Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі
«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

А.К.Дүйсек, Ж.С.Абдулланова

МАТЕМАТИКА 1
Оқу құралы

АЭжБУ
Алматы 2016

ӘОЖ 510(075.8)
КБЖ 22.1я73-
Д87

Пікір берушілер:
физика-математика ғылымдарының кандидаты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының доценті
Ү.Қ.Қойлышов,
физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қ.И. Сәтпаев атындағы ҚазҰЗТУ «Математика» кафедрасының доценті
А.Н.Дадаева,
техника ғылымдарының кандидаты, АЭжБУ компьютерлік технологиялар кафедрасының доценті
А.А. Аманбаев
Алматы энергетика және байланыс университетінің Ғылыми кеңесі басуға ұсынды (26.01.2016ж. № хаттама). АЭжБУ 2015 ж.ведомостік әдебиеттер басылымдарын шығарудың тақырыптық жоспары бойынша басылады, реті 39.

Дүйсек А.К.

Д87 Математика 1: Оқу құралы. (Жоғары оқу орындарының 5В071700, 5В071800, 5В071900 «Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар» мамандығы студенттеріне арналған) /А.К.Дүйсек, Ж.С.Абдулланова. – Алматы АЭжБУ, 2016,- 71 б.: ил. – 11, әдеб.көрсеткіші – 7 атау.

ISBN 978-601-7436-96-4

Ұсынылып отырған оқу құралы «Математика 1» пәнінің оқу бағдарламасы бойынша жазылған. Бұл құралда сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия элементтері, анализге кіріспе, бір айнымалылы функцияның дифференциалдық және интегралдық есептеулері қамтылған. Теориялық және практикалық материалдар жеткілікті мөлшерде мысалдармен өрнектелген.

Оқу құралы «Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар» мамандығы бойынша білім алатын студенттерге арналған.

ӘОЖ 510(075.8)
КБЖ 22.1я73

ISBN 978-601-7436-94-4

© АЭжБУ,2016
Дүйсек А.К.,
Абдулланова Ж.С., 2016

Анықтауыштар мен матрицалар

1.1Екінші ретті анықтауыштар

Мынандай алгебралық сызықтық жүйені қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad (1.1.1)$$

мұнда x_1 және x_2 белгісіздер, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ белгісіздердің коэффициенттері, b_1, b_2-бос мүшелер.

Осындай жүйелерді бұрында мектепте қарастырғанбыз. Мұны шығару үшін мынадай әдісті қолданайық.

Бірінші теңдеуді a_{22}, екінші теңдеуді a_{12} – ге көбейтіп, бірінші теңдеуден екіншісін мүшелеп алайық.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{12} - b_2a_{22}. \qquad (1.1.2)$$

Енді бірінші теңдеуді a_{12} – ге, екінші теңдеуді a_{11}-ге көбейтіп, бірінші теңдеуден екіншісін мүшелеп алсақ, онда

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}. \qquad (1.1.3)$$

болады.

Егер $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ болса, онда (1.1.1) жүйесінің шешімдері мынаған тең:

$$x_1 = \frac{b_1a_{12} - b_2a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (1.1.4)$$

Осы шешімнің мәндері ықшамдау үшін бөліміне мынадай белгілеу енгізейік

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta x.$$

Бұл өрнекті, яғни $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ берілген жүйенің екінші ретті анықтауышы деп атайды: мұндағы $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$-анықтауыштың элементтері, ал $a_{11}, a_{12,}$ бірінші жатық жолдың $a_{11}, a_{21,}$ - бірінші тік жолдың (бағанның) элементтері деп аталады.

Элементтердің индексінің бірінші саны жатық жолдың нөмірін, ал екіншісі тік жолдың (бағанның) нөмірін көрсетеді.

Анықтауыштың берілген анықтамасын пайдаланып, (1.1.4) шешімді былай жазуға болады.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (1.1.6)$$

Егер $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ деп белгілесек, онда

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}. \tag{1.1.7}$$

Осы (1.1.7) формулаға сүйеніп, жүйенің шешімдері туралы мынадай қорытынды жасауға болады:

1) Егер $\Delta \neq 0$, онда жүйенің нақты бір ғана шешімі болады.

2) Егер $\Delta = 0$ болып, ал Δx_1 немесе Δx_2-нің кемінде біреуі нөлге тең болмаса, онда жүйенің шешімі болмайды.

3) Егер $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$, онда бұл жүйенің шексіз көп шешімі болады.

Берілген (1.1.1) жүйенің шешімін тапқан осы әдісті Крамер ережесі деп атайды.

Мынадай мысал қарастырайық

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}.$$

Шешуі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11.$$

Сонда (1.1.7) формула бойынша

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1.$$

Демек, жүйенің бір ғана шешімі бар $(x_1 = 2,\ x_2 = 1)$.

1.2 Үшінші ретті анықтауыштар

Бірінші дәрежелі үш белгісізі бар үш теңдеудің жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \tag{1.2.1}$$

Бұл жерде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

теңдеулер жүйесінің анықтауышы.

Бұл анықтауыштың мәні мынаған тең болады:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.2.2}$$

Мұны үшінші ретті анықтауыш деп атайды.

Бұл анықтауыштарды табу үшін үшбұрыштық Саррюс және де басқа әдістер қолданылады.

Осы анықтауыштарды есептеген соң, (1.2.1) жүйесінің шешімін мына Крамер формулалары арқылы табамыз:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Мынадай мысал келтірейік.

Алгебралық сызықтық жүйе берілсін:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Шешуі:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 18 + 18 - 18 - 9 - 16 = 1;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 42 + 45 - 42 - 36 - 40 = 1;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 36 + 42 - 45 - 21 - 32 = 0;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 + 24 - 24 - 15 - 28 = 1.$$

Осыдан

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{1} = 0; \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1.$$

Яғни, шешімі $x_1 = 1; \; x_2 = 0; x_3 = 1.$

1.3 Реті n – ге тең анықтауыш және оның қасиеттері. Минорлар және алгебралық толықтауыштар

Мынадай кесте бізге берілсін

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3.1)$$

Мұндай кестені $n \times n$ өлшемді матрица деп атайды. Бұл матрицаның элементтері n жатық және және n тік жол (баған) бойымен орналасқан.

Анықтама. Реті n-ге тең анықтауыш деп (1.3.1) матрицаның жатық жолдарымен тік жолдарының әрқайсысымен бір-бірден алынған n элементтің көбейтіндісінен тұратын $n!$ қосылғыштың алгебралық қосындысын айтады.

n-ші ретті анықтауышты былай белгілейді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.3.2)$$

Мұндағы $a_{ij}(i, j = 1,2,...n)$ анықтауыштың элементтері болады. Бірінші индекс жатық жолдың, екінші индекс тік жолдың нөмірі. Егер $n > 3$ болса, онда n-ші ретті анықтауышты есептеуге үшінші ретті анықтауыштарға пайдаланғандай ережені алдын ала көрсету қиын. Мұндай анықтауыштарды есептеуге басқа тәсілдер қолданылады.

Енді анықтауыштардың қасиеттерін дәлелдеусіз келтірейік.

1-қасиет. Анықтауыштағы барлық жатық жолдар мен сәйкес барлық тік жолдардың орындарын ауыстырса, онда анықтауыштың мәні өзгермейді.

2-қасиет. Анықтауыштағы кез келген екі жатық немесе екі тік жолдың орындарын ауыстырса, одан анықтауыштың тек таңбасы ғана өзгереді.

3-қасиет. Егер анықтауыштағы екі жатық немесе екі тік жолдың сәйкес элементтері өзара тең болса, онда анықтауыштың мәні нөлге тең болады.

4-қасиет. Егер анықтауыштағы кез келген бір жолдың барлық элементтерінің ортақ көбейткіші болса, оны көбейткіш етіп анықтауыштың таңбасының сыртына шығаруға болады.

5-қасиет. Егер анықтауыштағы екі жатық немесе екі тік жолдың элементтері пропорционал болса, онда анықтауыштың мәні нөлге тең болады.

6-қасиет. Егер анықтауыштағы кез келген бір жатық немесе тік жолдын элементтері екі (немесе бірнеше) санның қосындысынан тұрса, онда анықтауышты екі (немесе бірнеше) анықтауыштың қосындысы етіп жазуға болады.

7-қасиет. Егер анықтауыштағы кез келген бір жатық немесе тік жолдың барлық элементтерін бірдей нөлге тең емес санға көбейтіп, паралелль жатқан екінші бір жолдың сәйкес элементтеріне апарып қосса, одан анықтауыштың мәні өзгермейді.

Анықтама. Реті n-ге тең анықтауыштан a_{ik} элементіне сәйкес минор деп, анықтауыштағы i-інші жатық жол мен k-нөмерлі тік жолдың элементтерін сызып тастағанда қалатын $(n-1)$ ретті анықтауышты айтады және M_{ik} деп белгілейді.

Анықтама. Анықтауыштың a_{ik} элементіне сәйкес алгебралық толықтауыш (A_{ik}) деп мына көбейтіндіні айтады:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \qquad (1.3.3)$$

Осы анықтамаларға сүйеніп анықтауыштың тағы да қосымша қасиеттерін келтірейік.

8-қасиет. Егер анықтауыштағы кез келген жатық немесе тік жолының барлық элементтерін өздеріне сәйкес алгебралық толықтауыштарға көбейтіп, шығатын көбейтінділердің бәрін қосса, ол қосынды анықтауыштың мәніне тең болады.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

9-қасиет. Егер анықтауыштағы бір жатық (немесе тік) жолдың элементтерін екінші бір жатық (немесе тік) жолдың элементтерінің сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қосса, ол әрқашанда нөлге тең болады.

Мысалы: $a_{11}A_{21} + a_{12}aA_{22} + a_{13}A_{23} + ... + a_{1n}A_{2n} = 0$

$a_{11}A_{31} + a_{12}aA_{32} + a_{13}A_{23} + ... + a_{1n}A_{3n} = 0$ т.с.с.

1.4 Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін Крамер ережесі арқылы шешу

Бізге n белгісізі бар n сызықтық теңдеуден тұратын жүйе берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (1.4.1)$$

Мұндағы $x_1, x_2..., x_n$-белгісіздер, $a_{ik}(i,k = 1,2,...n)$ белгісіздердің коэффициенттері, $b_1, b_2,..., b_n$ – бос мүшелер.

Анықтама. Белгісіздердің (1.4.1) жүйедегі теңдеулердің әрқайсысын теңбе-теңдікке айналдыратын мәндерін жүйенің шешімі деп атайды. Шешімі бар жүйені үйлесімді, шешімі жоқ жүйені үйлесімсіз жүйе деп атайды.

Екінші және үшінші ретті алгебралық сызықты теңдеулер жүйесі Крамер әдісімен шешуді біз бастапқы бөлімдерде қарастырғанбыз.

Сонда қарастырылған анықтауыштарға ұқсас анықтауыштарды (1.4.1) жүйеге де жазуға болады:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} .... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22}.... & a_{2n} \\ b_n & a_{n2}.... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2... & a_{2n} \\ a_{n1} & b_n... & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n-1} & b_2 \\ ... & ... & .... & ..... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Осыдан (1.4.1) жүйенің шешімін мына формулалармен табамыз:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, ..., \quad .x_3 = \frac{\Delta x_n}{\Delta}. \qquad (1.4.2)$$

Бұл формулаларды Крамер формулалары деп атайды.

Жүйенің шешімдерін зерттегенде мынадай қортындылар шығады (бұрын үш белгісіз үшін келтірілген):

1) Егер $\Delta \neq 0$, жүйенің шешімі тек біреу ғана болады.

2) Егер $\Delta = 0$, ал $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ анықтауыштардың кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда жүйенің шешімі болмайды.

3) Егер $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$ болса, онда жүйенің шешімінің сан шексіз болады.

1.5 Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

Анықтама. Реті $m \times n$ матрицасы деп мына кестені атайды:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & ... & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.5.1)$$

немесе $A_{ij} = (a_{ij})(i = 1,2,....m,\ j = 1,2,....n)$.

Матрицадағы a_{ij} оның элементтері деп аталады. Бірінші индекс жатық жолдың, екінші индекс тік жолдың нөмірлері.

Егер екі реттері бірдей (типтес) матрицалардың сәйкес элементтері өзара тең болса, ондай матрицалар тең матрицалар деп аталады. Демек

$A_{m+n} = (a_{ij}),\ B_{m+n} = (b_{ij})$. онда $A_{m \times n} = B_{m \times n}$ болады, егер $a_{ij} = b_{ij.}$

Бір жатық жолдан құралған матрица жол матрица деп аталады.

$$A = [a_1, a_2 ....a_n].$$

Ал бір ғана тік жолдың элементтерінен құралған матрица баған матрица деп аталады

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Егер матрицаның жатық жолдарының саны тік жолдарының санына тең болса, онда матрица квадрат матрица деп аталады.

Элементтерінің бәрі бірдей нөл болып келген матрица нөлдік матрица деп аталады.

Бас диагональдің элементтерінің басқа элементтерінің бәрі нөлге тең квадрат матрица диагоналдық матрица деп аталады.

Бас диагональдің элементтерінің бәрі бірдей бірге тең диагональ матрицаны бірлік матрица деп атайды.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & .....0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .... 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... 0 \\ - & - & - & -- \\ 0 & 0 & 0 & .... 1 \end{pmatrix}.$$

Егер квадрат матрицаның бас диагоналінің бір жағына орналасқан элементтерінің бәрі де нөл болса, ондай матрицалар төменгі немесе жоғарғы үшбұрышты матрицалар деп аталады.

Квадрат А матрицасының барлық жатық жолдарын өз (сол) нөмірлерімен тік жол етіп ауыстырып жазудан шыққан матрицаны A^T транспозицияланған матрица деп атайды.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ _{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Егер $A=A^T$ болса, онда матрица A симметриялы матрица деп аталады.

Анықтама. Типтес екі матрицаның қосынды деп, элементтері берілген матрицалардың сәйкес элементтерін қосу арқылы жасалған матрицаны айтады. Яғни

$A_{m+n}=(a_{ij}),\ B_{m+n}=(b_{ij})$ болса, онда

$$A+B=C_{m+n}=(C_{ij}),\ \ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Анықтама. Типтес A және B матрицалардың айырымы деп, элементтері A матрицасының элементтерінен B матрицасының сәйкес элементтерін шегеру арқылы жасалған C матрицасын айтады.

Демек,

$A_{m+n}=(a_{ij}),\ B_{m+n}=(b_{ij})$ болса, онда

$$C_{m+n}=A_{m+n}-B_{m+n}=(c_{ij}),\ \ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

Мысалы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$C=A-B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Матрицалар типтес болмаса, онда оларды қосу және азайту амалдарының мағынасы болмайды.

Егер А матрицасының тік жолдарының саны В матрицасының жатық жолдарының санына тең болса, онда А матрица В матрицамен келісілген матрица деп аталады.

Мысалы:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1\ b_4 \\ b_2\ b_5 \\ b_3\ b_6 \end{pmatrix}$$

келісілген матрицалар.

Реті бірдей квадрат матрицалар әрқашанда өзара келісілген матрицалар.

A матрицаны B матрицаға көбейту үшін A матрицасымен B матрицасы келісілген матрица болуы керек, яғни A_{m+n}, B_{n+k}.

A матрица мен В матрицаның көбейтіндісі деп, реті $\mathrm{m}\times\mathrm{k}$-тең матрица C_{m+k} -ны айтады. Сонда

$$C_{m+k}=(C_{ij})Cij=\sum_{s=i}a_{is}b_{sj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Мысал.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+2\cdot0+(-1)(-1) & (-3)3+2\cdot1+(-1)\cdot0\\ 1\cdot2+0\cdot0+4(-1) & 1\cdot(-3)+0\cdot1+4\cdot0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -7\\ -2 & -3\end{pmatrix}.$$

Матрицаға қолданылатын амалдардың негізгі қасиеттері мыналар:

1) $A+B=B+A$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $A+\varnothing=A$;
4) $A+(-A)=0$;
5) $E\cdot A=A$;
6) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
9) $(AB)\cdot C=A(BC)$;
10) $(A+B)C=AC+BC$;
11) $C(A+B)=CA+CB$.

1.6 Кері матрица

Анықтама. Егер квадрат матрица А-ның элементтерінен құралған $|A|$ немесе $\det A$ нөлге тең болмаса, оны айырықша емес матрица дейді. Ал егер $|A|=0$, онда матрицаны айырықша матрица деп атайды.

Анықтама. Матрица $AB=BA=E$ болса, онда B матрицаны A матрица үшін кері матрица деп атайды және былай белгілейді $B=A^{-1}$.

Матрица A-ға кері матрица A^{-1} бар болуы үшін, A айырықша емес матрица болуы керек.

Егер $\det A=|A|\neq0$ және $A(a_{ij}),(A_{ij})$ алгебралық толықтауыштардан құралған матрица болса, онда

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \ldots\ A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots..A_{n2}\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots..A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0 & 0 & 0\\ 0 & |A| & 0 & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & .. & |A|\end{pmatrix}=|A|\cdot E.$$

Сонда

$$\frac{1}{|A|}\cdot B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ - & - & ... & - \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

-кері матрицаның табу формуласы.

1.7 Матрицаның әдіспен сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу

Бізге жалпы сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \\ a_{m_1}x_1 + a_{n_2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (1.7.1)$$

Бұл жерде $x_1, x_2, ...x_n$ белгісіз айнымалылар, a_{ij} -олардың коэффициенттері, $b_1, b_2, ...b_n$ -бос мүшелер.

Мынандай белгілеулер енгіземіз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \\ \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Осыдан

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .---------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Сондықтан, матрицаның теңсіздігінің анықтамасын пайдаланып (1.7.1) жүйені матрица арқылы былай жазуға болады.

$$A \cdot x = B \qquad (1.7.2)$$

Егер $\det A = |A| \neq 0$, онда А айырықша емес матрица. Сонда (1.7.2) теңдеуден $A^{-1}AX = A^{-1}B$ немесе $x = A^{-1}B$ (1.7.3)

(1.7.1) жүйенің шешімін матрицалық әдіспен (1.7.3) формуласымен табуға болады.

Мысал.

Бізге мынадай жүйе берілсін:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}.$$

$|\Delta|$ анықтауышты табамыз.

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3+18+18-18-9+6 = 1 \neq 0.$$

Кері матрица A^{-1} есептейтін формуланы

$$A-1 = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$ пайдаланайық.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Сондықтан

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Енді жүйенің шешімін табайық

$$x = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

яғни, $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1.$

2 Векторлық алгебра және аналитикалық геометрия негіздері

2.1 Векторлар және оған қолданылатын арифметикалық амалдар

Анықтама. Вектор деп, кеңістіктегі бағытталған кесіндіні атайды. Геометрияда вектор бағыты стрелкамен көрсетіледі. Басы А нүктесінде ұшы В нүктесінде орналасқан векторды $\overline{AB}$ немесе бір $\bar{a}$ әріппен белгілейді.

Векторды кескіндейтін кесіндінің ұзындығы немесе модулі деп атайды және былай белгілейді: $|AB|$ немесе бір әріппен $|\bar{a}|$.

Аналитикалық геометрияда еркін векторлар қарастырылады, яғни ол векторларды кеңістіктің кез келген жеріне көшіруге болады, егер оның параллельдігі, ұзындығы және бағыты сақталатын болса.

Егер үш вектор бір жазықтықта немесе паралель жазықтықта жататын болса, онда ол векторларды компланар векторлар деп атайды.

Егер екі вектордың бағыты және ұзындығы бірдей болса, онда ол векторларды тең векторлар деп атайды. Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың ұзындықтары бірдей, өзара паралель болып, ал бағыттары қарама-қарсы болса, оларды қарама-қарсы векторлар деп атайды және былай жазады $\bar{a} = -\bar{b}$. Енді векторларға арифметикалық амалдардың қолданылуына тоқталайық. Векторларды қосу амалын қолдану үшін геометрияда параллелограмм әдісін қолданады. Бұл әдіс бойынша, екі вектордың қосындысын табу үшін қосылғыш векторлардан басталған нүктелерін бір нүктеге орналастырып, сол екі вектор арқылы параллелограмм тұрғызады. Осы параллелограммның қосылғыш векторлардың басталған төбесінен жүргізілген диагоналы екі вектордың қосындысын анықтайды. Векторлардың қосындысының мынандай қасиеттері бар

$$1)\ \bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \qquad 2)\ (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}).$$

Екі вектордың айырмасын қосу амалына кері амал арқылы анықтауға болады. Яғни, $\bar{a}$ векторынан $\bar{b}$ векторын алғанда шығатын айырма вектор деп, $\bar{b}$ векторына қосқанда вектор $\bar{a}$ шығатын үшінші вектор $\bar{a}$-ның скаляр λ-ға көбейтіндісі деп $\lambda\bar{a}=\bar{b}$ векторды айтады. Егер $\lambda>0$ болса онда $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың бағыттары бірдей, ал $\lambda<0$ болса, онда $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың бағыттары қарама-қарсы болады.

Бұл көбейтіндінің мынандай қасиеттері бар:

1) $\lambda\bar{a}=\bar{b}\lambda$;
3) $\lambda(\alpha\bar{a})=(\lambda\alpha)\bar{a}$;
2) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;
4) $(\lambda+\alpha)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\alpha\bar{a}$.

Бізге $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ векторлар жүйесі берілсін.

Анықтама. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ жүйесі үшін бәрі бірдей нөлге тең емес және $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3=0$ (2.1.1) теңдігін қанағаттандыратын $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ сандары табылса, онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ векторларын сызықты тәуелді векторлар деп атайды.

Ал егер (2.1.1) теңдігі тек $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ бірдей нөлге тең болғанда ғана орындалса, онда $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ векторлар жүйесін тәуелсіз векторлар деп атайды.

Анықтама. А нүктесінің оське түсірілген проекциясы деп, осы нүктеден оське түсірілген AA_1 перпендикулярдың табанын, яғни A_1 нүктесін атайды.

Анықтама. АВ векторларының оське түсірілген проекциясы деп, осы осьтің кесіндісі болатын вектордың басталған және аяқталған нүктелерінің проекцияларының арасындағы A_1B_1 ұзындықты айтады.

$$np_l\overline{AB}=A_1B_1.$$

Егер векторлардың проекциялайтын осьпен жасайтын бұрышы және ұзындығы берілсе, онда ол вектордың оське түсірілген проекциясы мынаған тең болады

$$np_l\overline{AB}=\left|\overline{AB}\right|\cos\varphi, \qquad (2.1.2)$$

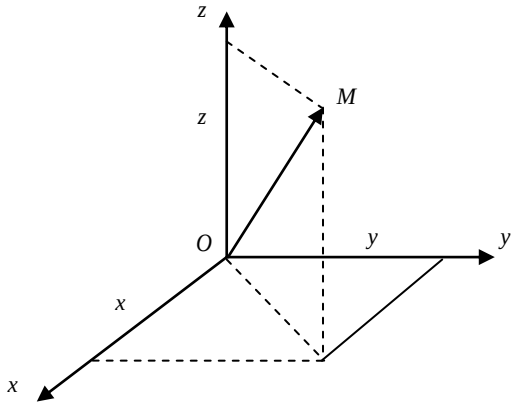
мұндағы $\overline{|AB|}$-вектордың ұзындығы, φ-вектордың проекциялайтын осьтің оң бағытымен жасайтын бұрышы.

2.2 Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі

Нүктенің және вектордың координаттары.

Кеңістіктегі нүктенің координаттарын анықтау үшін кез келген бір О нүктесін алып, сол нүктеден бір-біріне перпендикуляр болатын үш осьті жүргізеді.

Бір нүктеде қиылысатын, ұзындық өлшемдері бірдей, өзара перпендикуляр, реттелген үш координат осін кеңістіктегі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі деп атайды. (1 сурет)



OX-абсцисса осі,
OY-ордината осі,
OZ-апликат осі
$\overline{OM}$-радиус-вектор деп аталады
O-координатаның бас нүктесі

1 сурет

Егер М нүктесінің координаттары $x.y.z$ сандары болса, онда

$$np_{OX}\overline{OM} = X \quad , \quad np_{OY}\overline{OM} = Y \, , \; np_{OZ}\overline{OM} = Z \, .$$

Яғни, нүктені $M(x.y.z)$ деп белгілейді.

Мынандай теңдеулер орындалады:

$\left|\overline{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, *сонда* $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\overline{OM}$-вектордың ұзындығы.

Егер бірлік векторлар $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координаттар осьтері OX, OY, OZ сәйкесінше жататын болса, онда $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ деп жазуға болады.

Ал кез келген $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ мына түрде келтіруге болады

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \, .$$

Егер екі нүкте $Ml1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ берілсе, онда $\overline{M_1M_2}$ вектордың ұзындығы $\overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ тең болады.

2.3 Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп, сол векторлардың ұзындықтары мен екеуінің арасындағы бұрыштын косинусынын

көбейтіндісіне тең санды айтады. Берілген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың скалярлық көбейтіндісі былай белгіленеді:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi. \qquad (2.3.1)$$

Мұндағы φ бұрышы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш.

Осы формуланы (2.1.2)-ді пайдаланып былай жазуға болады.

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\,np_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Скалярлық көбейтіндінің төмендегідей қасиеттері бар.

1-қасиет. Кез келген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ үшін $(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{b}\cdot\bar{a})$.

2-қасиет. Кез келген $\bar{a}\neq 0$ үшін $(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

3-қасиет. Кез келген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары және $\lambda\in R$ саны үшін $(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

4-қасиет. Кез келген $\bar{a}$, $\bar{b}$ және $\bar{c}$ векторлар үшін $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c})$.

5-қасиет. Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары өзара ортогональ (перпендикуляр) болса, онда $(\bar{a}\cdot\bar{b})=0$.

Егер $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ векторлары берілсе, онда

$(\bar{a}\cdot\bar{b})=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ тең болады.

Сонымен $(\bar{a}\cdot\bar{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. (2.3.2)

Осы формуладан мынадай теңдіктер шығаруға болады.

Вектор $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$- ұзындығы

$$|\bar{a}|=\sqrt{(\bar{a}\cdot\bar{a})}=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}.$$

Вектор $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ -ның бағыттаушы косинустары

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\cos\gamma=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}.$$

Екі вектордың арасындағы бұрыш

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}.$$

Екі вектордың перпендикулярлық шарты $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ түрінде жазылады.

2.4 Екі вектордың векторлық көбейтіндісі

Анықтама. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп, мына шарттарды қанағаттандыратын үшінші $\bar{n}$ векторын айтады:

1) көбейтінді $\bar{n}$ векторының ұзындығы көбейткіш векторлар арқылы жасалған параллелограммның ауданына тең;

2) көбейтінді $\bar{n}$ векторын ұшынан қарағанда бірінші көбейткіш вектордан екінші көбейткіш векторына қарай айналу сағат

тілінің бағытына қарсы орындалады;

3) берілген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін былай белгілейді $\bar{a}\times\bar{b}=c$ немесе $[\bar{a}\cdot\bar{b}]=\bar{c}$.

Анықтама бойынша $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha,\ \bar{c}\perp\bar{a},\ \bar{c}\perp\bar{b},\ \alpha=(\bar{a}\bar{b})$.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1-қасиет Кез келген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлар үшін

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]=-[\bar{b}\cdot\bar{a}].$$

2-қасиет Кез келген $\lambda\in R$ және $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар үшін

$$[(\lambda\bar{a})\bar{b}]=\lambda[\bar{a}\cdot\bar{b}]=[\bar{a}(\lambda\bar{b})].$$

3-қасиет Кез келген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлар үшін

$$[(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}]=[\bar{a}\cdot\bar{c}]+[\bar{b}\cdot\bar{c}].$$

4-қасиет Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары өзара паралель болса, онда $[\bar{a}\cdot\bar{b}]=0$.

Енді $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ векторлар арқылы берілген $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ және $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ векторлардың векторлық көбейтіндісін табайық.

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]=[(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})]=(a_yb_z-b_ya_z)\bar{i}-(a_xb_z-b_xa_z)\bar{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\bar{k}.$$

Осыдан

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Бұл көбейтінді арқылы үшбұрыштың ауданын табуға болады.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Мысалы. $\bar{a}=(3,2,-1),\ \bar{b}=(1,3,2)$ векторлар арқылы құрылған үшбұрыштың ауданы

$$S=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{i}&\bar{k}\\3&2&-1\\1&3&2\end{vmatrix}=|7\bar{i}-7\bar{j}+7\bar{k}|=7\sqrt{3}.$$

2.5 Үш вектордың аралас көбейтіндісі

Анықтама. Үш вектордың аралас көбейтіндісі деп, екі вектордың векторлық көбейтіндісімен үшінші вектордың скалярлық көбейтіндісін айтады.

Көбейткіш векторлар $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ болса, онда олардың аралас көбейтіндісі $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, не $[\bar{a}\bar{b}]\cdot\bar{c}$ немесе $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ түрінде жазылады.

Аралас көбейтіндісінің нәтижесі санға тең, ал оның абсолют шамасы көбейткіш векторлардан құрылған параллелепипедтің көлеміне тең болады.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1-қасиет $[\bar{a}\cdot\bar{b}]\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot[\bar{b}\cdot\bar{c}]=[\bar{b}\cdot\bar{c}]\cdot\bar{a}$;

2-қасиет $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$;

3-қасиет Егер векторлар $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ копланар болса, онда $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$.

Ортогональ нормальдаған $\bar{i},\bar{j},k$ жүйесінде $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$ векторлары берілсін.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=[\bar{a}\cdot\bar{b}]\bar{c}=\begin{vmatrix}b_x & c_x\\ b_y & c_y\end{vmatrix}\bar{c}_x-\begin{vmatrix}a_x & c_x\\ a_y & c_y\end{vmatrix}\bar{c}_y+\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\bar{c}_z.$$

Демек,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Мысал. $\bar{a}=(1,0,1),\bar{b}=(2,-1,0),\ \bar{c}=(0,2,1)$ векторлардың аралас көбейтіндісін табу керек.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1+4+0+0-0-0=3.$$

2.6 Жазықтықтағы түзу

Анықтама. Жазықтықтағы жалпы сызықтық теңдеуі мына теңдіктен анықталады:

$$F(x,y)=0. \qquad (2.6.1)$$

Егер осы теңдеу алгебралық болып, және x пен y-тің дәрежелері бірге тең болса, онда оны түзудің теңдеуі деп анықтайды. Түзудің жалпы теңдеуі мына түрде беріледі:

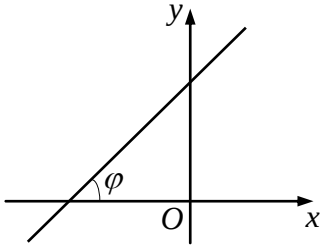
$$Ax+By+C=0. \qquad (2.6.2)$$

Егер $B\neq 0$, онда теңдеуді y арқылы былай жазамыз. $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

Енді $k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}$. белгілеу енгізсек, онда

$$y=kx+b. \qquad (2.6.3)$$

теңдеуіне келеміз. Бұл теңдеуді бұрыштың коэффициенті бар түзудің теңдеуі деп атайды. Бұл жерде $k=tg\varphi$, ал φ-түзумен OX осінің оң бағытымен жасаған бұрышты айтады (2 сурет).



2 сурет

Түзудің мынадай түрлері болады:

1) $y - y_0 k(x + x_0)$- бұл $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін және белгілі k - коэффициенті арқылы жазылған теңдеу.

2) $M_0(x_0, y_0)$ және $M_1(x_1, y_1)$ нүктелерден өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \ . \qquad (2.6.4)$$

3) Егер түзу $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін болса, онда түзудің теңдеуі мына түрде жазылады.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (2.6.5)$$

Бұл теңдеуді түзудің нормальдық теңдеуі деп атайды. Бұл жерде $\bar{n} = (A, B)$-нормаль вектор болады.

Енді екі түзудің арасындағы бұрышты қарастырайық:

4) Бізге екі түзу берілсін $y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$, бұл жерде $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$ бұрыштық коэффициенттері, ал $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ түзулердің арасындағы бұрыш бойынша

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$$

немесе

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (2.6.6)$$

Осыдан, егер түзулер бір-біріне паралель болса, онда $k_1 = k_2$, егер олар бір-біріне перпендикуляр болса, онда $k_1 \cdot k_2 = -1$ теңдіктер орындалады.

5) Енді екі түзу l_1 және l_2 жалпы теңдеулермен берілсін:

$$l_1 : A_1 x + B_{_1 1} y + C_1 = 0;$$

$$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Сонда осы екі түзудің арасындағы бұрыш α-ны мына формула арқылы табуға болады.

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{n_1}\,\overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{A_1 B_1 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \ . \qquad (2.6.7)$$

Бұл жерде $\bar{n}_1$ және $\bar{n}_2$ түзулердің нормальдық векторлары. (2.6.7) формуладан l_1 және l_2 түзулердің паралельдік шарты $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, ал перпендикулярлық шарты $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ теңдіктермен жазылады.

6) Егер A, B, C белгілі сандар және $M_0(x_0, y_0)$-белгілі нүкте болса, онда M_0 нүктеден $Ax + By + C = 0$ түзуге дейінгі қашықтық мына формуламен табылады.

$$\alpha = \frac{|Ax_0 + By_0| + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ . \qquad (2.6.8)$$

2.7 Кеңістіктегі жазықтық

Oxyz кеңістігінде π жазықтығында жататын $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және сол жазықтыққа перпендикуляр болатын $\overline{N} = (A, B, C)$ векторы берілсін. Бұл векторды π жазықтығының нормальдық векторы деп атайды.

Енді осы берілген мәлімдемелер арқылы π жазықтығының теңдеуін жазайық. π жазықтығында жататын белгісіз $M(x, y, z)$ нүктесін алайық және мына векторды құрамыз: $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Бұл вектор $\overline{N}$ векторына перпендикуляр болады және олардың скалярлық көбейтіндісі $(\overline{N}, \overline{M_0M}) = 0$. Осы теңдікті ашатын болсақ,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.7.1)$$

теңдікке келеміз. Осыдан, жақшаларды ашып тұрақты сандарды қосатын болсақ,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.7.2)$$

теңдік орындалады, бұл жерде $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Яғни, жазықтықтың теңдеуі (2.7.2) түрде беріледі және ол үш айнымалыдан тәуелді бірінші ретті алгебралық теңдеу. (2.7.2) теңдеуді жазықтықтың жалпы теңдеуі деп атайды.

Белгілі үш нүкте $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_{21})$ нүктелерден өтетін жазықтықтың теңдеуін

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.7.3)$$

формуласымен табуға болады.

Бізге екі жазықтық теңдеулерімен берілсін

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Бұлардың нормальдық векторлары $\overline{N_1} = (A_1, B_{1,} C_1), \overline{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ болады.

Сонда осы екі жазықтықтың арасындағы бұрыш мына формула арқылы табылады.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.7.4)$$

Осы формуладан екі жазықтықтың паралель болу шарты

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (2.7.5)$$

перпендикуляр болу шарты

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (2.7.6)$$

болады.

Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтыққа дейінгі қашықтық мына формуламен анықталады.

$$\alpha = \frac{|Ax_0 + By_0 + \tilde{N}z_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.8 Кеңістіктегі түзу

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш.

Кеңістікте L түзуі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін және $\bar{S}(=l,m,n)$ векторына паралелль болсын. Онда бұл $\bar{S}$ векторды L түзудің бағыттаушы векторы деп атайды.

Бізге L түзуінде жататын $M(x,y,z)$ белгісіз нүкте берілсін. Онда $\overline{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ және $\bar{S}$ векторлары бір-біріне пропорционал болады. Осыдан мынадай пропоционалдық шартты жазуға болады:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \qquad (2.8.1)$$

Бұл теңдеуді түзу L-дің каноникалық теңдеуі деп атайды. (2.8.1) теңдеуге t параметрін енгізсек

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t.$$

Онда

$$x = x_0 + lt,\ \ y = y_0 + mz, z = z_0 + nt \qquad (2.8.2)$$

теңдіктер шығады.

(2.8.2) теңдеуді L түзуінің параметрлік теңдеуі деп атайды.

Бізге екі түзу канондық теңдеулерімен берілсін

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} = t,$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} = t.$$

Бұлардың бағыттаушы векторлары $\bar{S}_1(=l_1,m_1,n_1)$, $\bar{S}_2(=l_2,m_2,n_2)$.

Сонда екі түзудің арасындағы бұрыш, солардың бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышқа тең

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{S}_1\bar{S}_2)}{|\bar{S}_1||\bar{S}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (2.8.3)$$

Мұндағы α екі түзудің арасындағы бұрыш.

Түзулердің паралельдік шарты

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (2.8.4)$$

Перпендикулярлық шарты

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \qquad (2.8.5)$$

түрлерінде жазылады.

Берілген жазықтық $Ax + By + Cz + D = 0$ пен $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ түзудің арасындағы бұрыш мына формуламен табылады

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (2.8.6)$$

Осыдан, түзу мен жазықтықтың арасындағы паралельдік шарты

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (2.8.7)$$

ал перпендикулярлық шарты

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \qquad (2.8.8)$$

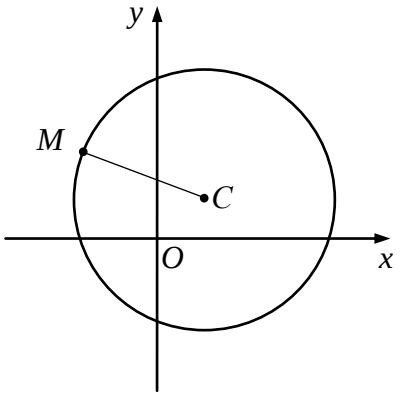
түрлерінде жазылады.

2.9 Екінші ретті қисықтар және олардың канондық теңдеулері

Жоғары математикада екінші дәрежелі теңдеулермен анықталатын сызықтарды екінші ретті қисықтар деп атайды. Олар негізгілері шеңбер, эллипс, гипербола және парабола деп аталады. Бұл қисықтар техника мен ғылым саласында жиі кездеседі.

Шеңбер. Центр деп аталатын берілген нүктеден бірдей қашықтыққа жататын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын шеңбер деп атайды (3 сурет).

$\tilde{N}(x_0, y_0)$ берілген нүкте. Шеңбердің бойынан кез келген жылжымалы $M(x, y)$ нүктесін алайық. Сонда $\overline{CM}(x - x_0, y - y_0)$



$$R = \overline{CM}\sqrt{(x - x_0)^2 (y - y_0)^2}$$

немесе

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 \ . \qquad (2.9.1)$$

3 сурет

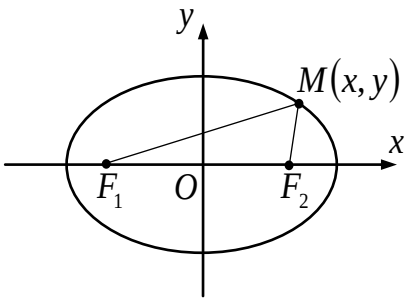
(2.9.1) –центрі С нүктесінде жатқан радиусы R-ге тең шеңбердің канондық теңдеуі.

Егер шеңбердің центрі С координаттардың бас нүктесінде жатса, онда $x_0 - y_0 = 0$. Сондықтан (2.9.1) мына түрге келеді.

$$x^2 + y^2 = R^2 . \qquad (2.9.2)$$

Эллипс. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарытарының қосындысы әрқашан тұрақты шама болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын эллипс деп атайды. (4 сурет).

Анықтама бойынша $F_1M + F_2M = 2a$ (2.9.3). мұндағы F_1 және F_2 фокус деп аталатын берілген нүктелер. $M(x, y)$-эллипстің бойындағы кез келген жылжымалы нүкте. $2a$ тұрақты шама.



4 сурет

Егер $F_1F_2 = 2c$ десек, онда $F_1(-C;\,0),\ F_2(C;\,0)$.

Сонда $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Енді осы мәндерді (2.9.3) теңдігіне қойсақ:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

немесе

$$(x+c)^2 + y^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2,\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \quad \textit{егер } a > c \textit{ болса},$$

онда $a^2 - c^2 > 0$ болады. Сондықтан $a^2 - c^2 = b^2$ деп белгілесек, эллипстің канондық теңдеуі деп аталатын теңдеуге келеміз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (2.9.4)$$

Мұндағы x пен y эллипстің кез келген жылжымалы нүктесінің координаттары a-эллипстің үлкен жарты осі, b-оның кіші жарты осі.

Осьтер эллипске симметриалы, ал симметриалы осьтердің қиылысатын нүктесі элллипстің центрі болады.

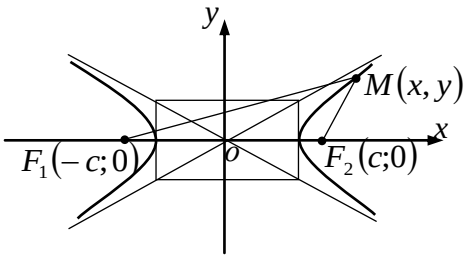
$\frac{c}{a}$ қатынасын эллипстін эксцентристеті деп атайды және оны $\frac{c}{a} = l$ деп белгілейді. Сонымен бірге $a > 0$ болғандықтан $l < 1$ немесе $\frac{c}{a} < 1$.

Эллипстің үлкен осіне перпендикуляр түзулердің ішінде бір түзудің элллипстің кіші осінен қашықтықтағы d әрқашанда $\frac{a}{l}$ қатынасына тең $d = \frac{a}{l}$ тұрақты шама болса, онда мұндай түзуді эллипстің директрисасы деп атайды. Директрисалардың теңдеуі $x = \pm\frac{a}{l}$. Эллипс үшін $l < 1$ болғандықтан $\frac{a}{l} > a$.

Сондықтан эллипстің директрисалары оның сыртында жатады.

Егер $a = b$ болса, онда шеңбер эллипстің дербес жағдайы болады. Бұл жағдайда $c = 0$, ендеше шеңбердің эксцентриситеті нөлге тең.

Гипербола. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырмасы әрқашанда тұрақты шама болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын гипербола деп атайды (5 сурет).



5 сурет

Егер $F_1F_2 = 2a$ десек, онда $F_1(-c,\ 0),\ F_2(c;0)$. Сонда анықтама бойынша

$$F_1M - F_2M = 2a\ . \qquad (2.9.5)$$

Мұндағы F_1 және F_2 - фокус деп аталатын берілген нүктелер. $M(x, y)$ гиперболаның бойындағы кез келген жылжымалы нүкте , $2a$ -тұрақты шама.

Екі нүктенің ара қашықтығының формуласы бойынша

$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Осы мәндерді (2.9.5) теңдікке қойсақ, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Осы теңдеуді түрлендіріп, $c^2 - a^2 = b^2$ деп белгілесек, гиперболаның канондық теңдеуіне келеміз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.9.6)$$

Мұндағы x, y гиперболаның бойындағы кез келген жылжымалы нүктенін координаттары, a -гиперболаның нақты жарты осі, b -жорамал жарты осі.

Гиперболаның екі фокусының ара қашықтығының нақты осіне қатынасы $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ гиперболаның эксцентриситеті деп аталады және $\frac{c}{a} = l$ деп белгіленеді. $c^2 - a^2 = b^2$ -тан $c > a$, ендеше гиперболаның эксцентриситеті $l > 1$.

Гиперболаның асимптотасы деп, координатаның бас нүктесінен өтетін және гиперболаның тармақтарымен шексіз алыстағы нүктеде кездесетін түзуді айтады. Олардың теңдеулері:

$$y = \frac{b}{a}x;\ \ y = -\frac{b}{a}x,$$

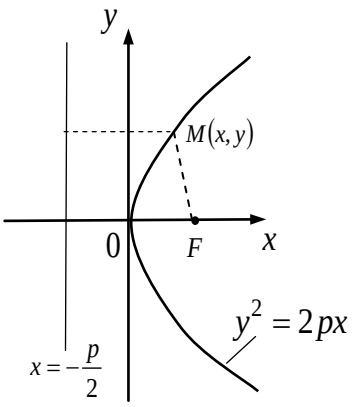
мұндағы a мен b -гиперболаның жарты остері.

OY осіне параллель түзулердің ішінде бір түзудің гиперболаның жорамал осінен қашықтығы d әрқашанда $\frac{a}{l}$ қатынасына тең ($d = \frac{a}{l}$) тұрақты шама болса, онда ондай түзуді гиперболаның директрисасы деп атайды. Оның теңдеуі $x = \pm\frac{a}{l}$ болады.

Гиперболаның эксцситриситеті $l>1$ болғандықтан $x=\frac{a}{l}<a$. Ондай болса гиперболаның директрисалары оның төбелерінің арасында жатады.

Парабола. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын парабола дейді (6 сурет).

Берілген F нүктесінің координаталарын былай белгілейік: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$



6 сурет

Координаттардың бас нүктесінен $\frac{p}{2}$ қашықтықтағы ординат осіне параллель берілген түзуді параболаның директрисасы дейді.

$M(x,y)$-параболаның бойындағы кез келген жылжымалы нүкте (6 сурет).

Анықтама бойынша

$$FM=ME. \qquad (2.9.7)$$

Екі нүктенің ара қашықтығының формуласы бойынша

$$FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad ME=\frac{p}{2}+x.$$

Осы мәндерді (2.9.7) апарып қойып, шыққан өрнекті түрлендірсек, параболаның канондық теңдеуі шығады:

$$y^2=2px. \qquad (2.9.8)$$

Мұндағы p-берілген фокус пен директрисаның арасындағы қашықтық, x,y параболаның бойындағы кез келген жылжымалы нүктенің координатасы.

Параболаның эксцентриситеті: $\frac{FM}{ME}=1,\ l=1.$

Параболаның директрисасының теңдеуі: $x=-\frac{p}{2}$.

3 Функциялар. Шектер теориясы

3.1 Функция ұғымы. Берілу тәсілдері

Жаратылыстану ғылымдары мен техникалық білімдердің кез келген салаларында кездесетін негізгі ұғымдардың бірі-шамалар ұғымы.

Шамалардың екі түрі болады. Тұрақты және айнымалы.

Егер шама кез келген жағдайда бір сан мәнін сақтайтын болса, онда оны тұрақты шама деп атайды. Ал егер шама қарастырылып отырған, жағдайда әр түрлі мәндерді қабылдайтын болса, онда оны айнымалы деп атайды. Көбіне айнымалы шаманы x, y, z әріптерімен белгілейді.

Енді бізге нақты сандардан құралған A және B жиындары берілсін.

Анықтама. Егер белгілі бір ережеге немесе заң бойынша A жиынының әрбір элементі x-қа B жиынының тек қана бір элементі y сәйкес болса, онда A жиынында бір мәнді $y = f(x)$ функциясы анықталған дейді.

Осы анықтамадан A жиынының $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы, ал B жиынының функциясының мәндерінің жиыны деп атайды.

Бұл жерде x тәуелсіз айнымалы, ал $y - x$ айнымалыдан тәуелді функция болады.

Функцияның берілу тәсілдері көп, бірақ жиірек кездесетін үш түрі бар:

1) аналитикалық;

2) кестелік;

3) графикалық.

Аналитикалық жағдайда айнымалы мен функция арқылы байланыс формула түрінде беріледі. Мысалы: $y = 3x + 5,\ y = \frac{1}{x^3},\ y = x^4 + \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}$ - аналитикалық берілген функциялар. Бұлардың қатарына өзіміз мектепте өткен элементарлық функцияларды жатқызуға болады. ($y = x^n,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = a^x$).

Таблица арқылы берілген айнымалы мен функцияның мәндерінің сәйкестігін таблицалық (кестелік) функция деп атайды.

Егер айнымалы мен функцияның сәйкес мәндері график түрінде берілсе, онда оны графикалық функция дейді.

Енді функцияның негізгі қасиеттерін қарастырайық:

1) Егер кез келген $f(x)$ функциясы үшін $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда оны жұп функция, ал $f(-x) = -f(x)$ болса, онда оны тақ функция деп атайды.

2) Егер берілген, облыста $M > 0$ саны табылып, $|f(x)| \le M$ теңдігі орындалса (барлық x үшін), онда ол функцияны шенелген деп атайды.

3) Егер берілген облыста жататын барлық x үшін $T \neq 0$ саны табылып, $f(x+T) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$-периодты функция, ал T санын оның периоды деп атайды.

4) Кез келген $x_1, x_2 \in A$ үшін $x_2 > x_1$ теңсіздіктен $f(x_2) > f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функцияны кемімелі деп атайды.

Егер x аралығында функция өспелі немесе кемімелі болса, онда оны осы аралықта монотонды функция деп атайды.

3.2 Функцияның шегі

Ақырлы шегі бар функциялардың қасиеттері.

Бізге нақты сандар жиыны E, сол жиынның $x_0(x_0 \in E)$ нүктесі және осы x_0 нүктесінің $U_b(x_0)$ маңайында анықталған x айнымалыдан тәуелді функция $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде анықталған немесе анықталмағандығын талап етпейміз, яғни x_0 нүктесінің $U_b(x_0)$ маңайына x_0 нүктесі кірмеуі мүмкін.

1-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ оң саны бойынша $b = b(\varepsilon)$ саны табылып, $|x - x_0| < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер $(x + x_0)$ үшін, $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда A санын айнымалы x тұрақты x_0 санына ұмтылғандағы $(x \to x_0)$, $f(x)$ функцияның шегі деп атайды да былай белгілейді:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Егер A нақты сан болса, онда ақырлы шек деп атайды. Ал егер A шамасы '∞', '$-\infty$' символдардың біреуі болса, онда оны ақырсыз үлкен шек деп атайды. Сол сияқты, егер x_0 нақты сан болса, функцияның шегін нүктедегі шегі деп атайды.

2-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ оң саны бойынша $b > 0$ саны табылып, $x_0 < x < x_0 + b$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда A санын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі оң жақ шегі деп атайды да былай жазады:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

3-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ оң санына сәйкес $b = b(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $x_0 - b < x < x_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін $|f(x) - B| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, B санын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сол жақ шегі деп атайды да былай белгілейді:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = B.$$

1) A саны $f(x)$ функциясының айнымалы x тұрақты x_0 санына ұмтылғанда $(x \to x_0)$ шегі болу үшін $(f(x) - A) \to 0$ шарты қажет және жеткілікті.

2) Егер $f(x)$ функциясының $(x \to x_0)$ ақырлы шегі бар болса, ол сол x_0 нүктесінің қандай да бір $U_b(x_0)$ маңайында шенелген функция болады.

3) Егер $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l$ $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = A$ болып және x_0 нүктесінің $(x - x_0)$ қандай да болмасын бір $U_b(x_0)$ маңайында мына $f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x)$ теңсіздіктері орын-

далса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ болады.

4) Нақты (ақырлы) шегі бар бірнеше функцияларының алгебралық қосындысының немесе көбейтіндісінің шегі қосылған функциялардың шектерінің алгебралық қосындысына немесе көбейткіш функциялардың шектерінің көбейтіндісіне тең. Яғни $\lim f(x)=A$, $\lim\varphi(x)=B$ болса, онда

$$\lim[f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B.\quad \lim[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x)=A\cdot B.$$

5) Бөлімнің шегі нөлге тең болмайтын екі функцияның қатынасының шегі алымы мен бөлімінің шектерінің қатынасына тең. Демек

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

теңдігі орындалады.

6) Егер $f(x)$ функциясы үшін x_0 нүктесінің $U_b(x_0)$ маңайында $|f(x)|>M,\ M>0$ теңсіздігі орындалып, ал $\varphi(x)$ функциясы үшін $\lim\varphi(x)=B<\infty$ болса, онда $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$.

7) Егер $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<\infty$ және $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ болса, онда $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$.

3.3 Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар, олардың қасиеттері және арасындағы байланыс

Анықтама. Егер айнымалы x тұрақты x_0 санына ұмтылғанда, $\alpha(x)$ функциясының шегі нөлге тең, яғни $l\ \underset{x\to x_0}{im}\ \alpha(x)=0$ болса, онда $\alpha(x)$ функциясының $x=x_0(x\to x_0)$ нүктесінде шексіз (ақырсыз) үлкен функция (шама) деп атайды.

Қасиеттері:

1) Егер $\alpha(x)$ x_0 нүктесіне шексіз аз функция болса, онда оған кері $\frac{1}{\alpha(x)}=\beta(x)$ функция сол x_0 нүктесінде шексіз үлкен функция болады.

2) Егер $\beta(x)$ функциясы $x\to x_0$ шексіз үлкен болса, оған кері функция $\alpha(x)=\frac{1}{\beta(x)}$ шексіз аз функция болады.

3) Саны шектелген шексіз аз (үлкен) шамалардың алгебралық қосындысы шексіз аз (үлкен) шама болады.

4) Саны шектелген шексіз аз (үлкен) шамалардың көбейтіндісі шексіз аз (үлкен) шама болады.

Айталық $x=x_0$ нүктесінде $\alpha_1(x)$ және $\alpha_2(x)$ шексіз аз функциялар болсын, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0$.

Сонда

1) Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0$ болса, онда $\alpha_1(x)$ шамасы $\alpha_2(x)$ шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз деп аталады. Оны былай белгілейді $\alpha_1(x)=0(\alpha_2(x))$,

2) Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0$ болса, онда $\alpha_1(x)$ және $\alpha_2(x)$ реттері бірдей шексіз аз шамалар болады.

3) Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k}=A\neq 0(k>0)$ болса, онда $\alpha_1(x)$ шамасы $\alpha_2(x)$ шамасына қарағанда k ретті шексіз аз деп аталады.

4) Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$ болса, онда олар эквивалентті шексіз аз шамалар деп аталады және былай белгіленеді: $\alpha_1(x)\approx\alpha_2(x)$.

Эквивалентті аз шамаларға x нөлге ұмтылғанда, мынадай жұптық формулаларды келтіруге болады, $\sin x\approx x$, $tgx\approx x$, $\ln(1+x)\approx x$, $e^x-1\approx x$, $1+\cos x-\dfrac{x^2}{2}$, $\arcsin x\approx x$, $arctgx\approx x$.

Осындай ұқсас салыстыру ережелерін шексіз үлкен шамалар үшін де жазуға болады.

3.4 Функцияның үзіліссіздігі

Функцияның нүктедегі және кесіндідегі үзіліссіздік қасиеттері. Функцияның үзіліс нүктесі және оны классификациялау.

Бізге (a,b) аралығында анықталған $f(x)$ функциясы берілсін. Айталық, $x_0\in(a,b)$ болсын. Бұл нүктеде $f(x)$ анықталған, яғни $f(x_0)$ нақты санға тең.

1-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon>0$ оң саны үшін $\delta=\delta(\varepsilon)$ саны табылсын, $|x-x_0|<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, $f(x)$ функциясын (a,b) аралығының x_0 нүктесінде үзіліссіз (үздіксіз) функция деп атайды. Осы берілген анықтамалар өзара эквивалентті анықтамалар.

2-анықтама. Егер $f(x)$ функциясы (a,b) аралығының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны (a,b) аралығында үзіліссіз функция деп атайды.

3-анықтама. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сол жақ (оң жақ) шегі оның сол нүктедегі мәніне тең болса, яғни $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\right)$ теңдігі орындалса, $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде сол жағынан (оң жағынан) үзіліссіз деп атайды.

Нүктедегі үзіліссіз функцияның қасиеттері:

1) $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болуы үшін оның осы нүктеде сол жағында, оң жағында үзіліссіз болуы қажет және жеткілікті. Яғни, $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

2) Егер $z=f(x)$ функциясы $y=y_0$ нүктесінде, ал $y=\varphi(x),\ x=x_0$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $z=f[\varphi(x)]$ күрделі функциясы $x=x_0$ нүктесінде үзіліссіз функция болады.

3) Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол осы нүктесінің қандай бір $U_b(x_0)$ маңайында да үзіліссіз функция болады.

4) Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары $x=x_0$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы функциялардың алгебралық қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы (бөліміндегі функция x_0 нүктесінде нольге тең болмаса) осы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

Кесіндіде үзіліссіз болатын функцияның қасиеттерін келтірейік:

1) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол ось кесіндіде шенелген функция болады.

2) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функция сының осы кесіндіде ең үлкен және ең кіші мәндері бар болады.

3) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз және сегменттің шеткі нүктелерінде $f(x)$ функциясының мәндерінің таңбалары әртүрлі болса, онда $[a,b]$ сегментінің болмағанда бір ішкі $x=c$, $a<c<b$ нүктесінде $f(c)=0$.

4) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз және $f(a)=A\neq f(b)=B$ болса, онда A мен B-ның арасында жатқан C саны қандай болса да, (a,b) интервалында ең болмағанда бір нүкте табылып, $f(x_0)=C$ болады.

Енді функцияны үзіліссіз болмаған жағдайда қарастырайық.

Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының анықталу жиынында жатып, сол нүктеде $f(x)$ үзіліссіз болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі немесе $f(x)$ осы x_0 нүктесінде үзіледі дейді.

4-анықтама. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде сол және оң жақ нақты шектері бар болып, өзара тең болмаса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде жай немесе бірінші түрдегі үзілісті деп атайды. Ал x_0 нүктесін бірінші түрдегі үзіліс нүктесі дейді.

5-анықтама. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзілісті болып, бірақ бірінші түрдегі үзіліс болмай, яғни, x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының кем дегенде бір жағынан шектердің біреуінің нақты мәні болмаса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде күрделі немесе екінші түрдегі үзіліс нүктесі дейді.

4 Бір аргументті функциялардың дифференциалдық есептеулері

4.1 Туындының анықтамасы

Айталық x аралығында $y=f(x)$ функциясы анықталсын. Бұл аралықтан x_0 нүктесін алып, оған Δx өсімшесін берейік. Сонда $y=f(x)$ функциясы да өсімше қабылдайды $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Мұнда $(x_0+\Delta x)\in x$.

Анықтама. Егер Δx нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегі бар болса, онда бұл шек берілген функцияның x_0 нүктесіндегі туындысы деп аталады.

Сонымен, егер $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ бар болса, оны берілген функцияның туындысы деп атайды және былай белгілейді

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Туындыны басқаша да белгілейді y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$ т.т.

Кейде туындының мәнін былай жазады

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Туынды табу процесін функцияны дифференциалдау деп атайды.

Онда осы x_0 нүктесіндегі функцияның біржақты туындыларын келтірейік.

$f'(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ -сол жақты туындысы.

$f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ -оң жақты туындысы.

Туындының геометриялық мағынасы: туынды $f'(x)$, $y=f(x)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен OX осінің оң бағытының арасындағы бұрыштың тангесін кескіндейді.

Онда $f(x)$ функциясының $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіндегі жанамасының теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Егер осы жанамаға $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде перпендикуляр түсіретін болсақ, онда ол түзуді нормаль деп атайды және оның теңдеуін мына түрде келтіруге болады.

$$y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

4.2 Функцияларды дифференциалдау ережелері

Туындының анықтамасын пайдаланып, функцияны дифференциалдаудың бірнеше ережелерін қорытып шығарайық

1) Егер $y=c$ (c кез келген нақты сан) болса, оның туындысы нөлге тең.

Себебі кез келген өсімше Δx үшін $y+\Delta y=c$ немесе $\Delta y=c-c=0$, Демек

$y = c$, $y' = 0$.

2) Егер $y = x$ болса, онда кез келген Δx үшін $y + \Delta y = x + \Delta x$, немесе $\Delta y = \Delta x$.

Сонда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ және $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

3) $y = \sin x.$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin((x + \Delta x) - \sin x)}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$.

Сонда

$$y' = (\sin x.)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

яғни $(\sin x.)' = \cos x$.

Осылар сияқты кейбір элементар (қарапайым) функциялардың да туындыларын табуға болады.

Бізге $u = u(x), v = v(x)$ функциялары берілсін. Егер осы функциялардың шенелген туындылары бар болса, олардың алгебралық қосындысының көбейтіндісінің және қатынасының (егер бөлімі нөлге тең болмаса) туындылары бар болады да мына формулалар бойынша табылады:

$$y' = (u + v)' = u' + v',$$
$$y' = (u \cdot v)' = u'v + uv',$$
$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

4.3 Күрделі және кері функцияның туындысы. Туындылар кестесі

1-теорема. Егер $u = \varphi(x)$ функциясының x нүктесінде, ал $y = f(u)$ функциясының сол x-ке сәйкес $u = \varphi(x)$ нүктесінде туындылары бар болса, онда сол x нүктесінде күрделі $y = f[\varphi(x)]$ функциясынан да туындысы бар болады және мынаған тең $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x$.

2-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлге тең емес $y' = f'(x) \neq 0$ туындысы бар болса, онда сол x-ке сәйкес $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде оған кері $x = \varphi(y)$ функциясының туындысы бар болады және

$$x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Мысал. $y = \arccos x$ функциясының туындысын табайық. Берілген функция $x = \cos y$ функциясының кері функциясы болғандықтан

$$y'_x = (\arccos x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Жоғарыдағы дифференциалдау формулаларын күрделі функцияға пайдаланып мынадай туындылардың кестесін келтіруге болады:

1) $(\tilde{n})^{\acute{y}} = 0$, 2) $\left(u^n\right)^{\acute{y}} = n \cdot u^{n-1} \cdot u^{'}$ (u-күрделі функция)

3) $\left(a^{u^{'}}\right)^{\acute{y}} = a^u \cdot \ln u \cdot u^{'}$, 4) $\left(e^u\right)^{\acute{y}} = e^u \cdot u^{'}$,

5) $(\log_a u)^{\acute{y}} = \dfrac{u^{'}}{u \ln u^{'}}$, 6) $(\ln u)^{\acute{y}} = \dfrac{u^{'}}{u}$,

7) $(\sin u)^{э} = \cos u \cdot u^{'}$, 8) $(\cos u)^{\acute{y}} = -\sin u \cdot u^{'}$

9) $(tgu)^{\acute{y}} = \dfrac{u^{'}}{\cos^2 u^{'}}$, 10) $(ctgu)^{\acute{y}} = -\dfrac{u^{'}}{\sin^2 u}$,

11) $(\arcsin u)^{\acute{y}} = \dfrac{u^{'}}{\sqrt{1-u^2}}$, 12) $(\arccos u)^{\acute{y}} = -\dfrac{u^{'}}{\sqrt{1-u^2}}$,

13) $(arctgu)^{\acute{y}} = \dfrac{u^{'}}{1+u^2}$, 14) $(arcctgu)^{\acute{y}} = -\dfrac{u^{'}}{1+u^2}$

15) $y = u^v$, $y^{'} = u^v\left(v^{'} \ln u + \dfrac{v}{u} \cdot u^{'}\right)$,

16) $(u \pm v)^{'} = u^{'} \pm v^{'}$, 17) $(u \cdot v)^{'} = u^{'}v \pm uv^{'}$,

18) $y = \dfrac{u}{v}$, $y^{'} = \dfrac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}$.

4.4 Функцияның дифференциалы

Айталық $f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x)$, демек $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x) + \alpha(\Delta x)$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0\right)$ α-шексіз аз шама.

Онда функцияның өсімшесі былай жазылады.

$$\Delta y = f^{'}(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (4.3.1)$$

Осы теңдікте екінші қосылғыш $\Delta x \cdot \alpha(\Delta x) \cdot$, Δx-ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш Δy-ке эквивалентті шама болады.

Анықтама. Функцияның туындысы мен аргументінің өсімшесінің көбейтіндісін дифференциал деп атайды және мына түрде жазады.

$$dy = f^{'}(x)\Delta x. \qquad (4.3.2)$$

Яғни, (4.3.1) теңдіктің бірінші (негізгі) бөлігі дифференциал болады.

Дербес жағдайда, егер $y = x$ болса, онда $dy = (x)^{'}\Delta x = \Delta x$, осыдан $dx = \Delta x$ және осыны пайдаланып (4.3.2) формуланы мына түрде жазуға болады.

$$dy = f^{'}(x)dx.$$

Осыдан $f^{'}(x) = \dfrac{dy}{dx}$, яғни туынды функцияның дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциал табу ережелері туынды ережелеріне ұқсас.

Егер $U(x)$ және $V(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда мына формулаларды келтіруге болады:

$$d(U \pm V) = dU \pm dV;$$
$$d(U \cdot V) = UdV + VdU;$$
$$d(c \cdot U) = c \cdot dU \qquad (c = const);$$
$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2} \qquad (V \neq 0).$$

Дифференциалды жуықтап есептеуге де пайдалануға болады. Айталық, $f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, онда оның өсімшесі

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

мұнда $\alpha(\Delta x)$-шексіз аз шама.

Бұл формуланы былай жазуға болады $f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x) = dy$, осыдан $f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x)\Delta x$.

Егер x_0 нүктесінде функцияның мәні беріліп, бізге $x_0 + \Delta x$ нүктесіндегі мәнін табу керек болса, онда оны мына формуламен табамыз:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Мысал. $\sqrt[3]{27.001}$ мәнін табу керек болса, онда $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$, $\Delta x = 0.001$, демек, $f(x_0) = 3$. Ал

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} \quad f(27,001) = \sqrt[3]{27,001} \cong 3 + \frac{1}{27} \cdot 0,001 \cong 3,00004.$$

4.5 Жоғарғы ретті туындылар

Бізге $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функциясы берілсін. Егер осы аралықта функцияның туындысы бар болса, онда оны $f'(x)$ деп белгіленген болатын.

Осы туындыны функцияның бірінші ретті туындысы деп атайды. Бірінші туындыны функция деп қарайтын болсақ, онда оның $[a,b]$ аралығында туындысы бар болуы мүмкін. Ол туындыны $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы деп алып, оны былай белгілейді.

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \left(f'(x)\right)' \text{ немесе } y'' = \left(y'\right)' \text{ т.с.с.}$$

Осы сияқты функцияның n-ші ретті туындысын жазуға болады және былай белгілейді

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ немесе } y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Мысалдар:

1) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$;

2) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ \left(a^x\right)^n = a^x \ln^n a$;

3) $\left(x^k\right)^n = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)e^{k-n}$;

4) $(\sin x)^n = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

6) Егер $U = U(x)$ және $V = V(x)$ функциялардың $(n+1)$-ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда

$$y^{(n)} = (U \cdot V)^n - U^{(n)}V + nU^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{2!}U^{(n-2)}V'' +$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}U^{(n-k)}V^{(k)} + \ldots + UV^{(n)},$$

мұндағы $k! = k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Бұл формуланы Лейбинц формуласы деп атайды.

Жоғары ретті дифференциалдың анықтамасы және оны есептейтін формуласы $f^{(n)}(x)$ туындысына сүйенеді,

$$d^n y = d\left(d\left(^{n-1}y\right)\right) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

яғни n-ші ретті дифференциал табу үшін функцияның n-ші ретті туындысын тауып, оны dx^n-ге көбейту керек.

4.6 Параметр арқылы берілген функцияларды дифференциалдау

Айталық, функция y-тің аргументі x-тен тәуелділігі параметр t арқылы берілсін

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad t \in (a,b) \tag{4.6.1}$$

және $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялардың туындылары бар болсын. Бұл тәуелділікті былай деп түсінуге болады. Егер $x = \varphi(t)$ функциясының кері функциясы $t = \varphi^{-1}(x)$ бар болса, онда бір формуладан тұратын теңдікке келуге болады:

$$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \tag{4.6.2}$$

және керісінше, бұл формуладан функцияны қайтадан (4.6.1) түрінде жазуға болады. Енді дифференциалдың анықтамасын пайдаланатын болсақ: $dy = y_t' dt,\ dx = x_t' dt$ осыдан $y_t' = \frac{y_t'}{x_t'}\left(x_t' \neq 0\right)$ табуға болады.

Осы сияқты екінші ретті туындыны табамыз

$$y_{xx}'' = \frac{d}{dx}\left(y_x'\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x_t y_{tt}'' - y_t' x_{tt}''}{\left(x_t'\right)^3}. \tag{4.6.3}$$

Осындай заңдылықпен $y_x^{(n)}\ (n > 2)$ формуласында табуға болады.

Мысал $x = a\cos^2 t,\ y = a\sin^2 t,$

$x_t' = 2a\cos t(-\sin t) = -a\sin 2t,$

$y_t' = 2a'\sin t\cos t = a\sin 2t,$

$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a\sin 2t}{-a\sin 2t} = -1, \quad y_{xx}'' = \frac{d}{dx}(-1) = 0.$

4.7 Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары

Ферма теоремасы. Айталық, $[a,b]$ аралығында $y=f(x)$ функциясы анықталған және сол аралықтың әрбір ішкі нүктесінде дифференциалданатын болсын. Егер $f(x)$ осы сегменттің ішкі x_0 нүктесінде ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайтын болса, онда оның бұл нүктедегі туындысы нөлге тең, яғни $f'(x_0)=0.$

Ролль теоремасы. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және мынадай шарттарды орындайтын болса:

1) $[a,b]$ аралығында үзіліссіз,

2) (a,b) аралығында шенелген туындысы бар,

3) $f(a)=f(b)$,

онда (a,b) аралығында ең болмағанда бір x_0 нүктесі табылып, сол нүктеде $f'(x_0)=0$ болады.

Лагранж теоремасы. Егер $[a,b]$ сегментінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз, ал (a,b) аралығында функцияның шенелген туындылары бар болса, онда сол аралықта мына теңдік орындалады $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$.

Коши теоремасы. $[a,b]$ аралығында $f(x)$ және $q(x)$ функциялары анықталған және үзіліссіз болсын. Сонымен бірге, (a,b) аралығында $f(x)$ және $q(x)$-тың шенеулі туындылары бар және $q'(x)\neq 0$. Онда $[a,b]$ аралығында бір x_0 нүктесі табылып, сол нүктеде

$$\frac{f(b)-f(a)}{q(b)-q(a)}=\frac{f'(x_0)}{q'(x_0)}$$ теңдігі орындалады.

4.8 Анықталмағандықты айқындау. Лопиталь ережелері

Егер $f(x)$ және $q(x)$ функциялары $x=a$ нүктесінде бірдей нөлге айналса, яғни, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to a} q(x)=0$ онда $\frac{f(x)}{q(x)}$ қатынасы $\left(\frac{0}{0}\right)$ анықталмағандықты береді.

Осы анықталмағандықты айқындау дегеніміз, мына $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}$-ті ыңғайлы амалдармен табу деген сөз.

1-теорема. Айталық, $x=a$ нүктесінің маңайында $f(x)$ және $q(x)$ функциялары анықталған және дифференциалданатын болсын (нүктенің өзінде бұл шарттар орындалмауы мүмкін) және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} q(x)=0,\ q(x)\neq 0,\ q'(x)\neq 0.$

Егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}$ бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}$ бар болады, және мына теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}. \qquad (4.8.1)$$

1-ескерту. Кейбір жағдайда (4.8.1) теңдіктің бір жағынан шегі жоқ болса да, екінші жағынан шегі бар болуы мүмкін.

2-ескерту. Егер $\frac{f'(x)}{q'(x)}(x\to a)$ мына $\left(\frac{0}{0}\right)$ анықталмағандыққа келетін болса, және $f'(x)$, $q'(x)$ 1-теореманың шарттарын орындайтын болса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{q''(x)}.$$

2-теорема. Айталық $x=a$ нүктесінің аймағында $f(x)$ және $q(x)$ анықталмаған және дифференциалданатын болсын, сонымен қатар сол аймақта $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}q(x)=\infty,\ q(x)\neq 0,\ q'(x)\neq 0$.

Егер $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}$ бар болса, онда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}$ бар болады, және мынадай теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)}=\lim\frac{f'(x)}{q'(x)}.$$

1 және 2 теоремалар арқылы функциялардың қатынастарының шегі, олардың туындыларының қатынастарының шегін табатын формулаларды қарастырдық. Осындай түрде анықталмағандықтарды айқындау тәсілдерін Лопиталь ережелері деп атайды. Бұл әдіспен басқа анықталмағандықта:

$\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ болғанда да шектерді табуға болады.

Мысалдар.

1-мысал. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x^2+7x-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-5x+4)'}{(2x^2+7x-9)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{4x+7}=\frac{-3}{11}.$

2-мысал.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3x-2}{3x^3+7x^2+4x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x+3}{9x^2+14x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+8}{18x+14}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+8)'}{(18x+14)'}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$$

3-мысал. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$ табу керек.

Егер былай белгілесек $y=(\sin)^{tgx}$ онда $\ln y=tgx\ln\sin x$.

Осыдан

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx\ln\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{ctgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)'}{(ctgx)'}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x=0.$$

Демек $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}=e^{\infty}=1.$

4.9 Функцияны туындысы арқылы зерттеу, функцияның өсуі және кемуі

Функцияның өспелі (кемімейтін) кемімелі (өспейтін) болу анықтамаларын алдынғы тақырыптарда қарастырғанбыз. Енді функциялардың қандай жағдайда монотонды болатын шарттарын қарастырайық.

1-теорема.

1) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде өспелі (кемімелі) және туындысы бар болса, онда ол функцияның туындысы осы сегментте

$$f'(x)>0 \ \left(f'(x)<0\right).$$

2) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз, ал (a,b) аралығында дифференциалданатын және $f'(x)>0 \ \left(f'(x)<0\right)$ болса, онда $[a,b]$ сегментінде ол өспелі (кемімелі) функция болады.

2-теорема.

1) Егер $f(x)$ $[a,b]$ сегментінде кемімейтін (өспейтін) және туындысы бар функция болса, онда сол туындысы осы сегментте $f'(x)>0 \ \left(f'(x)<0\right)$.

2) Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз, ал (a,b) интервалында дифференциалданатын және $f'(x)>0 \ \left(f'(x)<0\right)$ болса, онда ол $[a,b]$ сегментінде кемімейтін (өспейтін) функция болады.

Мысал. $y=x^2e^{-2x}$ функциясы берілген.

Туындыны табамыз: $y'=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}=2x(1-x)e^{-2x}$.

Мұны нөлге теңестіреміз: $2x(1-x)e^{-2x}=0$, $e^{-2x}\neq 0$ болғандықтан, $2x(1-x)=0$. Түбірлері $x_1=0,\ x_2=1$.

Функцияның таңбасы ауыспайтын болатын интервалды қарастырайық.

Монотондығын тексерейік:

1) $(-\infty,0)\ y'<0$ онда осы аралықта функция кемімелі болады.

2) $(0,1)\ y'>0$ функция өспелі болады.

3) $(1,\infty)\ y'<0$ функция осы аралықта кемімелі.

4.10 Функцияның экстремумы. Экстремумның қажетті және жеткілікті шарттары

Белгілі бір аралықта $y=f(x)$ функциясы анықталған және үзіліссіз болсын және осы аралықта жататын x_0 ішкі нүктесі берілсін.

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық x-тер үшін келесі теңсіздік $f'(x)\le f(x_0)\ (f(x)\ge f(x_0))$ орындалса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локальді максимумы (минимумы) бар деп атайды.

1-теорема. (локальді экстремумның қажетті шарты).

Егер дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктеде локальді нүктеде $f'(x_0)=0$ болады.

Осы теоремадан мынадай қорытындыға келеміз. Егер x_0 нүктесінде функцияның экстремумы бар болса, онда оның туындысы сол нүктеде нөлге тең болады. Кері тұжырым әрқашан орындала бермейді. Мысалы $y = x^5$ функциясының $x_0 = 0$ нүктесінде туындысы $y'(0) = 5x^4\big|_{x=0} = 0,$ ал бірақ ол нүктеде функция не максимум, не минимум қабылдамайды. $f(x)$ функциясының нөлге айналатын немесе тіпті болмайтын нүктелерін сынақ нүктелері немесе «кризистік» нүктелері деп атайды.

2-теорема. (Локальді экстремумның болуының жеткілікті шарты).

Айталық, сынақ x_0 нүкте жататын интервалда $f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, (бұл шарт x_0 нүктесінде орындалмауы мүмкін). Егер функцияның туындысы айнымалы x берілген, x_0 нүктеден солдан оңға қарай өткенде, таңбасын плюстен минусқа ауыстырса, онда x_0 нүктеде функцияның локальді максимумы болады, ал егер x айнымалы x_0 нүктеден өткенде $f'(x)$ өзінің таңбасын минустан плюске ауыстырса, онда x_0 нүктеде функцияның локальді минимумы болады.

Ескерту. $[a,b]$ сегментінде функцияның ең үлкен (ең кіші) мәндерін табу үшін функцияның шеткі нүктелердегі мәндерімен ішкі сынақ нүктелердегі мәндерінің арасындағы ең үлкенін (ең кішісін) таңдау керек.

Мысал $y = x^4 - 2x^2 + 5$ функциясының $[-2,2]$ аралығындағы экстремумдардың және осы аралықтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Бұл функцияның $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$ туындысынан сынақ нүктелері $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Мынадай кесте құрайық:

	[-2; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 1)	1	(1; 2]
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	кемиді	4	өседі	5	кемиді	4	өседі
		min		max		min	

Осы кестеден y' $x = -1$ нүктеден өткенде (солдан оңға қарай) таңбасын минустан плюске өзгертеді екен, яғни сол нүктеде минимум болады. $f_{\min} = f(-1) = 4.$ Осы сияқты $x = 0$ нүктесінде функцияның максимумы, ал $x = 1$ нүктеде оның минимумы болады. $f_{\max} = f(0) = 5, \quad f_{\min} = f(1) = 4.$

Ал енді, функцияны ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін функцияның шеткі нүктелеріндегі мәндерін табамыз $f(-2) = 13; \; f(2) = 13.$ Сонда $f = f(-2) = f(2) = 13, \; f = f(-1) = f(1) = 4$.

4.11 Экстремумды екінші ретті туындысы арқылы зерттеу. Дөңестік, ойыстық және иілу нүктелері

Айталық $x = x_0$ нүктеде $y = f(x)$ функциясының туындысы нөлге тең болсын, яғни $f'(x_0) = 0$. Сонымен бірге, осы x_0 нүктесінің аймағында функцияның екінші ретті туындысы $f''(x)$ анықталған және үзіліссіз болсын.

1-теорема. Егер жоғарыдағы шарттар орындалып және $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының локальді максимумы болады, ал егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 нүктесінде функцияның локальдік минимумы болады.

Мысал. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x$ функцияның экстремумын зерттеу керек болсын.

Шешуі: $f'(x) = x^2 - 7x + 6 = 0$. Сынақ нүктелері $x_1 = 6,\ x_2 = 1$.

Екінші ретті туындысын табамыз $f''(x) = 2x - 7$,

а) $f''(6) = 5 > 0$, олай болса, $x_1 = 6$ нүктеде функцияның минимумы болады;

б) $f''(1) = -5 < 0$, олай болса, $x_2 = 1$ нүктеде функцияның максимумы болады.

Енді дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы берілсін және осы қисықтың кез келген нүктесінде жанамасы бар болсын.

1-анықтама. Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында қисық өзіне жүргізілген жанамадан жоғары жататын болса, онда қисықты сол аймақта (дөңестігі төмен қараған) деп айтылады.

2-анықтама. Егер x_0 нүктесінің аймағында қисық осы нүктеде оған жүргізілген жанамадан төмен жатса, онда қисықты сол аймақта дөңес (дөңестігі жоғары қараған) деп аталады.

3-анықтама. Қисықтың ойыс жағын дөңес жағынан бөлетін нүктені – иілу нүктесі деп атайды.

2-теорема. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктеде туындысы бар және $f''(x_0) > 0 \left(f''(x) < 0\right)$ болса, онда осы x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы ойыс (дөңес) болады.

Салдар. Егер $f(x)$ қисығының иілу нүктесі x_0 болса және сол нүктеде $f''(x_0)$ бар болса, онда $f''(x_0)$ нөлге тең болады, яғни $f''(x_0) = 0$.

3-теорема. Егер x_0 нүктесінде $f''(x)$ үзіліссіз және $f'''(x_0) \neq 0$ болса, ал $f''(x_0) = 0$ болса, онда $f(x)$ функциясының иілу нүктесі x_0 нүктесінде болады.

Мысал. $y = x^4 - 12x^3 + 30x^2$ функциясының ойыс және дөңес болатын аралықтарын және иілу нүктесін табу керек.

Шешуі: туындыларын табамыз.

$y' = 4x^3 - 36x^2 + 60x;\ y'' = 12x^2 - 72x + 60 = 12\left(x^2 - 6x + 5\right)$.

Осы y'' туындысын нөлге тең деп аламыз, сонда

$12\left(x^2 - 6x + 5\right) = 0\ \ x^2 - 6x + 5 = 0,\ x_1 = 5,\ x_2 = 1$.

Мынадай кесте құрамыз:

	(-∞; 1)	1	(1; 5)	5	(3; ∞)
y''	+	0	-	0	+
y	ойыс	иілу нүктесі	дөңес	иілу нүктесі	ойыс

Яғни бұл функцияның екі иілу нүктесі бар екен: $x_1 = 1,\ x_2 = 5.$

4.12 Анықтамалар

Егер мына шектердің $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ біреуі плюске немесе минус шексіздікке тең болатын болса, онда $x = a$ түзуді $y = f(x)$ функциясының вертикал асимптотасы деп атайды.

Егер барлық $x > M\ (x < M)$ үшін функция $y = f(x)$ пен түзу $y = kx + b$-ның арасында мынандай теңдік орындалса $f(x) = kx + b + \alpha(x),\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ (x\to-\infty)}} \alpha(x) = 0,$ онда $y = kx + b$ түзуді $y = f(x)$ қисықтың көлбеу асимптотасы деп атайды.

Теорема. $f(x)$ функциясының графигіне x шексіздікке ұмтылғанда көлбеу асимптотасы бар болуы үшін мына шектердің $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ (\ )}} \dfrac{f(x)}{x} = k,\ \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$ бар болуы қажетті және жеткілікті және $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының асимптотасы болады.

Егер $k = 0$ болса, онда асимптотаны горизонтальдік асимптота деп атайды.

Мысал. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x + 3}$ функциясының асимптоталарын табайық.

Егер $x \to -3$, онда $y \to \infty$, яғни $x = -3$ вертикальдік асимптотасы.

Енді көлбеу асимптотаны қарастырайық.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x(x+3)} = 1;\quad b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x + 3} - x\right] = -7,$ яғни $y = x - 7$ түзуі берілген функцияның көлбеу асимптотасы болады.

4.13 Функцияның графигін салу схемасы

$y = f(x)$ функцияның графигін салу үшін, мынадай нұсқаулардың көмегі болуы мүмкін.

1) Функцияның анықталу және мәндер облыстарын табу.

2) Функцияның жұп, тақ немесе периодты екенін анықтау.

3) Функцияның үзіліс нүктесін және сол нүктелерде функцияның солдан және оңнан шек мәндерін анықтау.

4) Қисықтың координата есептерімен қиылысу нүктелерін табу.

5) Функцияны экстремум жайында зерттеу, оның экстремальдік мәндерін табу.

6) Функцияның өспелі және кемімелі болатын аралықтарын табу.

7) Функцияның ойыс және дөңес болатын аралықтарын табу, иілу нүктесін анықтау.

8) Функцияның асимптоталарын табу.

9) Осы нұсқауларды пайдаланып, функцияның графигін салу.

Мысал ретінде $y=\frac{x^2}{x-2}$ функциясын зерттеп көрейік.

1) Анықталу облысы $x\in(-\infty.+2)\cup(2,\infty)$;

2) Функция жұп, тақ периодты емес;

3) Үзіліс нүктесі $x_0=2,\ \lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^2}{x-2}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^2}{x-2}=\infty$;

4) Координаттармен қиылысу нүктесі $O(0,0)$;

5-6) $y'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2},\quad x_1=0;\ x_2=4$ сынақ нүктелері;

а) $(-\infty,0)\ y'>0$ функция өспелі;

б) $(0,2)\ y'<0$ функция кемімелі;

в) $(2,4)\ y'<0$ функция кемімелі;

г) $(4,\infty)\ y'>0$ функция өспелі.

Осылардан $x_1=0$ нүктеде функцияның максимумы, ал $x_1=4$ нүктесінде оның мимимумы, ал болады. $f_{\max}=f(0)=0;\ f_{\min}=f(4)=8$.

7) Екінші туындысын табамыз

$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-x)^2}=\frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}.$$

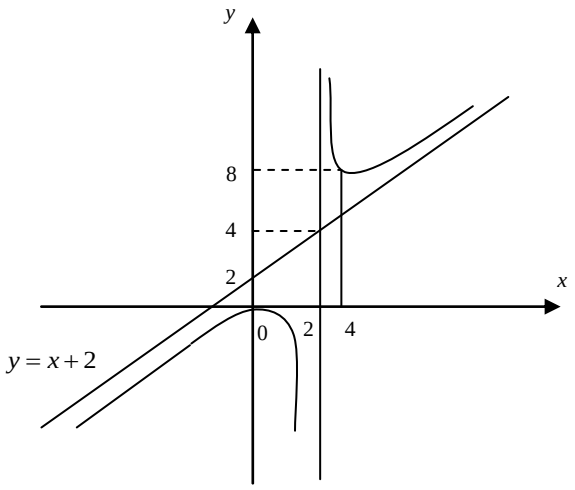
а) $(-\infty,2)\ y''<0$ функция дөңес болады;

б) $(2,\infty)\ y''>0$ функция ойыс болады.

8) $x=2$ түзуі функцияның вертикалдық асимптотасы болады.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x}=1;\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-x\right]=2\Rightarrow\ y=x+2$ түзуі функцияның көлбеу асимптотасы болады.

Осы берілген мәліметтер арқылы схема бойынша функцияның графигін салайық.



5 Бір аргументті функциялардың интегралдық есептеулері

5.1 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл ұғымы

Дененің қозғалыс заңы $S = S(t)$ теңдеуі арқылы берілсін. Мұндағы t-уақыт, S-дененің жүрген жолы. Сонда қарастырылып отырған қозғалыстың берілген мезгілдегі лездік жылдамдығы $\vartheta = S'(t) = \frac{ds}{dt}$ формуласы бойынша анықталатыны бізге дифференциалдық есептеулерден белгілі.

Ал механика мен техникалық және тағы басқа көптеген ғылым саласында бұған қарама-қарсы мағынадағы есептерді кездестіруге болады.

Мысалы, дененің t мезгілдегі жылдамдығы $\vartheta(t)$ беріледі де, сол бойынша дененің қозғалу заңын, яғни өткен уақытпен жүрген жол арасындағы тәуелділікті анықтау талап етіледі. Бұл есеп дифференциалдық есептеулерде қарастырылған есепке кері есеп екені бізге өзінен өзі түсінікті.

Сонымен дифференциалдық есептеулерде функция беріліп, оның туындысын табу талап етіледі. Енді бізге туынды беріледі де, алғашқы функцияны табу талап етіледі.

Анықтама. Егер бір X аралықтың әрбір нүктесінде $F(x)$ функциясы үшін

$$F'(x) = f(x) \text{ немесе } dF(x) = f(x)dx \qquad (5.1.1)$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы осы аралықта $f(x)$ үшін алғашқы функция деп аталады.

Сонымен жол, яғни айнымалы функция $S(t)$, жылдамдық $\vartheta(t)$ үшін алғашқы функция болады.

Мысалы. $F(x) = \sin x$ функциясы барлық сан осінде $F(x) = \cos x$ функциясының алғашқы функция болады, өйткені $\forall x \in R : (\sin x)' = \cos x$.

Теорема. Егер $F(x)$ X аралықта $f(x)$ үшін алғашқы функция болса, онда $F(x) + C$ функциясы да (С-кез келген тұрақты) $f(x)$ үшін осы аралықта алғашқы функция болады.

Дәлелдеу. $F(x)$ функциясы $f(x)$ үшін алғашқы функция. Демек, $F'(x)=f(x)$.

Сонымен бірге $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$. яғни $F(x)+C$ да $f(x)$ функциясына алғашқы функция болады.

Дәлелденген теоремадан мынадай қорытынды шығады: егер $f(x)$ функциясы үшін бір алғашқы $F(x)$ табылса, онда оның шексіз көп алғашқы функциялары бар.

Теорема. Берілген функцияның алғашқы функцияларының бір-бірінен айырмасы тұрақты шама болады.

Дәлелдеу. Егер берілген $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларын $F(x)$ және $\Phi(x)$ десек, онда $F'(x)=f(x)$ және $\Phi'(x)=f(x)$. Олай болса $[\Phi(x)-F(x)]'=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0$ яғни $\Phi(x)-F(x)=C.$ Бұдан $\Phi(x)=F(x)+C$ (С- кез келген тұрақты).

Бұл теоремадан мынадай қорытынды шығады: егер $F(x)$ берілген аралықта $f(x)$-тің алғашқы функцияларының бірі болса, онда оның барлық алғашқы функцияларының жиыны $F(x)+\tilde{N}$ өрнегін $f(x)$-тен анықталмаған интеграл деп атайды және былай белгілейді:

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (5.1.2)$$

Бұл өрнектегі $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің белгілі бір алғашқы функциясы, С-кез келген тұрақты. $f(x)$-интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ интеграл астындағы өрнек, ал x-интегралдау айнымалысы деп аталады. $\int$ - интеграл белгісі.

Сонымен, қандай да бір функциядан анықталмаған интеграл дегеніміз сол функцияның барлық алғашқы функцияларының жалпы түрі. $f(x)$-тің алғашқы $F(x)+\tilde{N}$ функцияларының жиынынан белгілі бір алғашқы y функциясын табу үшін $x=x_0$ болғанда $y=y_0$ болады деген алғашқы шарт қойылуы керек.

Егер бастапқы шарт берілсе, онда $y_0=F(x_0)+C$ теңдігінен $\tilde{N}=y_0-F(x_0)$ шығады.

Яғни, $f(x)$-тің ізделініп отырған алғашқы функциясы $y=F(x)-F(x\ )+y_0$ түрінде анықталады.

Берілген $f(x)$ үшін алғашқы $F(x)$ функциясын табу амалы $f(x)$-ті интегралдау деп аталады.

Туындысы бойынша алғашқы функцияны іздеу немесе берілген функцияны интегралдау интегралдық есептеулер деп аталады.

5.2 Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

Дифференциалдау амалына кері амал болып табылатын интегралдау амалының анықтамасына сүйеніп анықталмаған интегралдың мына қасиеттерін дәлелдейік:

1) Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға, ал дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең болады

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+C\right) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

2) Дифференциалдың анықталмаған интегралы дифференциалдағын функция мен кез келген тұрақтының қосындысына тең, яғни

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

$F'(x) = f(x)$ немесе $dF(x) = f(x)dx.$

Олай болса, $\int dF(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.

3) Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға да, интеграл белгісінің астына алып баруға да болады.

Демек $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k-тұрақты, теңдіктің екі жағын жеке-жеке алып дифференциалдасақ $d\left(\int kf(x)dx\right) = kf(x)dx$, $d\left(k\int fxdx\right) = kd\left(\int f(x)dx\right) = kf(x)dx$, яғни $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ теңдігі дұрыс.

4) Бірнеше функциялардың алгебралық қосындысының анықталмағаның интегралы қосылғыштардан алынған анықталмаған интегралдардың алгебралық қосындысына тең, яғни $\int\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int\varphi(x)dx.$

Бұл теңдік те алдыңғы теңдікті дәлелдегендей дәлелденеді.

5) Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ үшін алғашқы функция болса, (яғни $F'(x) = f(x)$), онда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

Дәлелдеу. $\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right] = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+a).$

5.3 Анықталмаған интегралдың негізгілерінің таблицасы

Егер $U = U(x)$ белгілі бір X аралықта дифференциалданатын функция болса, дифференциалдық есептеулердің формулаларын еске алып анықталмаған интегралдың негізгілерінің мынандай кестесін жасауға болады.

1) $\int dx = x+C$.

$$\int u^{\alpha} du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1. \textit{кез келген сан}).$$

2) $\alpha = -\frac{1}{2}$, *болса, онда* $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$

$\alpha = -1$, *болса, онда* $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

$\alpha = -2$, *болса, онда* $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$

3) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C; \quad (a > 0,\ a \neq 1),\ \int e^u du = e^u + C$.

4) $\int \cos u du = \sin u + C, \quad \int shudu = chu + C.$

$\int \sin u du = -\cos u + C, \quad \int chudu = shu + C.$

5) $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C, \quad \int ctgudu = \ln|\sin u| + C.$

6) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C,\ \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C,\ \int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$.

$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C,\ \int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$.

8) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C.$

9) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C.$

11) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C.$

Бұл кестеге енген әрбір формуланың дұрыстығын дифференциалдау арқылы дәлелдеуге болады.

Осы таблицадағы формулалармен бірге мына интегралдарды да білген дұрыс:

12) $\int \sqrt{u^2 + a} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a} + \frac{a}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C.$

13) $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + C.$

14) $J_n = \int \frac{du}{\left(u^2 + a^2\right)^n} = \frac{u}{2(n-1)a^2\left(u^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}$.

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C.$

16) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C.$

17) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = 2\sqrt{\varphi(x)} + C.$

Бұл интегралды біз соңғы (келесі) параграфтарда дәлелдейміз.

5.4 Тікелей интегралдау. Айнымалыны ауыстыру және бөліктеп интегралдау

Көптеген функциялардың анықталмаған интегралдың таблицадағы формулалар мен негізгі қасиеттерге сүйеніп бірден жазуға болады. Тікелей интегралдау дегеніміз осы.

Бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал. $\int\left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 1\right)dx - x^5 - x^4 + x^3 + x + C.$

2-мысал. $\int\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C.$

Бұл мысалдарда біз 3-ші, 4-ші қасиеттерді және 1-ші, 2-ші(таблицадағы) формулаларды пайдаландық.

3-мысал. $\int\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ интегралын есептеу керек.

Шешуі. Екі мүшелікті үшінші дәрежеге шығарамыз да, әрбір қосылғышты дәреже түрінде жазамыз, сонан кейін 3-ші және 4-ші қасиеттерді пайдалана отырып, 2-ші формуланы қолдансақ, мынау шығады:

$$\int\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \int\left(x^6 + 3x^{\frac{7}{2}} + 3x + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \int x^6 dx + 3\int x^{\frac{7}{2}}dx + 3\int xdx + \int x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^{\frac{9}{2}} + \frac{3}{2}x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^4\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

4-мысал. $\int \frac{x^2 - 2x^5 + 1}{x^4}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі. Интеграл астындағы функцияның алымын бөліміне мүшелеп бөлеміз де, сонан кейін 3-ші, 4-ші қасиеттер мен 2-ші формуланы қолданамыз.

Сонда:

$$\int \frac{x^2 - 2x^5 + 1}{x^4}dx = \int\left(\frac{1}{x} - 2x + x^{-4}\right)dx = \int \frac{dx}{x} -$$

$$-2\int xdx + \int \frac{dx}{x^4} = \ln|x| - x^2 - \frac{1}{3x^3} + C = \ln|x| - x^2 - \frac{1}{3x^3} + C$$

болады.

Ескерту - Әрбір қосылғыштың сонына ерікті тұрақтыны жазып жатудың қажеті жоқ, өйткені ерікті тұрақтылардың қосындысы да ерікті тұрақты болады, сондықтан оны біз соңында жазамыз.

Кейбір функциялардың интегралдарын интеграл астындағы функцияға қарапайым түрлендірулерді қолданып есептеуге болады.

5-мысал.

$$\int tg^2 x dx = \left| tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right| = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Біз бұл жерде 7-ші және 1-ші формулалармен 4-ші қасиетті пайдаландық.

6-мысал. $\int \frac{dx}{x^2\left(3+x^2\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{3+x^2-x^2}{x^2\left(3+x^2\right)} dx.$

Соңғы интегралды екі интегралдың айырымы түрінде жазып алып формулалар мен қасиеттердің көмегімен интегралдасақ,

$$\frac{1}{3}\int \frac{3dx}{x^2\left(3+x^2\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{3+x^2-x^2}{x^2\left(3+x^2\right)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

болады.

Айнымалыны ауыстыру әдісі мына формуланы қолдануға негізделген:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ . \qquad (5.4.1)$$

Анықталмаған интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Егер x тәуелсіз айнымалы болса, онда $dF(x) = f(x)dx$ теңдігі орындалатынын және бірінші ретті дифференциал формуласының инварианттығын еске алып x айнымалыдан $x = \varphi(t)$ формула бойынша t-ға көшкен жағдайда $dF(x) = dF(\varphi(t)) = f(\varphi(t)\varphi'(t))dt$ теңдігі орындалады. Енді осы теңдіктің екі жағынан интеграл алсақ (6.4.1) шығады.

Осы формулаға бірнеше мысал келтірейік.

7-мысал. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| x \right.$ айнымалыны $x = a\sin t$ деп алған тиімді. Бұдан

$$dx = a\cos t dt \Big| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a\cos dt = a^2 \int \cos t \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= \left| \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right| = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t d(2t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Осы шыққан нәтижені бұрынғы тәуелсіз айнымалы x арқылы өрнектейік. Яғни $x = a\sin t$ немесе $\frac{x}{a} = \sin t$ теңдігінен $t = \arcsin \frac{x}{a}$ болады. Сонда

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{2x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$ болып

өрнектеледі.

Демек,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Бұл нәтиженің дұрыстығын тікелей дифференциалдау, яғни оң жағының туындысы $\sqrt{a^2-x^2}$ – қа тең екендігін көрсету арқылы тексеруге болады.

8-мысал. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \quad деп\ белгілесек, \\ dx = 6t^5 dt \quad болады. \end{array} \right| = 6\int \frac{t^8}{t^2+1} dt = /$ бөлшектің бүтін бөлігін бөліп шығарсақ:

$$6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1})dx = 6\int t^6 dt - 6\int t^4 dt + 6\int t^2 dt - \int dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C.$$

Айнымалыны ауыстырғанда үнемі x-ті айнымалы t-ның функциясы түрінде ала бермей, керісінше $t = \psi(x)$ түрінде де алуға болады. Теориялық тұрғыдан қарағанда бұл екі тәсілдің маңызы бірдей, өйткені егер функция $x = \varphi(t)$ монотонды өспелі (кемімелі) болса, онда t-ны әрқашанда x арқылы өрнектеп, $t = \psi(x)$ деп жазуға болады.

Енді осы $t = \psi(x)$ формула бойынша айнымалыны ауыстыруға бірнеше мысалдар қарастырайық.

9-мысал.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| t = \sqrt{x} \quad десек, \quad онда \quad dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2tdt \right| =$$

$$= \int \frac{2t}{1+t} dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Интегралдауды бітіргеннен кейін біз алғашқы айнымалыға көштік.

10-мысал.

$$\int \frac{dx}{t(t^2+1)} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{1+x} + C.$$

11-мысал.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx = | \ t = 1+x^3, \ десек \quad dt = 3x^2 dx \ | =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C.$$

Жалпы жағдайда, соңғы екі мысалдан, егер интеграл астындағы бөлшектің алымында бөлімінің туындысы тұрса, онда интеграл бөлімінің логарифміне тең болатының байқау қиын емес.

Демек,

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C$ болады.

Шынында да, егер $t = \varphi(x)$ десек, онда $dt = \varphi'(x)dx$ болады.

Сонымен, $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$

Дәл осылай,

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = \left| t = \sqrt{\varphi(x)} \quad \text{äåñòè}, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}\varphi'(x)dx \right| = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{\varphi(x)} + C.$$

Айталық, $U = U(x),\ \vartheta = \vartheta(x)$ аргумент x-тің дифференциалданатын функциялары болсын.

Сонда $d(U\vartheta) = Ud\vartheta + \vartheta dU$ болады.

Осыдан $\int d(U\vartheta) = \int Ud\vartheta + \int \vartheta dU,\ \int Ud\vartheta = U\vartheta - \int \vartheta dU$ (5.4.2)

формуласы шығады. Бұл бөліктеп интегралдау әдісі айнымалыны ауыстырудан қиын және қолдану облысы тарлау болса да тек қана осы әдіспен интегралданатын интегралдар бар.

Енді осы бөліктеп интегралдау формуласына мысалдар келтірейік.

12-мысал. $\int \sqrt{x^2 + a}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі. Бұл интегралдың астындағы көбейткіштерге жіктеулі тұр, сондықтан $U = \sqrt{x^2 + a},\ d\vartheta = dx$ деп аламыз. Бұдан $dU = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}},\ \vartheta = x.$ Сонда бөліктеп интегралдау формуласын қолдансақ мынау шығады:

$$\int \sqrt{x^2 + a}dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}}dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a}dx + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a} + C\right|.$$

Сонымен біз алғашқы берілген интегралға келдік, яғни бұл теңдік берілген интеграл тұрғысынан қарағанда теңдеу болып шықты. Теңдеудің оң жағындағы интегралды сол жағына шығарсақ,

$$2\int \sqrt{x^2 + a}dx = x\sqrt{x^2 + a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \text{ немесе}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

13-мысал. $\int x\cos xdx = \left|u = x,\ d\vartheta = \cos xdx\right|$ десек бұдан

$$du = dx,\ \vartheta = \sin x\Big| = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

14-мысал. $\int (x^2 + 1)\ln xdx = \left|u = \ln x, d\vartheta = (x^2 + 1)dx\right.$ десек, бұдан

$$du = \frac{1}{x}dx,\ \vartheta = \frac{1}{3}x^3 + x\Big| = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln|x| - \int\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln|x| -$$

$$-\int\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)dx = \frac{1}{3}(x^3 + 3x)\ln|x| - \frac{1}{3}\int x^2 dx - \int dx = \frac{1}{3}(x^3 3x)\ln|x| - \frac{1}{9}x^3 - x + C.$$

15-мысал.

$$\int xarctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ d\vartheta = xdx, & \vartheta = \dfrac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arctgx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctgx + C = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\cdot$$

$$\cdot arctgx - \frac{x}{2} + C.$$

16-мысал.

$$\int \left(x^2+1\right)\sin x dx = \left| u = x^2+1,\ d\vartheta = \sin x dx, du = 2xdx, \vartheta = -\cos x \right| = -\left(x^2+1\right)\cos x + 2\int x\cos x dx.$$

Енді соңғы интегралды тағы да бөліктеп интегралдаймыз, яғни

$$u = x, du = dx, d\vartheta = \cos x dx,\ \vartheta = \sin x, \int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

болады.

Сонда $\int \left(x^2+1\right)\sin x dx = -\left(x^2-1\right)\cos x + 2x\sin x + C$ болады.

Бұл мысалда берілген интегралды есептегенде біз бөліктеп интегралдау формуласын (ережесін) екі рет қолдандық. Демек, бұл формуланы интегралды есептегенде бірнеше рет қолдануға болады.

Интегралдау кезінде айнымалыны ауыстыру тәсілі мен бөліктеп интегралдау әдісін тізбектеп (бірінен соң бірін) қолдану керек болатын жағдайлар да кездеседі.

Мысалы,

$\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| t = \sqrt{x} \quad äåñåê,\ x = t^2 \quad ñîîäà \quad dx = 2tdt \right| = 2\int te^t dt,$ енді бөліктеп интегралдауды қолданамыз.

$$\int te^t dt = \left| u = t,\ d\vartheta = e^t dt,\ du = dt,\ \vartheta = e^t \right| = te^t - \int e^t dt = teht - e^t + C = (t-1)e^t + C.$$

Бұдан $\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(t-1)e^t + C$ шығады.

Енді бұрынғы айнымалы x-ке көшсек мынау шығады:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}} + C.$$

5.5 Кейбір алгебралық функцияларды интегралдау

Көптеген интегралдарды есептеу үшін осы параграфқа дейінгі мәліметтер (деректер) толығымен жеткілікті. Ондай интегралдарды алдын ала түрлендіріп алған жөн. Енді сондай интегралдардың кейбіреулерін қарастырайық.

$$1)\int \frac{A}{x-a} dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \qquad (5.5.1)$$

$$2)\int \frac{B}{(x-a)^k} dx = B\int \frac{dx}{(x-a)^k} = B\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{B}{1-k}(x-a)^{1-k} + C. \qquad (5.5.2)$$

Бұл интегралдарда A, B, a-тұрақты, $k \geq 2$ бүтін сан.

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx. \qquad (5.5.3)$$

Мұндағы A, b, a, c -тұрақты сандар.

Мұндай интегралдарды интегралдау үшін интеграл астындағы бөлшектің бөліміндегі квадрат үшмүшені былай түрлендіреміз:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Енді $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=m$ деп белгілеп, айнымалы x-ті $x+\frac{b}{2a}=t$ формуласы бойынша t-ға алмастырсақ, $dx=dt$ болады.

Сонда

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \frac{A}{a}\int \frac{dt}{t^2+m}.$$

3) $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ (5.5.4)

мұндағы M, N, a, b, c - тұрақты сандар.

Бұл интегралдың (5.5.3)-тен айырмашылығы интеграл астындағы бөлшектің алымында сызықты екімүше бар. Бөлшектің бөлімінің туындысы $(2ax+b)$ болғандықтан, ол интегралды есептеу үшін бөлшектің алымын $(2ax+b)$ бөлініп шығатындай етіп түрлендіреміз.

Демек,

$Mx+N = \frac{M}{2a}(2ax+b)-\frac{Mb}{2a}+N = \frac{M}{2a}(2ax+b)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)$. Сонда

$$\int \frac{(Mx+Ndx)}{ax^2+bx+c} = \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Мұның нәтижесінде (5.5.4) интегралына келдік.

Сонымен (5.5.3) және (5.5.4) интеграл (ax^2+bx+c) квадрат үшмүшеден толық квадрат бөліп шығару нәтижесінде мына таблицалық екі интегралдың біреуіне келеді:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} \text{ немесе } \int \frac{du}{u^2-a^2}.$$

4) $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ (5.5.5)

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+N-\frac{Mb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right]^n} =$$

$$= \left| x+\frac{b}{2a}=t,\ \frac{4ac-b^2}{4a}=m,\ \text{сонда}\ \ dx=dt \ \right| = \frac{M}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{-n}\,d(ax^2+bx+c) + \frac{2Na-Mb}{2a^{n+1}}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+m)^n}.$$

Соңғы интеграл рекурренттік формула бойынша алынады. Дәл осылай мына түрдегі

$$5)\ \int \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad (5.5.6)$$

және

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad (5.5.7)$$

интегралдар да квадрат үшмүшеден екімүшенің толық квадратын бөліп шығару нәтижесінде (5.5.3) және (5.5.4) таблицалық мына интегралдардың біреуіне келеді:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+m}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+m}\right| + C \qquad \text{немесе}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{m-u^2}} = \arcsin\frac{u}{\sqrt{m}} + C.$$

$$6)\int \frac{du}{(x+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (5.5.8)$$

Түріндегі интеграл айнымалы x-тен $x+p=\frac{1}{t}$ формула бойынша жаңа айнымалы t-ға көшкенде (5.5.7) –ші интегралға келтіріледі.

Енді осы талданған интегралдарға мысалдар келтірейік.

1-мысал. $\int \frac{dx}{x^1+3x+1}$ интегралын есептеп шығару керек.

Шешуі. Бөлімінен екімүшенің квадратын бөліп шығарамыз:

$$x^2+3x+1 = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Сонда

$$x\int\frac{dx}{x^2+3x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\left|\begin{matrix}x+\frac{3}{2}=t\ \ \textit{дөсөк},\\ \textit{онда}\quad dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C.\ \int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx=\left|\begin{matrix}\left(x^2+4x+9\right)'=2x+4\\ 6x+5=3\left(2x+4-\frac{7}{3}\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=3\int\frac{2x+4-\frac{7}{3}}{x^2+4x+9}dx=3\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+9}-7\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=3\ln\left|x^2+4x+9\right|-7\int\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$$

$$=3\ln\left|x^2+4x+9\right|+\frac{7}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

3-мысал.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\left|\begin{matrix}x^2-4x+6=(x-2)^2+2,\ \textit{Сонда}\\ x-2=1\qquad\textit{дөсөк}\quad dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|+C=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+6}\right|+C.$$

4-мысал.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\left|\begin{matrix}3+2x-x^2=4-(x-1)^2\\ \textit{дөмөк},\ x-1=t,\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\arcsin\frac{1}{2}+C=\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

5-мысал.

$$\int\frac{(4x-8)dx}{\sqrt{x^2+6x-2}}=\left|\begin{matrix}\left(x^2+6x-2\right)'=2x+6\\ 4x-8=2(2x+6)-20\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{2(2x+6)-20}{\sqrt{x^2+6x-2}}=2\int\frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x-2}}-20\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-11}}=4\sqrt{x^2+6x-2}-20\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-11}}=$$

$$=4\sqrt{x^2+6x-2}-20\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-2}\right|+C.$$

6-мысал.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}} = \left| x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \right| = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t+t^2}} = -\int \frac{d(t-2)}{\sqrt{(t-2)^2-3}} =$$

$$= \ln\left|t-2+\sqrt{t^2-4t+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x}-2+\sqrt{\frac{1}{x^2}\frac{4}{x}+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1-2x+\sqrt{x^2-4x+1}}{x}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1-2x+\sqrt{x^2-4x+1}}\right| + C.$$

5.6 Рационал функцияларды интегралдау

Интегралдарды табуда (есептеуде) негізінен осыған дейінгі баяндалған әдістер қолданылады. Кейбір функциялар оңай интегралданса, ал кейбіреулері алдынала түрлендірулерді қажет ететінің көрдік. Сондықтан, енді біз функциялардың кейбір кластарына толығырақ тоқталып, олардан анықталмаған интеграл алу үшін қолданылатын есептеу амалдарына көңіл бөлеміз.

Егер бүтін рационал функция (көпмүше) $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ берілсе, оны бірден интегралдауға болады. Демек,

$$\int P_n(x)dx = a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1} + ... + a_{n-1}\int xdx + a_n\int dx =$$

$$\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C$$

болады.

Ал егер алымы да, бөлімі де көпмүшелер болатын бөлшек рационал функция

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}$, $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$ берілсе оны бірден интегралдау барлық жағдайда мүмкін бола бермейді. Егер $n \geq m$ болса, онда ол бұрыс бөлшек, ал $n < m$ болса, онда дұрыс рационал бөлшек деп аталады.

Әрбір бұрыс рационал бөлшектің алымын бөліміне бөліп бүтін бөлігін бөліп шығарсақ, дұрыс бөлшек қалады. Мысалы,

$$\frac{x^4-4x^3+2x^2+1}{x^2-x+1} = x^2-3x-2+\frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Бізге кез келген дәрежесі 2-ден үлкен көпмүшенің сызықтық екімүшелік пен квадрат үшмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелетіні алгебрадан белгілі.

Демек,

$$Q_m(x) = (x-c_l)^{k_l}(x-c_2)^{k_2}...(x-c_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_{1l}}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{r_2}...$$

$$\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{r^l},\ k_1+k_2+...+k_s+2(r_1+r_2+...+r_l) = m.$$

Онда дұрыс рационал бөлшектер былайша элементар (жай) бөлшектердің қосындысына жіктелетіні де бізге алгебрадан белгілі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x+c_1}+\frac{A_2}{(x-c_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-c_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-c_2}+\frac{B_2}{(x-c_2)^2}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-c_2)^{k_2}}+...$$

$$+\frac{D_1}{(x-c_3)}+\frac{D_2}{(x-c_3)^2}+...+\frac{D_{k_s}}{(x-c_3)^{k_s}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{M_{r_1}x+N_{r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+...+$$

$$\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_lx+q_l)^{r_2}}+...+\frac{E_{r_ex}+F_{re}}{(x^2+p_ex+q_e)^{r_e}}.$$

Мұндағы

$A_1, A_2...A_{k_1}, B_1, B_2, ... B_{k_2}, D_1, D_2, ...D_{k_s}, M_1, M_2, ...M_{rl}, N_1, N_2, ...N_{r_1}, ...F_{r_e}$. -нақты сандар, ал квадрат үшмүшелердің дискриминанттары нөлден кіші.

Бұл теоремадан:

1) Әрбір қайталанбайтын $(x-c)$ көбейткішке жіктелуде бір ғана $\frac{A}{x-c}$ бөлшегі.

2) Әрбір $(x-c)^k$ көбейткішке жіктелуде мынандай $\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\frac{A_3}{(x-c)^3}+...+\frac{A_k}{(x-c)^k}$, к-жай бөлшектердің қосындысы.

3) Әрбір $(x^2+px+q)^r$ көбейткішке мынандай $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+..+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}$, r-жай бөлшектердің қосындысы сәйкес келетінін байқаймыз.

Сонымен, дұрыс рационал бөлшек мына төрт қарапайым (элементар) бөлшектердің қосындысына жіктеледі:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{B}{(x-a)^k}, \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^s}, q-\frac{p^2}{4}>0,\ k,\ s\geq 2.$$

Ал біз осыған дейін (5.5-ті қара) бұл қарапайым бөлшектерді интегралдау нәтижесі рационал функция, логарифм және арктангенстер арқылы ғана өрнектелетінін көрдік. Олай болса, біз кез келген рационал функцияның интегралы бар және ол интеграл элементар функциялар арқылы өрнектеледі деген қорытындыға келеміз.

Енді осы рационал бөлшектерді интегралдауға мысалдар

1-мысал. $\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx.$

Рационал бөлшектің бөлімінің үш нақты түбірі бар, ендеше $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$ деп жазуға болады. Сонда, берілген бөлшектің жәй бөлшектерге жіктелуі мына түрде болады.

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Мұндағы коэффициенттер A, B, C әзірше белгісіз және оларды анықтау қажет. Ол үшін теңдіктің екі жағын да ортақ бөлімге келтіріп алымдарын теңестіреміз. Сонда

$$2x^2 - x + 3 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1),$$

немесе $2x^2 - x + 3 = (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x - 2A$ теңбе-теңдігі шығады.

Бұл теңбе-теңдіктің сол жағы мен оң жағындағы x-тің бірдей дәрежесінің алдыңдағы коэффициенттерді теңестерсек, мынадай теңдеулер жүйесі шығады.

$$\left.\begin{array}{l|c} x^2 & 2 = A + B + C, \\ x^1 & -1 = A + 2B - C, \\ x^0 & 3 = -2A. \end{array}\right\}$$

Енді осы теңдеулер жүйесін шешсек $A = -\frac{3}{2}$, $B = \frac{4}{3}$, $C = \frac{13}{6}$ болып шығады. Осы мәндерді орнына қойсақ $\int \frac{2x^2 - x + 3}{x(x-1)(x+2)}dx = -\frac{3}{2x} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{13}{6(x+2)}$ теңдігі шығады.

Сонда

$$\int \frac{2x^2 - x + 3}{x(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= \int\left(-\frac{3}{2x} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{13}{6(x+2)}\right)dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{13}{6}\int\frac{dx}{x+2} = -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-1| +$$

$$+ \frac{13}{6}\ln|x+2| + C.$$

болып шығады.

5.7 Алгебралық иррационал функцияларды интегралдау

Көптеген жағдайларда, тиімді ауыстыруларды пайдалану нәтижесінде иррационал функцияларды интегралдауды рационал функцияларды интегралдауға келтіруге болады.

Интегралды осылайша түрлендіруді оны рационалдандыру (рационалдау) немесе рационал түрге келтіру деп атайды.

Интеграл

$$\int R(x,)\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (5.7.1)$$

түрінде берілген. Мұндағы n-бүтін сан, символ R-жақшаның ішіндегі шамаларға тек рационал амалдар (қосу, алу, көбейту, тұрақты көбейткіштерге көбейту және бөлу) ғана қолданылатынын бейнелейді.

Берілген интегралды рационалдандыру айнымалыны

$$z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}. \qquad (5.7.2)$$

Формуласы бойынша ауыстыру арқылы іске асады. Шынында да, бұдан

$$x=\frac{dz^n-b}{a-cz^n},\ dx=\left(\frac{dz^n-b}{a-cz^n}\right)dz$$

болады да, қарастырылып отырған (5.7.1) интеграл

$$\int R\left(\frac{dz^n-b}{a-cz^n},\ z\right),\left(\frac{dz^n-b}{a-cz^n}\right)dz \qquad (5.7.3)$$

түріндегі интегралға, яғни айнымалы z-тің рационал функциясының интегралына ауысады. Сондықтан ол рационал функцияларды интегралдау әдісімен интегралданады. Олай болса, (5.7.3) –интегралдың мәнін тауып алғаннан кейін (5.7.2)-формула бойынша айнымалы z-тен бұрынғы айнымалы x-ке көшеміз.

Мына түрдегі

$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{\frac{r_2}{s_2}},.....,\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right]dx$ интеграл да (5.7.1) интегралға келтіреді. Егер $\frac{r_1}{s_1},\frac{r_2}{s_2},...,\frac{r_n}{s_n}$ бөлшектерінің ортақ бөлімі m-ге тең болса, онда

$R\left[x,\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{k_1}},\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{k_2},...,\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)^{k_n}}}\right]=R_1\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{dx+c}}\right)$, демек интеграл астындағы функция x пен $\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{dx+c}\right)}$ -ден рационал функция болады.

1-мысал. $\int\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)(x-2)}$,

Шешуі. Айнымалы x-ті $\int\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}=t$ формуласы бойынша t-ға алмастырамыз. Сонда $x=\frac{2-t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$.

Сондықтан $\int\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)(x-2)}=\int t\frac{\frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}}{\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{t^2}{1-t^2}}=2\int dt=2t+C=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$.

2-мысал.

$$\int\frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}=\left|t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}},\ x=\frac{1}{1-t^3},dx=\frac{3t^2dt}{\left(1-t^3\right)^2}\right|=3\int\frac{t^2dt}{(1-t^3)(2+t)}.$$

5.8 Тригонометриялық функцияларды интегралдау

Қарапайым түрлендіруде кейін жеңіл көзге түсетін ауыстырулардың нәтижесінде интергланданатын кейбір тригонометриялық өрнектердің интегралдарын қарастырайық.

$$\int \sin ax \cos bx dx,\ \int \cos ax \cos bx dx,\ \int \sin ax \sin bx dx\ . \qquad (5.9.1)$$

Бұл интегралдар тригонометриядағы

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

формулалардың көмегімен жеңіл интегралданады.

Мысалы,

$$\int \cos 2x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 6x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 6x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{12}\cos 6x -$$

$$-\frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx\ /\ m \textit{ мен } n \textit{ бүтін сандар}\ /\ . \qquad (5.9.2)$$

1) Егер m мен n-нің ең болмағанда біреуі оң тақ сан болса, мысалы $n = 2k+1$. Онда $\sin x = t$ десек, $\cos x dx = dt$. Сондықтан

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \cos x dx = \int t^m (1-t^2)^k dt.$$

Бұл интеграл $(1-t^2)^k$-ны Ньютон формуласы бойынша қосындыға жіктелгеннен кейін оңай интегралданады.

1-мысал.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx = \left|t = \sin x, dt = \cos t dt\right| =$$

$$= \int t^2(1-t^2)dt = \int (t^2 - t^4)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

2-мысал.

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^6 x}\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^6}dt = \int\left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \int \frac{dt}{t^6} - 2\int \frac{dt}{t^4} +$$

$$+ \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{2}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + C.$$

2) Егер екі көрсеткіш m мен n оң жұп сандар болса, онда берілген интегралды интегралдау үшін

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x,\ 2\cos^2 x = 1+\cos 2x,\ 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

формулаларын пайдаланған жөн болады. Сонда, егер $m = 2k,\ n = 2l$ және $k > l, k = r + l$ десек, онда

$$\int \sin^{2k} x\cos^{2l} x dx = \int \sin^{2r} x(\sin x\cos x)^{2l} dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2l}}\int \sin^{2r} x\sin^{2l} 2xdx = \frac{1}{2^{r+2l}}\int (1-\cos 2x)^r \sin^{2l} 2xdx.$$

Енді не істеу керек екені өзінен-өзі түсінікті. Мысалы,

$$\int \sin^6 x\cos^2 xdx = \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x\cos^2 x\sin^4 xdx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\sin^4 xdx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)^2 dx == \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{16}\int \sin^2 2xdx -$$

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\cos^2 2xdx = \frac{1}{32}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x) +$$

$$+\frac{1}{64}\int \sin^2 4xdx = \frac{1}{32}x - \frac{1}{128}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{128}\int (1-\cos 8x)dx = \frac{x}{32} - \frac{1}{128}\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{x}{128} - \frac{1}{1024}\sin 8x + C.$$

Жалпы жағдайда $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интегралдар (R-рационал амалдардың символы) айнымалы $t = tg\frac{x}{2}, (-\pi < x < \pi)$ формуласы бойынша ауыстыру арқылы рационалданады. Демек, бұл жағдайда $x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ және $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Сондықтан

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (5.9.3)$$

Мысалы,

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \left|t = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right| =$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2-8t+8}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{2-tg\frac{x}{2}} + C.$$

Осы жолмен (универсалдық $t = tg\frac{x}{2}$ ауыстырма) есептегенде кейде интеграл астындағы функция өте күрделі рационал функцияға ауысады, сол себепті оны басқа жол жоқ болған жағдайда пайдалану керек. Практикада, интегралды есептегенде мүмкіндігі бар жерде басқа әдістер мен ауыстыруларды пайдаланған дұрыс.

Мысалы, егер интеграл астындағы функция $R(\sin x,\cos x) = -R(-\sin x,\cos x)$ немесе $R(\sin x,\cos x) = -R(\sin x,-\cos x).$ немесе $R(\sin x,\cos x) = -R(-\sin x,-\cos x).$ теңдіктерін қанағаттандырса, онда айнымалы x-ті сәйкесінше $t = \cos x$ немесе $t = \sin x,$ немесе $t = tgx$ формуласы арқылы t-ға ауыстыру арқылы интегралдауға болады.

3-мысал.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \left|\cos x = t,\ \sin x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| = -\int \frac{t^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2} = \left|\begin{array}{l}\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{A}{1-t} + \\ + \frac{B}{\left(1-t^2\right)} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{\left(1+t\right)^2},\end{array}\right.$$

бұдан $t^2 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2$ енді осы теңбе-теңдікке $t=1$ және $t=-1$ десек, сәйкесінше $1=4B, 1=4D$ болады, яғни $B=\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4}$.

Енді теңбе-теңдіктің екі жағындағы x-тің коэффициенттерін, содан соң бос мүшелерін теңестірсек

$\left.\begin{array}{l}t^3 \\ t^0\end{array}\right| \begin{array}{l}O = -A + C \\ O = A + B + C + D\end{array} \Rightarrow A = C = -\frac{1}{4}$ *болады*. Сонда

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{4}\ln|t-1| -$$

$$-\frac{1}{4(4-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(1+t)} + C = \frac{t}{2\left(1-t^2\right)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

Сондықтан $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$

4-мысал.

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x} = \left|\begin{array}{l}t = \sin x \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2\left(1-t^2\right)}dt = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

5-мысал.

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} = \left|\begin{array}{l}tgx = t, \\ x = arctgt,\end{array}\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}},\right.$$

$$\left.\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^5}dt = \int\left(\frac{1}{t^5} + \frac{2t}{t^3} + \frac{1}{t}\right)dt = \int \frac{dt}{t^5} + 2\int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{4tg^4 x} - ctg^2 x + \ln|tgx| + C = -\frac{1}{4}ctg^4 x - ctg^2 x + \ln|tgx| + C.$$

5.9 Алынбайтын интегралдар

Біз осыған дейін кез келген рационал функцияның интегралы бар және ол интеграл элементар функциялар арқылы өрнектелетінін көрдік. Бірақ рационал функциялардан басқа элементар функциялардың ішінде интегралдары элементар функциялар арқылы өрнектелмейтіндері де толып жатыр. Мысалы, мына интегралдар:

$\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \int l^{-x^2} dx, \int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx, \int \sqrt{\sin x} dx$ және тағы басқалар элементар функциялар арқылы өрнектелмейді. Бұларды «алынбайтын», интегралдар деп атайды. Бірақ, олар ешқандай функциялар арқылы өрнектелуі мүмкін емес деп түсінбеу керек, өйткені олар үзіліссіз функциялардан алынатын интегралдар. Ендеше, олар басқа текті функциялар, элементар емес функциялар арқылы өрнектеледі.

5.10 Анықталған интеграл. Анықталған интегралдың анықтамасы

Бізге $[a,b]$ сегментінде анықталған оң таңбалы $y = f(x) \geq 0$ функциясы берілсін. Сонда $y = f(x)$ қисық сызығымен, OX-осімен және $x = a,\ x = b$ түзулерімен қоршалған фигураны қисық сызықты трапеция деп атайды. Енді осы қисық сызықты трапецияның ауданын табайық. Осы мақсатпен $[a,b]$ сегментін мына нүктелермен $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ $n-$ бөлікке бөлейік те, осы нүктелерден AB қисығына қарай перпендикулярлар тұрғызайық. Сонда $ABCD$ фигурасы $n-$ вертикаль жолақтан тұратын болады. әрбір жолақты шамамен табаны $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, биіктігі $f(\overline{x_i}), (x_i \leq \overline{x_i} \leq x_{i+1})$-ке тең тікбұрышты төртбұрыш деп қарауға болады. Осындай төртбұрыштың ауданы $f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x_i$, $i = \overline{0, n-1}$ болғандықтан барлық сатылы фигураның ауданы $S_0 = f(\overline{x_0})\Delta x_0 + f(\overline{x_1})\Delta x_1 + ... + f(\overline{x}_{n-1})\Delta x_{n-1}$ – ге тең, немесе

$$S_n = \sum_{t=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \qquad (5.11.1)$$

болады. Бұл қосындыны $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функциясы үшін жазылған интегралдық қосынды деп атайды.

Егер $[a,b]$ аралығын басқаша бөліктерге бөлсек және $\overline{x_i}$ нүктелерін басқаша таңдасақ, онда осындай қосындының шексіз түрін жазуға болатыны өзінен өзі түсінікті.

Егер $\max_i \Delta x_i \to 0$ да осы қосындылардың кез келгені үшін тиянақты шегі бар болса және бәрі бірдей болса, онда сол шек жоғарыдағы қисық сызықты трапецияның ауданына тең болады, яғни

$$S = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})\Delta x_i \ . \qquad (5.11.2)$$

Осы сияқты, енді физикадан айнымалы күштің атқаратын жұмысын табу есебін қарастырайық. Материалдық нүкте OX-осі бойынша бағытталған $F = F(x)$ күшінің әсерінен a-дан b-ға дейін қозғалатын болсын. Сонда, жұмсалған A жұмысын табу үшін $[a,b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ бөліктерге бөлеміз. Енді (x_i, x_{i+1}) аралығынан кез келген бір ξ_i нүктесін алып $\sum_{i=0}^{N-1} F(\xi_i)\Delta x_i$ қосындысын құрамыз. Егер $\max_i \Delta x_i \to 0$ ұмтылғанда

$$A = S = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (5.11.3)$$

шегі бар болса, онда A санын айнымалы күштің жұмысы деп атайды.

Жоғарыдағыдай есептерді геометрия, механика, физика т.т салалардан көптеп келтіруге болады. Бұл есептердің шешуі интегралдық қосындылардың шегін табуға келіп тіреледі. Сондықтан, барлығын қамтитын бір ұғымның анықтамасын біреудің реті келіп тұр.

Анықтама. $[a,b]$ аралығында $y = f(x)$ функциясы берілсін.

а) $[a,b]$ кесіндісін кез келген $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ нүктелерімен $[x_i, x_{i+1}]\,(i = 0,1,...,n-1)$ бөліктерге бөлеміз. (оны k -бөліктеу деп атайық).

б) Әрбір $[x_i, x_{i+1}]$ бөліктеп кез келген $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ нүктелерін алып $f(x)$ функциясының k бөліктеуіне сәйкес интегралдық қосынды деп аталатын

$$\sigma_k(f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

қосындыны құрамыз.

в) $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i \to 0$ ұмтылдырып интегралдық қосындының шегін табамыз.

Егер оның тиянақты шегі бар болса, онда оны $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы деп аталады және келесі түрде белгіленеді:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \\ 0 \le i \le n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (a < b) \qquad (5.11.4)$$

a және b сандары анықталған интегралдың сәйкес төменгі және жоғарғы шегі деп аталады.

Анықтамада айтылған $[a,b]$ кесіндісін бөліктеу тәсілі де, ξ_i нүктесін таңдау тәсілі шексіз көп деп жоғарыда айтқанбыз. Анықтамада айтылған қосындының шегі осы тәсілдерден тәуелсіз болу керек.

Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$кесіндісінде үзіліссіз болса, онда оның интегралдық қосындысының әрқашанда тиянақты шегі бар болады және ол шек жоғарыдағы тәсілдерден тәуелсіз болады.

Анықталған интегралдың анықтамасын үзіліссіз функциялар үшін француз математигі Коши, ал жалпы жағдай үшін неміс математигі Б.Ф. Риман (1826-1866) енгізген.

Сондықтан, (5.11.4)-тегі интегралды риман интегралы, ал сондағы $f(x)$ функциясын Риман мағынасында *интегралданатын функция* деп атайды.

Осыдан, үзіліссіз функция әрқашанда интегралданатын функция болады. (5.11.2), (5.11.3), (5.11.4) теңдіктерінен келесі қорытынды жасауға болады:

1) $y = f(x) \ge 0$ қисығы, OX -осі және $x = a$ мен $x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигура ауданы S $f(x)$функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралына тең

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Материалдық нүктені OX-осі бойынша $F = F(x)$күшімен aдан b-ға дейін қозғалғанда жұмсалатын жұмыс мына формуламен табылады.

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Кейбір жағдайларда, осы ұғымдар анықталған интегралдың геометриялық және физикалық мағынасы деп беріледі.

Енді жоғарыда берілген анықталған интегралдың анықтамасынан шығатын мынадай қасиеттерді келтірейік:

1) Анықталған интеграл өзінің интегралдау айнымалысына тәуелді емес, ол тек интегралдың шектері мен $f(x)$ функциясынан тәуелді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = ... = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Егер интегралдың шектерінің орындарын ауыстырса, онда интеграл таңбасын өзгертеді

$$\int_a^b f(x)dx = -\int f(x)dx.$$

3)Егер $a = b$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx = 0.$

5.11 Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері

Айталық $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болсын және $\lambda = \max_i \Delta x_i$ деп белгілейік.

1-қасиет. Тұрақты көбейткішті анықталған интегралдың таңбасының сыртына шығаруға болады:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx,\ A = const.$$

Дәлелдеу.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{A\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} Af(\xi_i)\Delta x_i = A\lim_{A\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

Кейінгі қасиеттер де осылай дәлелденеді. Сондықтан, олардың дәлелдеулерін келтірмейміз.

2-қасиет. Саны санаулы үзіліссіз функциялардың алгебралық қосындысынан алынған анықталған интеграл осы функциялардың әрқайсысынан алынған интегралдардың қосындысына тең, яғни

$$\int_{\hat{o}}^{\grave{e}} [f(x) \pm g(x)dx] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$

3-қасиет. Егер $[a,b]$ аралығында $f(x) \ge 0$ $(a < b)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4-қасиет. Егер $[a,b]$ аралығында $f(x) \leq \varphi(x)$ (a,b) болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

5-қасиет. Кез келген a,b,c -сандары үшін

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;\ (a < c < b)$$

теңдік орындалады, егер осы үш интеграл да бар болса.

6-қасиет. Егер m және M функциясының $[a,b]$ кесіндідегі ең кіші және ең үлкен мәндері болса, онда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Дәлелдеуі. Берілген шарт бойынша кез келген $x \in [a,b]$ үшін

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Онда, 4-қасиетті пайдаланғанда

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

болады, осыдан жоғарыдағы теңсіздіктің орындалатының көреміз.

7-қасиет. (орташа мән туралы теорема). Егер $f(x)$. функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда осы аралықта $\tilde{n}$-нүктесі табылып, мынадай теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \qquad (5.12.1)$$

Дәлелдеуі. $f(x)$. функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, m және M сандары табылып, мына теңсіздіктер орындалады:

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{[a,b]} f(x)\ .$$

Онда 6-қасиет бойынша

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ немесе $m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq M$ болады.

$f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ өрнегі сол функцияның бір $c \in [a,b]$ нүктедегі мәніне тең болады, яғни

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

немесе

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad c \in [a,\ b].$$

Теорема дәлелденді.

Енді осы теореманы пайдаланатын электротехникадан мысал келтірейік.

Айнымалы токтың күші $i = i_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$-ға тең болсын. Бұл жерде $t_0 > 0$-ток мәнінің максимумы , T-период, t-уақыт. Осы ток күші квадратының T-периодтағы орташа мәнін табу керек болсын.

Шешуі. (6.12.1) формуласын пайдаланамыз:

$$\mu = i^{-2} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{i_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi t}{T}dt = \frac{i_0^2}{2T}\int_0^T\left(1-\cos\frac{4\pi t}{T}\right)dt = \frac{i_0^2}{2T}\left(t - \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T = \frac{i_i^0}{2}.$$

Осыдан практикада маңызы үлкен мынадай формула шығады:

$$\bar{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0.$$

Бұл жерде i токтың орта мәні болады.

5.12 Жоғарғы шегі айнымалы интеграл. Ньютон – Лейбниц формуласы

Бізге $[a,b]$ аралығында үзіліссіз $f(x)$ функциясы берілсін. Егер $t \in [a;x] \in [a;b]$ болса, онда интеграл $\int_a^b f(t)dt$ жоғарғы шегі айнымалы интеграл деп аталады. Сонда a-тұрақты болғандықтан, бұл интеграл айнымалы x-тің функциясы болады., демек

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

1-теорема. Егер $f(x)$үзіліссіз, ал $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ болса, онда $\Phi'(x) = f(x)$, яғни $\Phi(x)$ функциясы $f(x)$-тің алғашқы функциясы болады.

Дәлелдеу. Егер $\Delta x, x$ айнымалының өсімшесі болса, онда анықталған интегралдың 5-қасиетін пайдаланып мынаған келеміз:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Бұл жерде ξ x пен $x+\Delta x$ арасында жатады. $f(x)$ үзіліссіз болғандықтан,

$$\Phi'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta(x)} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Теорема дәлелденді.

2-теорема. Егер $F(x)$ берілген үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (5.13.1)$$

болады және бұл теңдікті Ньютон -Лейбниц формуласы деп атайды.

Дәлелдеу. 1-теорема бойынша $\int_a^x f(t)dt$ өрнегі $f(x)$-тің алғашқы функциясы болады, ендеше

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C, C = const .$$

Егер осы теңдікке $x = a$ деп алсақ

$$\int_a^a f(t)dt = F(a)+C,\ O = F(a)+C,\ C = -F(a),$$

яғни $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$

Енді $x = b$ деп алсақ

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

немесе $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ болады.

Теорема дәлелденді.

1-мысал.

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^4 = \frac{7}{4}.$$

2-мысал.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

5.13 Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау

Бізге $[a,b]$ аралығында үзіліссіз және туындылары бар $u = u(x),\ \vartheta = \vartheta(x)$ функциялары берілсін. Онда $d(u\vartheta) = \vartheta du + ud\vartheta.$

Осы теңдікті $[a,b]$ аралығында интегралдасақ $u\vartheta\Big|_a^b = \int_a^b \vartheta du + ud\vartheta$ болады.

Бұдан $$\int_a^b ud\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b = -\int_a^b \vartheta du \qquad (5.14.1)$$

теңдігі шығады. Осы формуланы анықталған интегралдың бөліктеп интегралдау формуласы деп атайды.

Мысал.

$$\int_0^{2\pi} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, & d\vartheta = \sin xdx \\ du = dx, & \vartheta = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos xdx = -x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \sin x\Big|_0^{2\pi} = -2\pi .$$

5.14 Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру

Бізге анықталған интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

және $x=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]$ функциясы берілсін және ол өзінің туындысы $\varphi'(t)$-мен бірге $[\alpha,\beta]$ аралығында үзіліссіз болсын. Сонымен бірге:

1) Айнымалы t $[\alpha,\beta]$ аралығында өзгергенде, айнымалы x $[a,b]$ аралығында өзгерсін және $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$

2) Күрделі $F[\varphi(t)]$ функциясы $[\alpha,\beta]$ аралығында анықталған және үзілісіз болсын.

Сонда мына формула орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \qquad (5.15.1)$$

Дәлелдеу. $F[\varphi(t)]$ күрделі функциясын қарастырамыз. Оның туындысы $\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$ яғни $F[\varphi(t)]$ табылған $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$ функциясының алғашқы функциясы болады. Енді Ньютон-Лейбниц формуласын пайдалансақ:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx\,.$$

Яғни (5.15.1) формула дәлелденді.

Мысал.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx=\left|\begin{array}{lll} t=\sqrt{1+x}, & x=t^2-1, & dx=2tdt \\ x=0, & t=\sqrt{1+0}, & t=1, \\ x=3, & t=\sqrt{1+3} & t=2 \end{array}\right|=\int_1^2\left(t^2-1\right)2tdt=2\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2=2\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right)-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right)=7\frac{11}{15}.$$

5.15 Меншіксіз (өзіндік мағынасында емес) интегралдар

Анықталған

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралды зерттегенде, мынадай шарттар орындалады деп жорыдық:

1) $[a,b]$ - аралығы шенелген. 2) $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында анықталған және үзіліссіз. Мұндай интегралды меншікті интеграл деп атайды.

Ал егер жоғарыдағы шарттардың біреуі орындалмаса, онда оңдай интегралды меншіксіз интеграл деп атайды.

Меншіксіз интегралдың екі қарапайым түрін қарастырамыз.

1) Шекаралары ақырсыз (шексіз) интегралдар.

$f(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ аралығында үзіліссіз болсын. Онда меншіксіз

(өзіндік мағынасында емес) интегралды былай анықтаймыз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx . \qquad (5.16.1)$$

Егер (5.16.1) шегі бар және тиянақты сан болса, онда шегі шенелмеген

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интегралды 1-ші текті меншіксіз интеграл деп атайды және жинақты дейді, ал оның мәні (5.16.1) формуласымен анықталады. Ал егер бұл шарт орындалмаса, онда бұл интегралды жинақталмаған деп атайды.

Геометриялық тұрғыдан қарағанда (5.16.1) – ші интеграл $y = f(x)$ функциясымен, OX осімен және $x = a$ түзумен шектелген фигураның ауданың бейнелейді.

Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің алғашқы функциясы болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}[F(b) - F(a)]$ деп табуға болады немесе $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),\ F(+\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b)$.

1-мысал.

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$$

Бұл интеграл жинақталған (жинақталады).

Жинақты (жинақталатын) меншіксіз интегралды есептеу үшін осыдан бұрын анықталған интегралдарға қолданылған әдістерді пайдаланыды. Сонымен бірге, оларды жинақтылыққа зерттеу үшін салыстыру әдістерін қолдануға болады.

1-ші салыстыру теоремасы. Егер $[a;+\infty)$ аралығында $f(x), g(x)$ функциялары үзіліссіз және мына теңсіздік $O \le g(x) \le f(x)$ орындалатын болса, онда $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралдың жинақталатындығынан, мына $\int_a^{\infty} g(x)dx$ интегралдың да жинақталатының дәлелдеуге болады.

Бұл теореманың дәлелдеуі меншіксіз интегралдың геометриялық бейнелеуінен айқын көрінеді.

$g(x) \le f(x)$ болғандықтан, $f(x)$-тің графигі $g(x)$-тің графигінен жоғары жатады. Егер осы үлкен функциядан алынған меншіксіз интеграл жинақты болса, онда әрине одан кіші функциядан алынған интеграл да жинақты болады.

2-ші салыстыру теоремасы. Егер 1-ші салыстыру теоремадағы шарттар орындалып және $\int_a^{\infty} g(x)dx$ интегралы жинақталмайтын болса, онда $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақталмайтын болады.

2-мысал. Интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$-дың жинақтылығы мына шарттардың $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},(x\geq 1)$ орындалуымен және мына интегралдың $\int_1^{\infty}x^{-\frac{5}{3}}dx$ жинақ тылығынан шығады.

Егер $f(x)$ функцияның таңбасы өзгеріп тұратын болса, онда мына теореманы қолдануға болады.

3-теорема. $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ интегралының жинақтылығынан мына $\int_a^{\infty}f(x)dx$ интегралдың жинақты болуы шартты түрде орындалады.

Ескерту-Жоғарыда келтірілген анықтама мен теоремалар 1-ші текті меншіксіз интегралдардың мына түріне де орындалады:

$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$ Ал интегралдың мына түрін

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$ формуламен есептейді (c-нүктесін кез келген жерден таңдауға болады).

2) Шенелген функциялардың интегралдары.

$f(x)$ функциясы $[a;b)$ аралығында үзіліссіз, ал $x=b$ үзіліс нүктесі болсын. Осындай үзілісті функциядан $[a,b]$ кесіндісі бойынша алынған меншіксіз (өзіндік мағнасында емес) интегралды мына формула арқылы анықтайды:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (5.16.2)$$

Егер осы шек бар және тиянақты болса, онда (5.16.2) интегралды 2-ші текті меншіксіз интеграл деп атайды және жинақты дейді, ал керісінше шек табылмаса, онда жинақталмаған дейді.

Егер үзіліссіз $F(x)$ функциясы $f(x)$-тың алғашқы функциясы болса, яғни $F'(x)=f(x)$, онда (5.16.2) –формуласын былай жалғастыруға болады:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}[F(b-\varepsilon)-F(a)].$$

4-мысал. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1=2-0=2.$

Ескерту- (5.16.2) сияқты формуланы $x=a$ үзіліс нүктесі болғанда да жазуға болады

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (5.16.3)$$

Егер үзіліс нүктесі $[a,b]$ аралығының ішінде болса, яғни c-үзіліс нүктесі $a<c<b$, онда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a\varepsilon}^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Ары қарай жоғарыда (5.16.2) (5.16.3) интегралдарға келтірілген амалдарды қолданады. Сонымен бірге, осы функциясы шенелмеген интералдарға жоғарыда 1-ші текті меншіксіз интегралдарға берілген салыстыру теоремаларын толығымен қолдануға болады.

Әдебиеттер тізімі

1 Айдос Е.Ж. Жоғары математика-1,2. Оқулық. – Алматы: «Иль-Тех-Кітап» ЖШС, 2007. -744 б.

2 Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика – Алматы: ҚБТУ, 2004.- 440 б.

3 Байарыстанов А.О. Жоғары математика және өзіндік жұмыстар жинағы. –Алматы: «Нұр-Принт» (электрон), 2011.- 372 б.

4 Жоғары математика бойынша жеке тапсырмалар. 1, 2 бөлім. Құрастырған Рябушко А.П. (аударма). – Қарағанды, 2011.-365 б.

5 Усенбаева Қ. Жоғары математика тест жинағы. – Алматы: Ғылым, 2005. – 200 бет.

6 Хасеинов К.А. Математика канондары.–Алматы: Атамұра, 2004.– 691 б.

7 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Математика 1. 5В071700 «Жылу энергетикасы», 5В071800 «Электр энергетикасы», 5В071900 «Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар» мамандықтары бойынша оқитын студенттер үшін дәрістер жинағы. –Алматы, 2013. - 48 б.

Мазмұны

1 Анықтауыштар мен матрицалар.....3
2 Векторлық алгебра және аналитикалық геометрия негіздері.....12
3 Функциялар. Шектер теориясы.....24
4 Бір аргументті функцияның дифференциалдық есептеулері.....29
5 Бір аргументті функцияның интегралдық есептеулері.....42
Әдебиеттер тізімі..... 71

2016 ж. жиынтық жоспары, реті 39

Дүйсек Абылмансур Көптлеуович
Абдулланова Жанар Советқалиқызы

МАТЕМАТИКА 1
Оқу құралы

Редактор Қ.С.Телғожаева

Басуға ____._____._____ж. қол қойылды.
Таралымы 100 дана Пішімі 60х84 1/16

Баспаханалық қағаз №2
Есептік-баспа табағы 4,4. №_____тапсырыс
Бағасы 2200 теңге.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамның АҚ
көшірмелі-көбейткіш бюросы
Алматы қ., Байтурсынұлы көшесі, 126