x+1}dx$
7.4	$\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$	7.14	$\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$	7.24	$\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx$
7.5	$\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$	7.15	$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$	7.25	$\int \frac{x^2+x}{2-x}dx$
7.6	$\int \frac{2x^4-3}{x^2-4}dx$	7.16	$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$	7.26	$\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx$
7.7	$\int \frac{x^3-1}{2x+1}dx$	7.17	$\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx$	7.27	$\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx$

7.8	$\int \frac{x^5}{1-x^3}dx$	7.18	$\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx$	7.28	$\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$
7.9	$\int \frac{x^2}{x^2+3}dx$	7.19	$\int \frac{x^3-3}{x+5}dx$	7.29	$\int \frac{x^2+4}{x-3}dx$
7.10	$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx$	7.20	$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$	7.30	$\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx$

8-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

8.1	$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$	8.16	$\int \frac{2x^4-4x^3+2x^3-4x+1}{x(x-1)^2}dx$
8.2	$\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$	8.17	$\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)}dx$
8.3	$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$	8.18	$\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$
8.4	$\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$	8.19	$\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$
8.5	$\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$	8.20	$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$
8.6	$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$	8.21	$\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
8.7	$\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$	8.22	$\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$
8.8	$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x^3}dx$	8.23	$\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
8.9	$\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$	8.24	$\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
8.10	$\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx$	8.25	$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$
8.11	$\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$	8.26	$\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$
8.12	$\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$	8.27	$\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
8.13	$\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$	8.28	$\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$
8.14	$\int \frac{x-1}{(x-1)(x^2-4x+13)}dx$	8.29	$\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
8.15	$\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	8.30	$\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$

9-тапсырма. Анықталған интегралды есептеңіз.

9.1	$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$	9.11	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 3x}$	9.21	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
9.2	$\int_0^{2\sqrt[6]{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$	9.12	$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	9.22	$\int_3^8 \sqrt{x+1}dx$
9.3	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$	9.13	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$	9.23	$\int_{\pi/6}^{\pi/6} \sin\alpha\cos^3\alpha$
9.4	$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x dx$	9.14	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$	9.24	$\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12ctg\,3xdx$
9.5	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$	9.15	$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$	9.25	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$
9.6	$\int \frac{dx}{x^2+1}$	9.16	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	9.26	$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
9.7	$\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	9.17	$\int_0^1 3(x^2+x^2e^{x^2})dx$	9.27	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$
9.8	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$	9.18	$\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	9.28	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$
9.9	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$	9.19	$\int_1^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2}{1+x^6}dx$	9.29	$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha\sin^3\alpha d\alpha$
9.10	$\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$	9.20	$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$	9.30	$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}$

Типтік нұсқаның шешуі

1-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз $\int \frac{3x^3-5x^2+7}{x^2}dx$.

Шешуі.

$$\int \frac{3x^3-5x^2+7}{x^2}dx = \int\left(\frac{3x^3}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}\right)dx = 3\int xdx - 5\int\frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 5\ln x - \frac{7}{x} + C.$$

2-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз

а) $\int \frac{dx}{x+3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$; в) $\int ctgx \cdot \ln\sin x dx$;

г) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[9]{\sin x-\cos x}}dx$; д) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Шешуі.

а) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$;

б) $\int \frac{du}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C$;

в) $\int ctgx \cdot \ln\sin x dx$. Келесі теңдікті қолданып

$$ctgxdx = (\ln\sin x)'dx = a(\ln\sin x),$$

берілген интегралды кестелік интегралға келтіреміз

$$\int \ln\sin x d(\ln\sin x) = \left| \begin{array}{l} \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \\ t = \ln\sin x \\ n = 1 \end{array} \right| = \frac{\ln^2 \sin x}{2} + C;$$

г) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[9]{\sin x-\cos x}}dx$. Интегралданатын функцияның алымы түбір астындағы функцияның дифференциалы, яғни

$$(\sin x+\cos x)dx = d(\sin x-\cos x),$$

сонда

$$I = \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[9]{\sin x-\cos x}} = \int (\sin x-\cos x)^{-1/9} d(\sin x-\cos x) =$$

$$= \frac{9}{8}\sqrt[9]{(\sin x-\cos x)^8} + C.$$

д) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. Алмастыруды қолданамыз $t = \sqrt{1+\ln x}$, осыдан $\ln x = t^2 - 1$, $\frac{dx}{x} = 2tdt$. Берілген интегралға қоямыз:

$$2\int \frac{(t^2-1)tdt}{t} = 2\int (t^2-1)dt = 2\int t^2 dt - 2\int dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C.$$

3-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз $\int \frac{dx}{1+5x^2}$.

Шешуі.

$$\int \frac{dx}{1+5x^2} = \left| \begin{matrix} \mathrm{t} = \sqrt{5}x \\ \int \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2} = arctgt + C \end{matrix} \right| = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{5}x)^2} = arctg\sqrt{5}x + C.$$

4-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз $\int \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}$.

Шешуі.

$$\int \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} = \left| \begin{matrix} t = \ln(x+2) \\ dt = \frac{1}{x+2}dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{-2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2(x+2)} + C.$$

5-тапсырма. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз

а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}$.

Шешуі.

а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$. Бөлшектің бөлімін үшмүшелікке келтіріп, кестелік интеграл аламыз

$$x^2+6x+25 = x^2+2\cdot 3x+3^2-3^2+25 = (x^2+2\cdot 3x+9)-9+25 =$$
$$= (x^2+6x+9)+16 = (x+3)^2+16.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4} + C;$$

б) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$. Бөлшектің бөлімін үшмүшелікке толықтырамыз, ал алымын келесі түрге келтіріп, екі кестелік интеграл аламыз:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\cdot \int \frac{dx}{x^2-4x+8} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} + 5\cdot \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C;$$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}$. Түбір астындағы өрнекті үшмүшелікке толықтырамыз:

$$x^4-4x^2+3=[(x^2)^2-2\cdot 2x^2+4]-4+3=(x^2-2)^2-1,$$

сонда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}=\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-2)^2-1}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2)2}{\sqrt{(x^2-2)^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2+\sqrt{x^4-4x^2+3}\right|+C.$$

6-тапсырма. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз:

а) $\int(4x-3)\cos 2xdx$;

б) $\int arctg\, x\, dx$.

Шешуі.

а) $\int(4x-3)\cos 2xdx$. Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$\int(4x-3)\cos 2xdx=\left|\begin{array}{l} u=4x-3 \quad du=4dx \\ dv=\cos 2xdx \\ v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|=$$

$$=(4x-3)\frac{\sin 2x}{2}-2\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}(4x-3)\sin 2x+\cos 2x+C.$$

б)

$$\int arctg\, x\, dx=\left|\begin{array}{ll} u=arctg\, x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x^2} & v=x \end{array}\right|=xarctd\, x-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=xarctg\, x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

7-тапсырма. Анықталмаған интегралдарды есептеңіз

а) $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$; б) $\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Шешуі.

а) $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$. Белгісіз коэффициенттер әдісін қолданамыз. Бөліміндегі өрнекті көбейтінділерге жіктейміз

$$x^5 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Сонда

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \right) dx.$$

Соңғы интегралды ортақ бөлімге келтіреміз

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

x-тің дәрежелері бірдей мүшелерінің коэффициенттерін теңестіріп, келесі жүйені аламыз:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^4 & B + C + D = 0 \\ x^3 & A + C - D + E = 0 \\ x^2 & C - E = 0 \\ x & -B = 0 \\ x^0 & -A = 1 \end{array}\right\}.$$

Осыдан белгісіз коэффициенттерді табамыз A=-1, B=0, C=1/3, D=-1/3, E=1/3.

Сонда,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

б) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$. Белгісіз коэффициенттер әдісін қолданамыз. Интеграл астындағы бөлшекті жай бөлшектерге жіктейміз

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1),$$

$$x=1: \quad 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}, \qquad x=0: \quad 0 = -B + C \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

x^2 мүшелерінің коэффициенттерін теңестіреміз

$$0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

сонда

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = --\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c.$$

8-тапсырма. Анықталмаған интегралды есептеңіз $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2+5x+12}dx.$

Шешуі. Бөлшектің бөлімін келесі түрге келтіреміз:

$$x^3-2x^2+5x+12 = (x-1)(x-4)(x+3),$$

интегралданатын функцияны жай бөлшектерге бөлеміз:

$$\frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2+5x+12} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}.$$

Ортақ бөлімге келтіріп, келесі теңдікті аламыз

$$2x^2+41x-91 = A(x-4)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-4).$$

Анықталмаған коэффициенттерді табамыз:

x = 1 болғанда –48 = -12A, осыдан A = 4;

x = 4 болғанда 105 = 21B, осыдан B = 4;

x = -3 болғанда – 196 = 28C, осыдан C = - 7.

A, B, C коэффициенттердің мәндерін қойып, интегралды есептейміз:

$$\int\left[\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3}\right]dx = 4\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{x-4} - 7\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= 4\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C.$$

9-тапсырма. Анықталған интегралдарды есептеңіз:

Шешуі. Ньютон-Лейбниц формуласын қолданамыз

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

сонда

$$\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Әдебиеттер тізімі

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Учебник для вузов. – Т.1, -М.: Дрофа, 2013. – 351 с.

2 Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. -ч.1. – М., 2003, 2008.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной/под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2007, 2009.-304 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: Ч. 2 Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных Обыкновенные дифференциальные уравнения /под ред. А.П.Рябушко – Мн.: Выш. шк., 2007.-304 с.

5 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

6 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданими). Часть 1. – Алматы, 2008. – 423 с.

7 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2007. – 288 с.

Мазмұны

Теориялық сұрақтар..... 3
№1 есептеу-сызба жұмысы. 1-модуль. Сызықтық және векторлық алгебра, аналитикалық геометрия..... 4
Типтік нұсқаның шешуі..... 15
№2 есептеу-сызба жұмысы. 2-модуль. Математикалық талдаудың элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функциялардың дифференциалдық есептеулері..... 29
Типтік нұсқаның шешуі 41
№3 есептеу-сызба жұмысы. 3-модуль. Математикалық талдау элементтері. Бір айнымалыдан тәуелді функцияның интегралдық есептеулері..... 47
Типтік нұсқаның шешуі 53
Әдебиеттер тізім..... 58