Введение

Математика является основой глубокого изучения профилирующих дисциплин. Без современной математики с её развитым аналитическим и численным аппаратом невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Математические методы стали основной частью любой технической деятельности. Всё это приводит к необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышения уровня фундаментальной математической подготовки.

Цель данной работы - изучение основных понятий, законов и методов высшей математики и их приложений, вооружение будущих специалистов современным математическим аппаратом, формирование у студентов знаний и умений, которые образуют теоретический фундамент, необходимый для корректной постановки и решения проблем при разработке математических и компьютерных моделей сложных технических систем.

Программа по курсу «Математика 1 семестр» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС укрупненных дидактических единиц с завершающим рубежным контролем. Все студенты изучают 3 модуля, что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах.

Вариант задания РГР для студентов определяется как остаток от деления номера зачетной книжки на 30. Например: номер зачетной книжки равен 080612. Это число представляется в виде: 080612=2687·30+2. Следовательно, студент должен выполнить задания варианта №2. Если остаток равен нулю, то студент выполняет вариант №30.

В расчетно-графической работе решение задач должно быть кратким и, в то же время, достаточно объяснено ссылками на теорию и сопровождено необходимыми рисунками. Примером для оформления может служить решение типового варианта.

РГР выполняются в отдельной тонкой тетради, в номере каждого задания вторая цифра указывает на вариант.

Теоретические вопросы

Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия.

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства.
2. Алгебраические дополнения и миноры.
3. Матрицы. Обратная матрица. Способы их вычисления.
4. Матричный способ решения систем линейных алгебраических уравнений.
5. Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Векторы, линейные операции над ними.
7. Разложение вектора по базису.

8. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и их свойства. Длина вектора. Угол между векторами.

9. Условия коллинеарности и компланарности векторов.

10. Уравнение плоскости в R^3.

11. Уравнение прямой в R^2 (в общем виде, с угловым коэффициентом, в отрезках, проходящей через две заданные точки).

12. Уравнение прямой в R^3.

13. Общее уравнение кривых второго порядка.

14. Канонические формы уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Модуль 2. Элементы математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

1. Числовая последовательность и ее предел.
2. Функция. Предел функции.
3. Замечательные пределы.
4. Вычисления пределов с помощью таблицы эквивалентностей. Непрерывность. Точки разрыва, их классификация.
5. Сложные, параметрически и неявно заданные функции, их производные.
6. Дифференциал функции, его свойства и приложения.
7. Приложения дифференциала функции.
8. Производные высших порядков.
9. Исследование функции с помощью производных первого порядка (возрастание, убывание, экстремум).
10. Исследование функции с помощью производных первого порядка (выпуклость, вогнутость).
11. Исследование с помощью производных второго порядка (выпуклость, вогнутость, точки перегиба).
12. Асимптоты кривых.
13. Общая схема исследования функции.

Модуль 3. Интегральное исчисление функции одной переменной.

1. Неопределенный интеграл (определение, свойства).
2. Основные методы интегрирования.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Определенный интеграл (определение, формула Ньютона-Лейбница).
5. Методы интегрирования определенного интеграла.
6. Приложение определенного интеграла.

Расчетно-графическая работа №1. Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия

Расчётные задания

Задание 1. Дан определитель третьего порядка. Требуется найти:
а) минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij};
б) определитель по правилу треугольника (правилу Саррюса).

1.1	$\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.3	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.4	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, i=1, j=1$	1.5	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.6	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.7	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.8	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.9	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}, i=2, j=2$
1.10	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=2$	1.11	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.12	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=2$
1.13	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}, i=3, j=3$	1.14	$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.15	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i=3, j=1$
1.16	$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, i=2, j=2$	1.17	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.18	$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, i=2, j=3$
1.19	$\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.20	$\begin{vmatrix} -6 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}, i=1, j=3$	1.21	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=1$
1.22	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.23	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \end{vmatrix}, i=2, j=3$	1.24	$\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}, i=1, j=2$
1.25	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.26	$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, i=1, j=2$	1.27	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix}, i=3, j=2$

1.28	$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & -1 \end{vmatrix}, i=3, j=1$	1.29	$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}, i=2, j=1$	1.30	$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}, i=1, j=3$

Задание 2. Даны матрицы A, B, C. Требуется найти:

а) произведение матриц AB или BC, если возможно. Объяснить почему, если невозможно;

б) матрицу A^{-1}, обратную матрице A.

2.1	$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 6 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -3 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$
2.2	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
2.3	$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \end{pmatrix}$
2.4	$A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2.5	$A=\begin{pmatrix} 7 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
2.6	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2.7	$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
2.8	$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

2.9	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 5 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\end{pmatrix}$
2.10	$A=\begin{pmatrix}11 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15 & 0 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 9 & 16\\ 3 & 8\end{pmatrix}$
2.11	$A=\begin{pmatrix}14 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -4\\ 7 & 1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 3 & 6 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$
2.12	$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 2 & 1 & -11\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 16\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 10 & -2\\ -3 & 3 & 5\end{pmatrix}$
2.13	$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 5 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -5 & 9\\ 1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
2.14	$A=\begin{pmatrix}8 & -2 & 4\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -4 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 13\\ 4 & -6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & -11 & 10 & 0\\ -3 & 9 & -2 & 1\end{pmatrix}$
2.15	$A=\begin{pmatrix}-8 & 1 & 6\\ 3 & 3 & -7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\end{pmatrix}$
2.16	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ 1 & -5 & 6\\ -4 & 1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 6\\ 1 & -9\end{pmatrix}$
2.17	$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 8 & -5 & 7\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$
2.18	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ 9 & -3 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 12\\ -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -5\end{pmatrix}$
2.19	$A=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

2.20	$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -45 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 10 & -12 \end{pmatrix}$
2.21	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
2.22	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
2.23	$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
2.24	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
2.25	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
2.26	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2.27	$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
2.28	$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
2.29	$A=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$
2.30	$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Даны точки *A* и *B*; и вектора $\bar{b},\ \bar{c}$. Требуется найти:

а) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{AB}\right|$, координаты середины отрезка AB;

б) скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, векторное произведение $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, смешанное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$;

в) объем пирамиды, построенной из векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

3.1	A(5, -4, 3), B(1, 2, -8), $\bar{b}$=(0, 1, 4), $\bar{c}$=(5, 2, -3)	3.2	A(-3, 1, 0), B(7, 1, -5), $\bar{b}$=(7, 1, 4), $\bar{c}$=(5, 8, -3)
3.3	A(0, 4, 5), B(3, -2, 1), $\bar{b}$=(6, 4, 4), $\bar{c}$=(0, 2, -2)	3.4	A(3, -2, 5), B(4, 5, 7), $\bar{b}$=(5, 1, 4), $\bar{c}$=(5, -3, -3)
3.5	A(2, -3, 7), B(3, 2, 8), $\bar{b}$=(6, 4, 6), $\bar{c}$=(0, 6, -2)	3.6	A(2, -1, 7), B(6, 3, 4) , $\bar{b}$=(4, 5, 4), $\bar{c}$=(7, 8, 5)
3.7	A(3, 1, 7), B(2, -3, 9), $\bar{b}$=(9, 1, 4), $\bar{c}$=(8, 2, -3)	3.8	A(2, 1, -6), B(1, 4, 9) , $\bar{b}$=(1, 1, 8), $\bar{c}$=(5, -3, 9)
3.9	A(2, -4, 8), B(5, 4, 7), $\bar{b}$=(6, 3, 4), $\bar{c}$=(7, 2, -2)	3.10	A(3, 2, 5), B(4, 0, -3) , $\bar{b}$=(7, 2, 4), $\bar{c}$=(5, 8, 4)
3.11	A(2, 3, -1),B(-6, 4, 2), $\bar{b}$=(2, 9, 6), $\bar{c}$=(0, 6, 4)	3.12	A(-4, 2, 3), B(8, 7, -2), $\bar{b}$=(5, 3, 4), $\bar{c}$=(5, 3, 4)
3.13	A(5, 3, 6), B(-2, 3, 5), $\bar{b}$=(6, 2, 4), $\bar{c}$=(7, 2, -7)	3.14	A(0, 6, 0), B(5, 3, -4), $\bar{b}$=(8, 5, 3), $\bar{c}$=(7, 8, 7)
3.15	A(4, 2, 0), B(1, -7, 8), $\bar{b}$=(2, 8, 6), $\bar{c}$=(0, 6, 3)	3.16	A(4, 2, 5), B(-1, 0, 6), $\bar{b}$=(2, 1, 8), $\bar{c}$=(5, 9, 9)
3.17	A(3,-5, 8), B(6, 3, 9), $\bar{b}$=(7, 3, 4), $\bar{c}$=(3, 2, -2)	3.18	A(7, 2, 2), B(-5, 7, -7) , $\bar{b}$=(6, 1, 3), $\bar{c}$=(1, 8, 7)
3.19	A(5, -3, 1), B(2, 3, 7), $\bar{b}$=(2, 7, 6), $\bar{c}$=(7, 6, 4)	3.20	A(8, -6, 4), B(10, 5, 1), $\bar{b}$=(9, 1, 8), $\bar{c}$=(4, 9, 1)
3.21	A(5, 6,-8), B(8, 10,7), $\bar{b}$=(1, 3, 4), $\bar{c}$=(3, 6, -2)	3.22	A(1, -1, 3), B(6, 5, 8), $\bar{b}$=(7, 8, 3), $\bar{c}$=(1, 8, 9)
3.23	A(3, 5,-7), B(8, 4, 1), $\bar{b}$=(2, 5, 6), $\bar{c}$=(7, 6, 8)	3.24	A(6, -6, 5), B(4, 9, 5), $\bar{b}$=(6, 1, 4), $\bar{c}$=(0, 9, 1)
3.25	A(4,6,11), B(9,3,-4), $\bar{b}$=(3, 7, 6), $\bar{c}$=(8, 6, 4)	3.26	A(5, 7, 4),B(4,-10, 9), $\bar{b}$=(8, 1, 7), $\bar{c}$=(4, 5, 1)
3.27	A(-9, 8, 9), B(7, 1,-2), $\bar{b}$=(7, 2, 4), $\bar{c}$=(5, 2, -1)	3.28	A(5, 2, 6), B(1, 8, -2), $\bar{b}$=(4, 2, 3), $\bar{c}$=(2, 3, 7)
3.29	A(2, 8, -9), B(7, 5,-5), $\bar{b}$=(8, 1, 6), $\bar{c}$=(6, 1, 4)	3.30	A(-2, 7, 0), B(6, 3, 5), $\bar{b}$=(2, -3, 8), $\bar{c}$=(3, 9, 2)

Задание 4. Даны точки A_1, A_2 на плоскости и уравнение прямой L_1. Записать уравнение прямой:

а) $L_2 = (A_1, A_2)$ -проходящей через эти точки;

б) L_2 - в виде общего уравнения прямой;

в) L_2 - в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом и в параметрическом виде;

г) L_2 - в виде уравнения прямой в отрезках;

д) L_3 , проходящей через точку A_1 и перпендикулярную L_2 .

4.1	$A_1(-1,6),\ A_2(-1,7),\ L_1: 7x-4y-1=0$	4.2	$A_1(5,1),\ A_2(1,-3),\ L_1: x+6y+3=0$
4.3	$A_1(10,2),\ A_2(-1,5),\ L_1: x+2y-8=0$	4.4	$A_1(-6,3),\ A_2(1,-7),\ L_1: 5x-7y+9=0$
4.5	$A_1(2,4),\ A_2(-2,3),\ L_1: 4x-4y+1=0$	4.6	$A_1(-4,1),\ A_2(8,-1),\ L_1: 8x-y+6=0$
4.7	$A_1(-1,7),\ A_2(-2,4),\ L_1: 2x-3y+2=0$	4.8	$A_1(4,1),\ A_2(7,-1),\ L_1: 3x-5y+4=0$
4.9	$A_1(2,1),\ A_2(-1,-4),\ L_1: 6x-8y+5=0$	4.10	$A_1(-7,1),\ A_2(1,-6),\ L_1: 9x-9y+7=0$
4.11	$A_1(6,5),\ A_2(-5,1),\ L_1: 2x-2y-10=0$	4.12	$A_1(-3,3),\ A_2(8,-2),\ L_1: x-3y+3=0$
4.13	$A_1(-4,7),\ A_2(3,1),\ L_1: 6x-7y-1=0$	4.14	$A_1(5,2),\ A_2(6,-2),\ L_1: 8x-y+5=0$
4.15	$A_1(1,8),\ A_2(6,-4),\ L_1: 4x-6y-2=0$	4.16	$A_1(4,8),\ A_2(4,-1),\ L_1: 7x-9y+4=0$
4.17	$A_1(9,1),\ A_2(-1,2),\ L_1: 3x+4y+8=0$	4.18	$A_1(-8,1),\ A_2(1,-3),\ L_1: 5x-5y+7=0$
4.19	$A_1(6,1),\ A_2(-3,2),\ L_1: 9x-8y+6=0$	4.20	$A_1(-4,4),\ A_2(3,-3),\ L_1: 3x-5y+2=0$
4.21	$A_1(-4,1),\ A_2(5,1),\ L_1: 7x-2y+5=0$	4.22	$A_1(7,1),\ A_2(5,-2),\ L_1: x-9y+8=0$
4.23	$A_1(-2,2),\ A_2(7,3),\ L_1: 4x-7y-6=0$	4.24	$A_1(-1,6),\ A_2(4,-1),\ L_1: 5x-y+9=0$
4.25	$A_1(7,2),\ A_2(-1,3),\ L_1: 2x+8y-3=0$	4.26	$A_1(3,1),\ A_2(6,-2),\ L_1: 8x-3y+1=0$
4.27	$A_1(5,2),\ A_2(-4,1),\ L_1: 6x-4y-4=0$	4.28	$A_1(-3,6),\ A_2(3,-14),\ L_1: x-6y+5=0$
4.29	$A_1(-4,2),\ A_2(5,3),\ L_1: 5x-5y-5=0$	4.30	$A_1(5,1),\ A_2(4,-1),\ L_1: 3x-7y+7=0$

Задание 5. Даны точки A_1, A_2, A_3. Требуется:

а) составить уравнение плоскости $P_1 = (A_1 A_2 A_3)$;

б) записать P_1 в виде общего уравнения плоскости;

в) записать P_1 в виде уравнения плоскости в отрезках;

г) записать P_1 в виде общего уравнения плоскости, проходящей через точку $\grave{A}_1$;

д) составить каноническое уравнение прямой $L_1 = (A_1 A_2)$;

е) записать параметрическое уравнение прямой L_1;

д) составить каноническое уравнение прямой $L_1 = (A_2 A_3)$;

е) записать параметрическое уравнение прямой L_1;

ж) составить уравнение прямой $L_2 = (A_1 N)$, перпендикулярной P_1.

5.1	$A_1(-1,6,5),\ A_2(-1,7,1),\ A_3(4,-6,2)$	5.2	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$
5.3	$A_1(3,4,5),\ A_2(3,-9,1),\ A_3(4,5,7)$	5.4	$A_1(-3,4,2),\ A_2(9,5,1),\ A_3(4,-3,-1)$
5.5	$A_1(0,8,5),\ A_2(3,-2,4),\ A_3(2,5,6)$	5.6	$A_1(2,5,6),\ A_2(3,-7,8),\ A_3(5,4,-2)$
5.7	$A_1(-1,4,2),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,40,7)$	5.8	$A_1(1,9,-1),\ A_2(2,6,1),\ A_3(2,8,-6)$
5.9	$A_1(-1,4,2),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(4,4,7)$	5.10	$A_1(5,4,1),\ A_2(3,-4,2),\ A_3(1,7,4)$
5.11	$A_1(-1,4,5),\ A_2(3,-5,1),\ A_3(4,6,2)$	5.12	$A_1(-1,4,1),\ A_2(1,-462),\ A_3(6,7,2)$
5.13	$A_1(0,9,5),\ A_2(4,-2,4),\ A_3(2,7,6)$	5.14	$A_1(-1,3,5),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,5,2)$
5.15	$A_1(3,4,-1),\ A_2(1,-7,2),\ A_3(1,7,2)$	5.16	$A_1(-1,4,1),\ A_2(1,-4,6),\ A_3(3,7,2)$
5.17	$A_1(1,4,1),\ A_2(1,8,1),\ A_3(4,3,-6)$	5.18	$A_1(0,9,5),\ A_2(4,-2,4),\ A_3(2,7,6)$
5.19	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$	5.20	$A_1(8,4,-1),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,2,7)$
5.21	$A_1(1,8,-3),\ A_2(2,8,1),\ A_3(6,3,-6)$	5.22	$A_1(5,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,6,2)$
5.23	$A_1(8,4,-1),\ A_2(1,-9,1),\ A_3(4,2,7)$	5.24	$A_1(1,8,-3),\ A_2(2,8,1),\ A_3(6,3,-6)$
5.25	$A_1(1,4,-2),\ A_2(9,8,1),\ A_3(4,-3,-6)$	5.26	$A_1(7,4,1),\ A_2(1,-4,2),\ A_3(1,7,2)$
5.27	$A_1(2,5,-1),\ A_2(3,-7,8),\ A_3(5,9,-2)$	5.28	$A_1(9,-5,6),\ A_2(3,2,-7),\ A_3(-5,1,-2)$
4.29	$A_1(1,8,-1),\ A_2(2,6,1),\ A_3(2,3,-6)$	4.30	$A_1(3,9,1),\ A_2(-4,6,1),\ A_3(2,7,5)$

Задание 6. Решить систему:

а) методом Крамера;

б) матричным методом (с помощью обратной матрицы).

6.1	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.2	$\begin{cases} 4x+y=-3 \\ x+2y=1 \end{cases}$	6.3	$\begin{cases} 5x+y=2 \\ -x+2y=3 \end{cases}$
6.4	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$	6.5	$\begin{cases} 8x+y=-3 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.6	$\begin{cases} 6x+y=2 \\ -x+2y=4 \end{cases}$
6.7	$\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$	6.8	$\begin{cases} 4x+y=-3 \\ 6x+2y=11 \end{cases}$	6.9	$\begin{cases} 9x+y=2 \\ -x-3y=3 \end{cases}$
6.10	$\begin{cases} 2x+5y=7 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.11	$\begin{cases} 4x+y=-3 \\ x+7y=1 \end{cases}$	6.12	$\begin{cases} 7x+y=2 \\ -x+3y=4 \end{cases}$
6.13	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.14	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x+2y=1 \end{cases}$	6.15	$\begin{cases} 5x+6y=2 \\ -x+2y=3 \end{cases}$
6.16	$\begin{cases} x+8y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$	6.17	$\begin{cases} 8x+y=7 \\ x+2y=1 \end{cases}$	6.18	$\begin{cases} 6x-y=6 \\ -x+2y=4 \end{cases}$
6.19	$\begin{cases} 4x+3y=7 \\ x+3y=-1 \end{cases}$	6.20	$\begin{cases} -3x+y=7 \\ 6x+3y=11 \end{cases}$	6.21	$\begin{cases} 7x+y=2 \\ -x+2y=3 \end{cases}$
6.22	$\begin{cases} x+2y=13 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.23	$\begin{cases} 3x-y=12 \\ x+2y=6 \end{cases}$	6.24	$\begin{cases} 7x+y=2 \\ -x+2y=4 \end{cases}$
6.25	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=1 \end{cases}$	6.26	$\begin{cases} 7x-y=2 \\ x+2y=6 \end{cases}$	6.27	$\begin{cases} x-4y=7 \\ x+y=6 \end{cases}$
6.28	$\begin{cases} 2x+y=-3 \\ 6x+2y=1 \end{cases}$	6.29	$\begin{cases} x-y=12 \\ x+2y=6 \end{cases}$	6.30	$\begin{cases} x-y=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$

Задание 7. Дана система уравнений. Требуется:

а) проверить совместность системы методом Гаусса;

б) найти ранг матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы;

в) решить систему, если она совместна.

7.1 $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$	7.2 $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$	7.3 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
7.4 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$	7.5 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	7.6 $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$

7.7 $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$	7.8 $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 5x+y+3z=4 \end{cases}$	7.9 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$
7.10 $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7y=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$	7.11 $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$	7.12 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$
7.13 $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 5x-2y=2 \\ -x+2z=-1 \end{cases}$	7.14 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	7.15 $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$
7.16 $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$	7.17 $\begin{cases} 4x+2z=2 \\ 2x-2y=-1 \\ 4x-2y+2z=-3 \end{cases}$	7.18 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$
7.19 $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-2y=-1 \\ 4x-2y+5z=-3 \end{cases}$	7.20 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	7.21 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$
7.22 $\begin{cases} 3x+5z=-2 \\ x+2y=3 \\ 2x+5z=1 \end{cases}$	7.23 $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$	7.24 $\begin{cases} 3x+4y-2z=12 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+4z=-9 \end{cases}$
7.25 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	7.26 $\begin{cases} 4x-2y+5z=-3 \\ x-2y=-1 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$	7.27 $\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-7z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$
7.28 $\begin{cases} 3x+5z=1 \\ x+2y=2 \\ -3x-3y+5z=-1 \end{cases}$	7.29 $\begin{cases} 2x-3y+2z=5 \\ 3x+4y-7z=2 \\ 5x+y-5z=9 \end{cases}$	7.30 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x-y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$

Задание 8. Даны точка *A*, радиус окружности *R*; полуоси кривых - *a*,*b*; уравнение прямой – *D*. Требуется:

а) записать уравнение окружности с центром в точке *A* и радиусом *R*;

б) записать каноническое уравнение эллипса с полуосями *a* и *b*. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет;

в) записать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью *a* и мнимой - *b*. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот;

г) записать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если *D* ее директриса. Найти координаты его фокуса, эксцентриситет;

д) сделать схематический чертеж эллипса, гиперболы, параболы.

8.1	*A(2,-4), R=4, a=1, b=3, D: x=-5*	8.2	*A(-8,2), R=1, a=6, b=5, D: x=-5*
8.3	*A(1,-4), R=5, a=8, b=3, D: y=-6*	8.4	*A(5,-4), R=2, a=6, b=4, D: y=-2*
8.5	*A(2,-5), R=7, a=3, b=2, D: x=4*	8.6	*A(1,8), R=5 , a=3, b=2, D: x=-3*

8.7	*A(3,-4), R=9, a=7, b=6, D: y=-2*	8.8	*A(10,1), R=8, a=1, b=6, D: y=-4*
8.9	*A(5,-4), R=1, a=6, b=4, D: x=-5*	8.10	*A(6,3), R=8 , a=2, b=3, D: x=-5*
8.11	*A(1,-3), R=5 , a=8, b=2, D: y=6*	8.12	*A(5,5), R=2, a=1, b=3, D: y=-7*
8.13	*A(2,-6), R=7, a=3, b=4, D: x=5*	8.14	*A(12,6), R=7, a=6, b=2, D: x=-5*
8.15	*A(3,4), R=9 , a=2, b=6, D: y=-8*	8.16	*A(0,5), R=4, a=6, b=4, D: y=8*
8.17	*A(2,-9), R=7, a=5, b=2, D: x=6*	8.18	*A(-5,0), R=7, a=4, b=5, D: x=1*
8.19	*A(8,4), R=6 , a=8, b=5, D: y=2*	8.20	*A(5,1), R=2, a=9, b=1, D: x=-1*
8.21	*A(5,-4), R=4, a=6, b=4, D: x=1*	8.22	*A(-3,2), R=4, a=8, b=4, D: y=1*
8.23	*A(1,8), R=5, a=9, b=4, D: y=-6*	8.24	*A(9,1), R=6, a=4, b=7, D: x=-3*
8.25	*A(2,-5), R=7, a=7, b=4, D: x=9*	8.26	*A(-9,2), R=7, a=1, b=8, D: y=7*
8.27	*A(7,4), R=5, a=1, b=7, D: y=8*	8.28	*A(11,-4), R=2, a=2, b=4, D: x=8*
8.29	*A(-2,5), R=5, a=7, b=1, D: x=8*	8.30	*A(12,4), R=7, a=3, b=5, D: y=-9*

Задание 9. Определить вид (название) поверхности второго порядка.

9.1	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$	9.2	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=z$
9.3	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$	9.4	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=-z$
9.5	$x^2+y^2+z^2=1$	9.6	$-\frac{z^2}{6}=4y$
9.7	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$	9.8	$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}=2y$
9.9	$x^2+z^2=4$	9.10	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{1}=1$
9.11	$-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=-1$	9.12	$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$
9.13	$x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$	9.14	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$
9.15	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=z$	9.16	$-x^2+y^2+z^2=-1$
9.17	$\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{4}=y$	9.18	$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{6}=1$
9.19	$x^2+y^2+z^2=16$	9.20	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$
9.21	$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=2z$	9.22	$-\frac{z^2}{6}=4y$
9.23	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{1}=1$	9.24	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$
9.25	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	9.26	$x^2+z^2=5$
9.27	$\frac{x^2}{3}=3z$	9.28	$x^2+z^2=4y$

9.29	$y^2+\frac{z^2}{9}=6x$	9.30	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$

Задание 10. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, построить эту кривую.

10.1	$-16-4x-64y-64=0$	10.2	$x^2+y^2+8x-12y+20=0$
10.3	$x^2-y^2-4y-4=0$	10.4	$-y^2+12x-2y-25=0$
10.5	$-3y^2+2x-12y+30=0$	10.6	$9x^2-16y^2-36x-64y-127=0$
10.7	$9x^2-y^2-18x-6y-10=0$	10.8	$-y^2+8x-2y-9=0$
10.9	$4y^2+8x+16y+30=0$	10.10	$5x^2+9y^2+30x+18y+9=0$
10.11	$x^2+y^2-2x+8y+9=0$	10.12	$y^2-8x+8y+32=0$
10.13	$x^2-4y^2-2x-24y-64=0$	10.14	$4x^2+8x+2y+30=0$
10.15	$4y^2+8x+12y+10=0$	10.16	$y^2+4x+8y+16=0$
10.17	$x^2+6x-2y+30=0$	10.18	$3x^2-4y^2+18x+20=0$
10.19	$9x^2+10y^2+40y-50=0$	10.20	$4y^2-2x+8y+28=0$
10.21	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	10.22	$x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
10.23	$x^2+6x-2y+5=0$	10.24	$4x^2+8x-6y+28=0$
10.25	$-5y^2+x+20y-6=0$	10.26	$x^2+2y^2-2x+8y+7=0$
10.27	$2x^2-2y^2+2x=0$	10.28	$x^2+8x-2y-16=0$
10.29	$9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$	10.30	$x^2+8x+2y+20=0$

Решение типового варианта

Задание 1. Дан определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad i=2,\ j=3.$$

Требуется найти:

а) минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23};

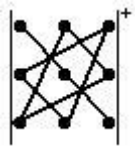
б) определитель по правилу треугольника (правилу Саррюса).

Решение: а) минор M_{ij} элемента a_{ij} равен определителю, полученному из данного после вычёркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца. Таким образом, вычёркиваем в нашем определителе вторую строку и третий столбец, получаем

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-1\cdot 4=11.$$

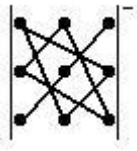
Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} вычисляем по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Значит, $A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -11$;

б) *1-ый способ* - правило треугольника: определитель третьего порядка равен сумме шести членов; члены со знаком плюс получают при перемножении по три элемента определителя, взятых по схеме



,

члены со знаком минус – по схеме



.

Поэтому

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-2) + 4\cdot 8\cdot 1 + 0\cdot 5\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 8\cdot 5 - 4\cdot 0\cdot(-1) = -98.$$

2-ой способ - формула разложения по третьему столбцу имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -98.$$

Задание 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) произведение матриц *AB* или *BC*, если возможно. Объяснить почему, если невозможно;

б) матрицу A^{-1}, обратную матрице *A*.

Решение: а) размерности данных матриц: $A_{3\times3}$, $B_{3\times2}$, $C_{2\times4}$. Произведение матриц возможно, если выполняется следующее соотношение:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=D_{m\times k}.$$

По условию задачи имеем $A_{3\times3}\cdot B_{3\times2}=D_{3\times2}$. Элемент d_{ij} матрицы D равен сумме произведений i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B:

$$\begin{pmatrix}3&0&2\\1&-1&3\\4&-1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-3\\-3&6\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+0\cdot(-3)+2\cdot1&3\cdot(-3)+0\cdot6+2\cdot7\\1\cdot4+(-1)\cdot(-3)+3\cdot1&1\cdot(-3)+(-1)\cdot6+3\cdot7\\4\cdot4+(-1)\cdot(-3)+6\cdot1&4\cdot(-3)+(-1)\cdot6+6\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&5\\10&12\\25&24\end{pmatrix}.$$

Аналогично, $B_{3\times2}\cdot C_{2\times4}=D_{3\times4}$, то есть

$$\begin{pmatrix}4&-3\\-3&6\\1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-7&1\\4&-1&3&-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot2+(-3)\cdot4&4\cdot3+(-3)\cdot(-1)&4\cdot(-7)+(-3)\cdot3&4\cdot1+(-3)\cdot(-6)\\(-3)\cdot2+6\cdot4&(-3)\cdot3+6\cdot(-1)&(-3)\cdot(-7)+6\cdot3&(-3)\cdot1+6\cdot(-6)\\1\cdot2+7\cdot4&1\cdot3+7\cdot(-1)&1\cdot(-7)+7\cdot3&1\cdot1+7\cdot(-6)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4&15&-37&22\\18&-15&39&-39\\30&-4&14&-41\end{pmatrix}$$

Произведение $B_{3\times2}\cdot A_{3\times3}$ невозможно, т.к. число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A;

б) если для квадратный матрицы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

ее $detA\neq0$, то существует обратная матрица A^{-1} такая, что

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Формула нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнения элемента a_{ij}.

Детерминант заданной матрицы равен

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения всех ее элементов

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Даны точки A, B: $A(-2,7,0)$, $B(-6,3,-1)$ и вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{b} = (-3,4,1)$, $\vec{c} = (9,-1,0)$. Требуется найти:

а) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{AB}\right|$, координаты середины отрезка AB;

б) скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, векторное произведение $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, смешанное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$;

в) объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение: а) если $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то $\vec{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Координаты середины отрезка AB вычисляются по формуле:

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

В нашем случае:

$$\vec{a} = \vec{AB} = ((-6) - (-2), 3 - 7, -1 - 0) = (-4, -4, -1);$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{33};$$

$$C\left(\frac{-2-6}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{0-1}{2}\right) = \left(-4{,}5, -\frac{1}{2}\right);$$

б) если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z =$$

$$= (-4)\cdot(-3) + (-4)\cdot 4 + (-1)\cdot 1 = 12 - 16 - 1 = -5.$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_t \\ b_x & b_y & b_t \end{vmatrix};$$

$$\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{i} + 9\vec{j} - 33\vec{k} = (1, 9, -33);$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \qquad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7;$$

в) объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, находим по формуле

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|.$$

Найдем $\vec{a} = (-4, -4, -1)$, тогда смешанное произведение будет равно определителю

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 4\cdot 0 + (-4)\cdot 1\cdot 9 + (-3)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 9 - (-1)\cdot 1\cdot(-4) -$$

$$-(-4)\cdot(-3)\cdot 0 = 0 - 36 - 3 + 36 - 4 - 0 = -7.$$

Итак, объем пирамиды будет равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot|-7| = \frac{1}{6}\cdot 7 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$$

Задание 4. Заданы точки $A_1(2,-1)$, $A_2(-3,2)$ и уравнение прямой $L_1 : x - 3y + 2 = 0$. Записать уравнение прямой:

а) $L_2 = (A_1, A_2)$-проходящей через эти точки;

б) L_2- в виде общего уравнения прямой;

в) L_2 - в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом и в параметрическом виде;

г) L_2 - в виде уравнения прямой в отрезках;

д) L_3 , проходящей через точку A_1 и перпендикулярную L_2.

Решение: а) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В нашем случае L_2 будет

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-(-1)}{2-(-1)},$$

$$L_2 : \frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3};$$

б) общий вид уравнения прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3},\ 3(x-2)=5(y+1),\ 3x-6=-5y-5,\ 3x+5y-1=0;$$

Уравнение прямой в параметрическом виде: $x=mt+x_0,\ y=nt+y_0$

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}\quad \frac{x-2}{-5}=t\quad \frac{y+1}{3}=t\quad x=-5t+2\quad y=3t-1.$$

г) уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, в нашем случае

$$3x+5y-1=0\quad 3x+5y=1\quad \frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{5}}=1;$$

д) уравнение прямой L_2 имеет: тогда $y=kx+b$, уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$, перпендикулярно данной прямой имеет вид:

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0).$$

В нашем случае $L_2: y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$, тогда

$$L_3: y-(-1)=-\frac{1}{-\frac{3}{5}}(x-2),\ y+1=\frac{5}{3}(x-2),$$

$$3y+3=5x-10,\quad 5x-3y-13=0.$$

Задание 5. Даны точки $A_1(1, 2, -1)$, $A_2(3, 3, 2)$, $A_3(2, -3, 7)$. Требуется:

а) составить уравнение плоскости $P_1=(A_1, A_2, A_3)$;

б) записать P_1 в виде общего уравнения плоскости;

в) записать P_1 в виде уравнения плоскости в отрезках;

г) записать P_1 в виде общего уравнения плоскости, проходящей через точку A_1;

д) составить каноническое уравнение прямой $L_1=(A_2, A_3)$;

е) записать параметрическое уравнение прямой L_1;

ж) составить уравнение прямой $L_1=(A_1, N)$, перпендикулярной плоскости P_1.

Решение: а) уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае P_1:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3-1 & 3-2 & 2+1 \\ 2-1 & -3-2 & 7+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0; \qquad (*)$$

б) раскрыв определитель в правой части равенства (*), получим уравнение плоскости P_1 в общем виде $Ax+By+Cz+D=0$:

$$23x - 13y - 11z - 8 = 0, \qquad (A=23,\ B=-13,\ C=-11,\ D=-8).$$

Геометрический смысл коэффициентов: A, B, C – это координаты нормального (перпендикулярного) вектора плоскости, то есть это вектор $\overline{N} = (23,-13,-11) \perp P_1$;

в) перенесём в общем уравнении плоскости свободный член –8 в правую часть и разделим обе части на 8. Получим уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{8/23} + \frac{y}{-8/13} + \frac{z}{-8/11} = 1,$$

где $a=8/23$, $b=-8/13$, $c=-8/11$ – это величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, считая от начала координат;

г) раскроем определитель в левой части равенства (*) по элементам первой строки:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \quad 23(x-1)-13(y-2)-11(z+1)=0.$$

Получили уравнение плоскости в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \ (x_0=1, y_0=2, z_0=-1);$$

д) каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), находится по формуле

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Значит, уравнение прямой L_1 имеет вид

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-3}{-3-3} = \frac{z-2}{7-2} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{5};$$

е) каноническим называется уравнение прямой вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $\bar{a}(m,n,p)$ – ее направляющий вектор.

В предыдущем пункте уже найдены канонические уравнения прямых.

Параметрическими называются уравнения прямой вида

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}.$$

Чтобы получить параметрические уравнения прямой, приравняем канонические уравнения к параметру *t* и из полученных равенств найдём *x,y,z:*

$$L_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{5}, \qquad t\to\begin{cases} \frac{x-3}{-1}=t\to x=-t+3, \\ \frac{y-3}{-6}=t\to y=-6t+3, \\ \frac{z-2}{5}=t\to z=5t+2. \end{cases}$$

Итак, параметрическое уравнение прямой L_1 имеет вид:

$$\begin{cases} x=-t+3, \\ y=-6t+32 \\ z=5t+2; \end{cases}$$

ж) так как $(A_1N)\perp P_1$, то вектор $\overline{N}=(23,-13,-11)\perp P_1$ является направляющим вектором прямой $L_2=(A_1N)$, тогда каноническое уравнение прямой $L_2=(A_1N)$ имеет вид:

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{-13}=\frac{z+1}{11}.$$

Задание 6. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ -3x+4y=3 \end{cases}$$

а) методом Крамера;

б) матричным методом (с помощью обратной матрицы).

Решение. а) решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

по правилу Крамера имеет вид

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - определитель системы;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ - вспомогательные определители, полученные из определителя системы заменой первого и второго столбцов столбцом свободных членов.

В нашем случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Таким образом, x=-1/5, y=3/5. Ответ можно записать в виде вектора:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix};$$

б) в матричном виде решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

записывается в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - матрица–столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов;

A^{-1} - матрица, обратная для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу (см. пример 2б) для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель системы $|A| = \Delta = 10 \neq 0$, то обратная матрица существует и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

или ответ в обычном виде: x=-1/5, y=3/5.

Задание 7. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ 2x - 3y + 4z = 2, \\ 3x - 3y - z = -7. \end{cases}$$

Требуется:

а) проверить совместность системы методом Гаусса;

б) найти ранг матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы;

в) решить систему, если она совместна.

Решение. а) метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы с помощью элементарных преобразований и приведении её к ступенчатому (треугольному) виду расширенной матрицы системы. Матрица коэффициентов системы есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

расширенная матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A содержится в матрице $\overline{A}$, то достаточно производить элементарные преобразования только над строками матрицы $\overline{A}$: умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на -3 и прибавим к третьей. Получим, что матрица $\overline{A}$, а вместе с ней и матрица A, приводится к ступенчатой матрице, имеющей три ненулевые строки:

$$\overline{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

По теореме Кронекера-Капелли

- система совместна (т.е. имеет хотя бы одно решение), если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы $r_A = r_{\overline{A}}$;

- система не совместна (т.е. не имеет решений), если $r_A \neq r_{\overline{A}}$;

б) далее, по количеству ненулевых строк в ступенчатых матрицах определяются ранги матриц $A, \overline{A}$. Значит, $r_A = r_{\overline{A}} = 3$ и система совместна. Так как число неизвестных n равно 3 и равен рангу матрицы системы ($n=r$), то система имеет одно решение;

в) таким образом, данная система сводится к системе, соответствующей последней матрице:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ -2y - 6z = -4, \\ -16z = -16. \end{cases}$$

Поднимаясь по этой системе снизу вверх, найдём из последнего уравнения $x_3 = 1$; из предпоследнего $-x_2 = -4 + 6 \cdot 1 = 2$, $x_2 = -2$; из первого $x_1 = 3 + (-2) - 5 \cdot 1 = -4$. Ответ: (-4; -2; 1).

Задание 8. Даны точка $A(3, -7)$; радиус окружности $R=6$; $a = 2$; $b = 3$ – полуоси кривых; *D:* $y=-3$ – уравнение прямой. Требуется:

а) записать уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R;

б) записать каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=2$ и $b=3$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет;

в) записать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью $a=2$ и мнимой $b=3$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения ассимптот;

г) записать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и если *D:* $y=-3$ ее директриса. Найти координаты его фокуса, эксцентриситет;

д) сделать чертеж эллипса, гиперболы, параболы.

Решение. а) уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) радиуса R имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

Значит, в нашем варианте:

$$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 36;$$

б) каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Значит, в нашем варианте:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Фокусы эллипса – это точки $F_1(-c,0),\ F_2=(c,0)$:

- если $a>b$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и эксцентриситет ε эллипса равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$;
- если $b>a$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и $F_1(0,-c),F_2=(0,c)$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Итак, в нашем варианте, поскольку $b>a$, то

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5},$$

эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $(\varepsilon<1)$. Фокусы лежат на оси *Oy*: $F_1(0,-\sqrt{5}),F_2=(0,\sqrt{5})$. Изобразим эллипс на координатной плоскости (рисунок 1), где A_1,A_2,B_1,B_2 - вершины эллипса;

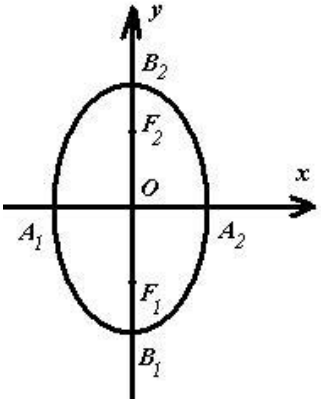


Рисунок 1

в) каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью *a*, мнимой полуосью *b* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

с действительной полуосью *b* и мнимой полуосью *a*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Для гиперболы с действительной полуосью *a*, эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$; уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\frac{b}{a}x$; фокусы – это точки $F_1(-c.0),F_2=(c,0)$, расположенные на действительной оси.

По условию *a*=2, *b*=3, поэтому каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью *a* будет

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Для неё полуфокусное расстояние $c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2},(\varepsilon\succ 1)$, фокусы: $F_1(-\sqrt{13}.0), F_2=(\sqrt{13},0)$; уравнения асимптот: $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Гиперболу легко построить следующим образом: строим прямоугольник со сторонами $x=\pm a, y=\pm b$ (у нас $x=\pm 2, y=\pm 3$). Диагонали прямоугольника являются асимптотами гиперболы, точки пересечения сторон прямоугольника с действительной осью гиперболы – вершинами гиперболы (рисунок 2);

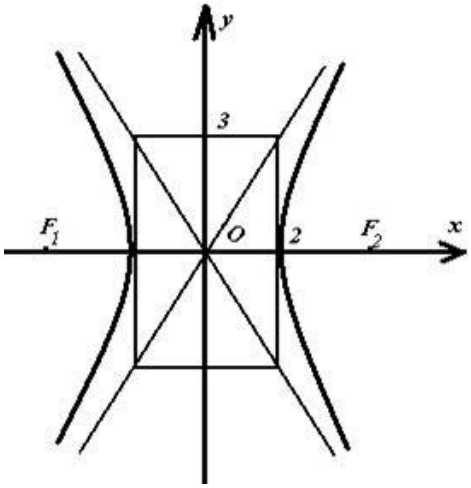


Рисунок 2

г) по условию, если директриса параболы $y=-\frac{p}{2}$, то осью симметрии параболы с вершиной в начале координат является ось *Ox*. Значит, её каноническое уравнение имеет вид $x^2=2py$.

Если директриса параболы $x=-\frac{p}{2}$, то осью симметрии параболы с вершиной в начале координат является ось *Oy*. Значит, её каноническое уравнение имеет вид $y^2=2px$.

Так как директриса параболы имеет уравнение *y*=-3, то $-\frac{p}{2}=-3\Rightarrow p=6.$ Тогда уравнение параболы имеет вид: $x^2=2\cdot 6\cdot y\rightarrow x^2=12y$. Фокус параболы – это точка $F(0,\frac{p}{2})$, лежащая на оси симметрии. В нашем случае фокус - $F(0,3)$. Построим параболу (рисунок 3);

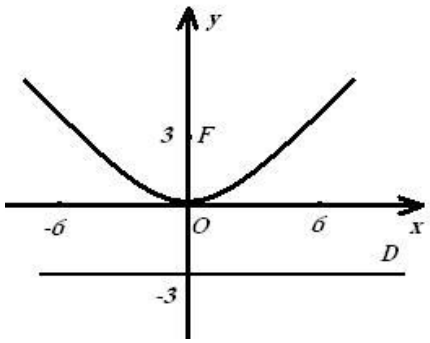


Рисунок 3

Задание 9. Определить вид (название) поверхности второго порядка и сделать схематический чертёж:

а) $-\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1;$

б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Решение. а) $-\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ - это каноническое уравнение однополостного гиперболоида с осью симметрии *Ox*. Его схематический чертёж (рисунок 4);

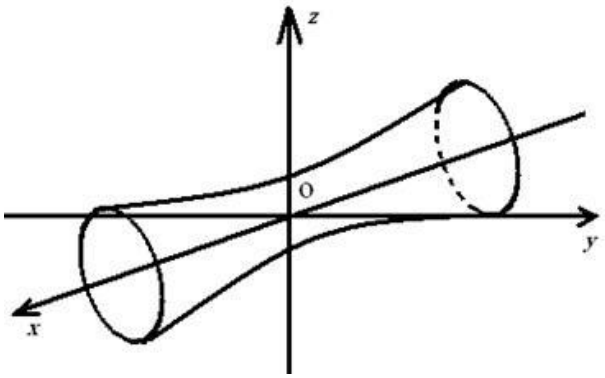


Рисунок 4

б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$ - это каноническое уравнение конуса второго порядка с осью симметрии *Oz* и вершиной в начале координат. Его схематический чертёж (рисунок 5);

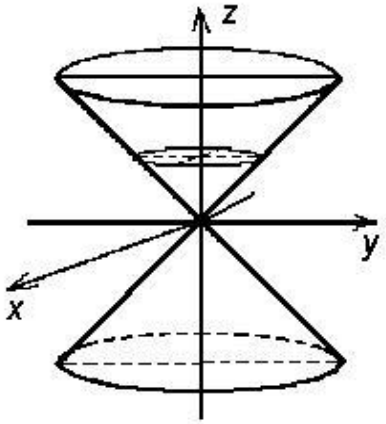


Рисунок 5

Задание 10. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $9x^2-16y^2-18x-64y-19=0$ и построить эту кривую.

Решение. Уравнения вида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0),$$

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые имеют центр симмметрии (эллипса и гиперболы) или вершину параболы в точке $\tilde{N}(y_0,x_0)$. Для этого применим метод выделения полных квадратов:

$$(9x^2-18x)+(-16y^2-64y)-19=0\rightarrow 9(x^2-2x)-16(y^2+4y)-19=0.$$

Дополним члены, содержащие *x*, и члены, содержащие *y*, до полных квадратов

$$9(x^2-2x+1-1)-16(y^2+4y+4-4)-19=0,$$

$$9(x^2-2x+1)-16(y^2+4y+4)-19-9\cdot1-16\cdot(-4)=0,$$

$$9(x+1)^2-16(y+2)^2=-36,$$

$$\frac{(x+1)^2}{-36/9}+\frac{(y+2)^2}{36/16}=1,\qquad -\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9/4}=1,$$

то есть имеем гиперболу, с центром в точке *C*(-1;-2), действительной полуосью *b*=3/2 (по оси *Oy*) и мнимой полуосью *a*=2. Построим схематический чертёж (рисунок 6).

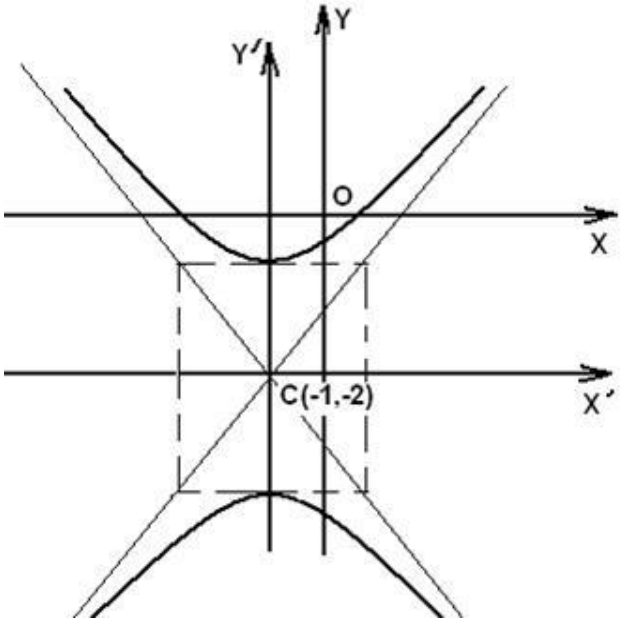


Рисунок 6

Расчетно-графическая работа №2. Модуль 2. Элементы математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Расчётные задания

Задание 1. Найти пределы функции, если предельная точка *a* принимает два значения а) и б).

№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	а) $a=$	б) $a=$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	а) $a=$	б) $a=$
1.1	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-7x+10}$	2	-3	1.2	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-9x-8}{x^2-6x-16}$	8	0
1.3	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-2x-2}{x^2+5x+4}$	-1	2	1.4	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}$	-1	2
1.5	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-5}{4x^2+3x-1}$	-5	3	1.6	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$	-2	3
1.7	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-4x-5}$	-1	4	1.8	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-12x+32}{x^2-5x-24}$	8	1
1.9	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-13x+4}{2x^2-3x-20}$	4	-1	1.10	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-7x-6}{x^2-2x-24}$	-6	2
1.11	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$	2	1	1.12	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$	4	3

1.13	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$	-2	3	1.14	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+11x+24}{x^2-2x-15}$	-3	1
1.15	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-5x-24}$	8	-1	1.16	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-14x-5}$	5	-1
1.17	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-x-14}$	7	0	1.18	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+x-6}{4x^2+13x+3}$	-3	2
1.19	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-20}$	4	1	1.20	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}$	3	-1
1.21	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-12}$	3	2	1.22	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+8x-9}{x^2+6x-27}$	-9	2
1.23	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+x-20}{x^2+8x+5}$	-5	1	1.24	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}$	-3	4
1.25	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+11x+28}$	-7	3	1.26	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-11x+18}$	9	-1
1.27	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+5x-6}$	-6	1	1.28	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-2x-24}$	-4	1
1.29	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-x-6}$	-2	4	1.30	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$	1	5

Задание 2. Найти пределы (неопределенность вида вида $\dfrac{0}{0}$ необходимо раскрыть двумя способами: преобразованием и используя правило Лопиталя).

№	а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
2.1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x^3+x-4}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6-8x^2+7}{x^4-3x^2+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-9}{2x^3+3x+2}$
2.2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-18}{8x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^6-9x^2+1}{7x^4-3x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-9}{6x^3+6x+7}$
2.3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{x^4-2x+7}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-7x^2+2}{3x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-9}{2x^3+6x-3}$
2.4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-18}{8x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^6-2x^2-1}{x^4-3x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+8x-1}{7x^3+2x+7}$
2.5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{x^4-2x+7}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-8x^2+2}{6x^4-5x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-1}{9x^3+2x+5}$
2.6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x^2-17}{5x^3+11x^2+8}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6-7x^2+2}{x^4-4x^2+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x-9}{7x^3+2x-6}$

2.7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4+2x+8}{4x^2+x+9}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{5x^3-x^2+2}$
2.8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{8x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7-7x-2}{2x^2-5x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{x^5-2x+8}$
2.9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+7}{5x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x^2+5}{x^5-x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^3-2}{x^2+4x-4}$
2.10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-x-6}{3x^2+4x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{x^9+x^7-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{5x^2+6x-1}$
2.11	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-9}{x^2+6x+7}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^3+4}{5x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-12}{5x^3-2x-3}$
2.12	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{7x^2-x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x-3}{x^2-4x+9}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-13x^2+4}{2x^2-3x-7}$
2.13	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+8}{4x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+4x-5}{4x^2+3x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{4x^6+5x+3}$
2.14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{9x^2-2x+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-2x-1}{5x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{9x^6-4x-1}$
2.15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-7x-2}{2x^2-5x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-4}{8x^5-3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+3x^2+2}{9x^3-2x-5}$
2.16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2+4x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x-2}{3x^2+6x-5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2+x-4}$
2.17	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x^2+3}{x^3-x-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-8}{2x^2+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{3x^3-2x+7}$
2.18	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+2x-3}{5x^2+6x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^8+6x^2-7}{5x^3+11x^2+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^5-2x+5}$
2.19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-4}{2x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+7}{3x^8-x-2}$
2.20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-x-8}{x^2-6x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9-x-6}{3x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x-8}{x^2-6x-1}$
2.21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^3+4}{5x^4+x-6}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-x^2+2}{x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-9}{7x^3+6x+7}$
2.22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+9}{3x^2-4x-15}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6-5x^2+1}{x^4-7x^2-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{8x^3+3x+7}$
2.23	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-5}{7x^2+5x+1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^6-7x^2+2}{x^4-9x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+x-5}{2x^3+6x+1}$
2.24	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-15}{4x^2+3x-21}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^6-2x^2+1}{x^4-5x^2-7}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{7x^3+2x+9}$

2.25	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^4-x^2+2}{x^4-5x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^6-3x^2+7}{x^4-9x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-1}{7x^3+3x+5}$
2.26	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-16}{4x^2+5x+23}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^6-x^2+7}{x^4-6x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-9}{7x^3+x+4}$
2.27	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{5x^2-4x+9}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6-x^2+5}{6x^4-x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-7}{7x^3+5x+1}$
2.28	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-13x^2+4}{2x^4-3x^2-27}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^6-x^2+4}{x^4-3x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-2}{x^3+7x+5}$
2.29	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-12}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^6-2x^2+7}{3x^4-5x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{x^3+6x+7}$
2.30	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-12}{8x^2+6x-5}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^6-2x^2+1}{x^4-7x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x-1}{7x^3+6x+5}$

Задание 3. Найти пределы.

3.1	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$	3.2	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x}{\sin x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$
3.3	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$	3.4	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{tgx},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$
3.5	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x}{x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{3}{x}}$	3.6	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg3x}{4x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$
3.7	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x}{\sin3x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{7}{x}}$	3.8	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1-9x)^{\frac{2}{x}}$
3.9	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos4x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{3x}$	3.10	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{x^2},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$
3.11	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$	3.12	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{tg5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{9x}$
3.13	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{\sin5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{7x}$	3.14	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{tgx},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$
3.15	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{tg9x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{6}}$	3.16	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg8x}{3x},\ б)\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{x}}$
3.17	$а)\lim\limits_{x\to0}xctg7x,\ б)\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{11}{2}x\right)^{\frac{2}{x}}$	3.18	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x}{\sin3x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1-8x)^{\frac{7}{x}}$
3.19	$а)\lim\limits_{x\to0}\sin5xctg3x,\ б)\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{7x}$	3.20	$а)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{9x},\ б)\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

3.21	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 9x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{2}{x}}$	3.22	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg7x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{5}x\right)^{\frac{2}{x}}$
3.23	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{9}{x}}$	3.24	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg9x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$
3.25	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x},\ б)\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{7}{x}}$	3.26	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{5x}{2}}$
3.27	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{7x}$	3.28	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{7x}$
3.29	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{tg9x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$	3.30	$а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg3x},\ б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{2x}$

Задание 4. Найти пределы.

№	а)	б)	№	а)	б)
4.1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{5-2x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-4}{6x+1}\right)^{x}$	4.2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-4}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3x-4}\right)^{2+x}$
4.3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x-1}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)^{x-1}$	4.4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{3+5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x+8}\right)^{3+x}$
4.5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{3x+4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{9x}\right)^{x+4}$	4.6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x+5}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{4x+5}\right)^{2x-1}$
4.7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x-5}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{7x-2}\right)^{x-5}$	4.8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{7+x}\right)^{-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+4x}{7+x}\right)^{x}$
4.9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x}\right)^{-8x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+7}{8x+1}\right)^{x}$	4.10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+5}\right)^{x+5}$
4.11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-8}\right)^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-8}\right)^{x-1}$	4.12	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+7}\right)^{x}$
4.13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-1}\right)^{x+8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{5x-1}\right)^{x+8}$	4.14	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+6}\right)^{4x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{5x+6}\right)^{x-3}$
4.15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-4x}{5-4x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{3x+9}\right)^{x+5}$	4.16	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-2}{x+5}\right)^{x+1}$
4.17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x}{7x-1}\right)^{3-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-8}\right)^{x-1}$	4.18	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x}{6x-1}\right)^{2-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{5x+6}\right)^{x-3}$
4.19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-2}{7x+3}\right)^{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{8x-1}\right)^{5+x}$	4.20	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x}\right)^{4x+5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{6x+1}\right)^{x-1}$

4.21	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{5-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+6x}{4+x}\right)^{x+5}$	4.22	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+3}\right)^{7x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+6}\right)^{3x-1}$
4.23	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-1}{9x+2}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{8x+2}\right)^{x+2}$	4.24	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x}\right)^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{5x+1}\right)^{x}$
4.25	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x+2}\right)^{x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+5x}{8+x}\right)^{1+x}$	4.26	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{5x+2}\right)^{x}$
4.27	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x}\right)^{-4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{7x+1}\right)^{1+x}$	4.28	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-2x}{3-2x}\right)^{3x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+6x}{3+5x}\right)^{5+x}$
4.29	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-2x}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9+x}{3+2x}\right)^{x+1}$	4.30	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{8+x}\right)^{1-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{5x+1}\right)^{x}$

Задание 5. Найти пределы.

№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	№	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
5.1	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	5.2	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	5.3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
5.4	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	5.5	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$	5.6	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
5.7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	5.8	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	5.9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$
5.10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	5.11	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	5.12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$
5.13	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	5.14	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$	5.15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
5.16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$	5.17	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{5+3x}}$	5.18	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$
5.19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$	5.20	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{6+x}}{2x^2-7x-15}$	5.21	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$
5.22	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$	5.23	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{6-x}-\sqrt{3-2x}}$	5.24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

5.25	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	5.26	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	5.27	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-3x-10}$
5.28	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	5.29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{7}\ x}$	5.30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

Задание 6. Для данных функций $f(x)$ и $g(x)$ найти:
а) точку разрыва;
б) левый и правый пределы в точке разрыва;
в) определить характер точки разрыва.

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
6.1	$5^{\frac{1}{x-2}}$	$\dfrac{3}{x+8}$	6.2	$4^{\frac{1}{x-3}}$	$\dfrac{1}{5+x}$
6.3	$7^{\frac{1}{x+5}}$	$\dfrac{6}{1-x}$	6.4	$6^{\frac{1}{2+x}}$	$\dfrac{8}{2-x}$
6.5	$9^{\frac{1}{x-1}}$	$\dfrac{7}{x-9}$	6.6	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\dfrac{5}{x+4}$
6.7	$4^{\frac{1}{2-x}}$	$\dfrac{3}{7-x}$	6.8	$4^{\frac{1}{x-7}}$	$\dfrac{1}{5+x}$
6.9	$7^{\frac{1}{x-2}}$	$\dfrac{3}{5+x}$	6.10	$9^{\frac{1}{7-x}}$	$\dfrac{3}{x-6}$
6.11	$3^{\frac{1}{4+x}}$	$\dfrac{3}{x+14}$	6.12	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\dfrac{3}{x+2}$
6.13	$9^{\frac{1}{1-x}}$	$\dfrac{1}{2-x}$	6.14	$3^{\frac{1}{2-x}}$	$\dfrac{1}{11-x}$
6.15	$7^{\frac{1}{8-x}}$	$\dfrac{2}{x+10}$	6.16	$4^{\frac{1}{3+x}}$	$\dfrac{2}{x+7}$
6.17	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\dfrac{5}{x+12}$	6.18	$8^{\frac{1}{3-x}}$	$\dfrac{5}{x+9}$
6.19	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\dfrac{3}{9-x}$	6.20	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\dfrac{1}{1-x}$
6.21	$3^{\frac{1}{2+x}}$	$\dfrac{7}{x+6}$	6.22	$7^{\frac{1}{4-x}}$	$\dfrac{1}{9-x}$
6.23	$4^{\frac{1}{5-x}}$	$\dfrac{2}{x+7}$	6.24	$2^{\frac{1}{7+x}}$	$\dfrac{8}{x+6}$
6.25	$5^{\frac{1}{2+x}}$	$\dfrac{2}{x+7}$	6.26	$8^{\frac{1}{2-x}}$	$\dfrac{9}{3-x}$

6.27	$2^{\frac{1}{x+9}}$	$\frac{6}{x+8}$	6.28	$3^{\frac{1}{2-x}}$	$\frac{7}{2-x}$
6.29	$7^{\frac{1}{6-x}}$	$\frac{1}{7-x}$	6.30	$9^{\frac{1}{5-x}}$	$\frac{3}{x+1}$

Задание 7. Найти производные заданной функции.

7.1	$y=2x^2-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$	7.16	$y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$
7.2	$y=\frac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\frac{2}{x^2}$	7.17	$y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$
7.3	$y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$	7.18	$y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$
7.4	$y=7\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-3x^3+\frac{4}{x}$	7.19	$y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3$
7.5	$y=7x+\frac{5}{x^2}+\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$	7.20	$y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$
7.6	$y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$	7.21	$y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}$
7.7	$y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^5}$	7.22	$y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$
7.8	$y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^6}$	7.23	$y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$
7.9	$y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}$	7.24	$y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$
7.10	$y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$	7.25	$y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$
7.11	$y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$	7.26	$y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x$
7.12	$y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$	7.27	$y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$
7.13	$y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$	7.28	$y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$
7.14	$y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4$	7.29	$y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$
7.15	$y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$	7.30	$y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$

Задание 8. Найти производные сложной функции.

8.1	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}$	8.16	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\frac{3}{7x^3-x^2-4}$
8.2	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$	8.17	$y=\frac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}.$
8.3	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\frac{5}{2x^2+4x-1}$	8.18	$y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{8}{6x^6+3x-7}$
8.4	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}$	8.19	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\frac{3}{(x-3)^4}$
8.5	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\frac{3}{(x-5)^4}$	8.20	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\frac{5}{(x+1)^3}$
8.6	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\frac{4}{(x+2)^3}$	8.21	$y=\sqrt[4]{5x^3-4x+1}-\frac{7}{(x-5)^2}$
8.7	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\frac{5}{4x^2+3x-5}$	8.22	$y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{4}{(x-7)^5}$
8.8	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\frac{2}{2x^2-3x+7}$	8.23	$y=\sqrt{(x-3)^7}+\frac{9}{7x^2-5x-8}$
8.9	$y=\frac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	8.24	$y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\frac{2}{1+3x-4x^2}$
8.10	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{3}{(x-3)^5}$	8.25	$y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$
8.11	$y=\frac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	8.26	$y=\frac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$
8.12	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^4}$	8.27	$y=\frac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$
8.13	$y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\frac{8}{(x-5)^2}$	8.28	$y=\sqrt{(x-4)^7}-\frac{10}{3x^2-5x+1}$
8.14	$y=\frac{3}{(x+2)^4}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	8.29	$y=\frac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$
8.15	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$	8.30	$y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\frac{5}{2x^2-4x+7}$

Задание 9. Найти производные сложной функции.

9.1	$y=ch^2 5x\cdot arctg\sqrt{x}$	9.16	$y=\sqrt[3]{x-4}\cdot\arcsin^4 5x$
9.2	$y=sh^4 5x\cdot\arccos 3x^2$	9.17	$y=\sqrt{(x+3)^5}\cdot\arcsin 2x^3$
9.3	$y=th^4 x\cdot arcctgx^3$	9.18	$y=tg^3 x\cdot arcctg3x$

9.4	$y = ch^2 5x \cdot arctgx^4$	9.19	$y = \sqrt[4]{(x+4)^2} \cdot \arcsin 7x^2$
9.5	$y = cth4x^5 \cdot \arccos 2x$	9.20	$y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin 2x$
9.6	$y = th^4 3x \cdot arcctg\sqrt{x}$	9.21	$y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4$
9.7	$y = cth^2 4x \cdot \arcsin x^3$	9.22	$y = (x+6)^6 \cdot arcctg3x^5$
9.8	$y = cth^4 2x \cdot arctgx^3$	9.23	$y = \sqrt[3]{x-4} \cdot \arcsin^4 5x$
9.9	$y = ch^3 9x \cdot \arcsin(5x-1)$	9.24	$y = \sqrt{(x+3)^5} \cdot \arcsin 2x^3$
9.10	$y = cth^3 4x \cdot \arcsin(3x+1)$	9.25	$y = tg^3 x \cdot arcctg3x$
9.11	$y = \sqrt[4]{(x+4)^2} \cdot \arcsin 7x^2$	9.26	$y = 2^{-x^2} \cdot arctg\,7x^4$
9.12	$y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin 2x$	9.27	$y = 3^{\cos x} \cdot \ln(x^3 - 3x + 7)$
9.13	$y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4$	9.28	$y = \arccos x^2 \cdot ctg7x^4$
9.14	$y = (x+6)^6 \cdot arcctg3x^5$	9.29	$y = (x+2)^2 \cdot \arccos 3x^4$
9.15	$y = th^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$	9.30	$y = \log_2(x-4) \cdot arctg^3 4x$

Задание 10. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

10.1	$y = \sin^2 x,\ x_0 = \pi/2$	10.16	$y = arctgx,\ x_0 = 1$
10.2	$y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0$	10.17	$y = e^x \cdot \cos x,\ x_0 = 0$
10.3	$y = e^x \cdot \sin 2x,\ x_0 = 0$	10.18	$y = e^{-x} \cdot \cos x,\ x_0 = 0$
10.4	$y = \sin 2x,\ x_0 = \pi$	10.19	$y = (2x+1)^5,\ x_0 = 1$
10.5	$y = \ln(1+x),\ x_0 = 2$	10.20	$y = x^2 \cdot e^x/2,\ x_0 = 0$
10.6	$y = \arcsin x,\ x_0 = 0$	10.21	$y = (5x-4)^5,\ x_0 = 2$
10.7	$y = x \cdot \sin x,\ x_0 = \pi/2$	10.22	$y = x^2 \cdot \ln x,\ x_0 = 1/3$
10.8	$y = x \cdot \sin 2x,\ x_0 = -\pi/4$	10.23	$y = x \cdot \cos 2x,\ x_0 = \pi/12$
10.9	$y = x^4 \cdot \ln x,\ x_0 = 1$	10.24	$y = x + arctgx,\ x_0 = 1$
10.10	$y = \cos^2 x,\ x_0 = \pi/4$	10.25	$y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3$
10.11	$y = x^2 \cdot \cos x,\ x_0 = \pi/2$	10.26	$y = x \cdot \arccos x,\ x_0 = \sqrt{3}/2$
10.12	$y = (x+1)\ln(1+x),\ x_0 = -1/2$	10.27	$y = \ln^3 x,\ x_0 = 1$
10.13	$y = 2^{x^2},\ x_0 = 1$	10.28	$y = (4x-3)^5,\ x_0 = 1$
10.14	$y = x \cdot arctgx,\ x_0 = 2$	10.29	$y = (7x-4)^6,\ x_0 = 1$
10.15	$y = x \cdot \sin 2x,\ x_0 = \pi/4$	10.30	$y = \sin(x^3 + \pi),\ x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

Задание 11. Провести исследование функции и построить ее график. Найти:

1) область определения функции;
2) четность, нечетность функции;
3) точки пересечения с осями координат;
4) асимптоты графика функции;
5) интервалы монотонности и экстремумы заданной функции;
6) интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

11.1	$y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$	11.16	$y=\ln(x^2+1)$
11.2	$y=e^{1/(5+x)}$	11.17	$y=\frac{x^2+6}{x^2+1}$
11.3	$y=\frac{4x-x^2-4}{x}$	11.18	$y=x\ln x$
11.4	$y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	11.19	$y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$
11.5	$y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$	11.20	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$
11.6	$y=\frac{x}{9-x}$	11.21	$y=\frac{x^5}{x^4-1}$
11.7	$y=\frac{x^2}{4x^2-1}$	11.22	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$
11.8	$y=x+\frac{\ln x}{x}$	11.23	$y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$
11.9	$y=x-\ln(1+x^2)$	11.24	$y=\frac{x^3}{x^4-1}$
11.10	$y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$	11.25	$y=(e^{2x}+1)/e^x$
11.11	$y=x^2-2\ln x$	11.26	$y=x^2+\frac{1}{x^2}$
11.12	$y=x^3e^{-x^2/2}$	11.27	$y=(5x^4+3)/x$
11.13	$y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$	11.28	$y=\frac{4-2x}{1-x^2}$
11.14	$y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$	11.29	$y=\frac{5x}{4-x^2}$
11.15	$y=-\ln\frac{1+x}{1-x}$	11.30	$y=\frac{\ln x}{x}$

Решение типового варианта

При вычислении пределов, прежде всего, следует подставить предельную точку в функцию вместо переменной. Если получено вполне определённое значение (константа или бесконечность), то это значение является ответом.

Возможные виды определённостей:

$$\frac{0}{a}=0;\qquad \frac{a}{0}=\infty;\qquad \frac{a}{\infty}=0;\qquad \frac{\infty}{a}=\infty;$$

$$a\cdot 0=0;\qquad a\cdot\infty=\infty;$$

$$a^{\infty}_{(a>1)}=\infty;\qquad a^{\infty}_{(a<1)}=0;\qquad a^{0}=1.$$

Если в результате подстановки получена одна из неопределённостей (возможны семь видов неопределённостей: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}), то, говорят, следует раскрыть неопределённость, т.е. вычислить предел, используя различные методы, приведенные в таблице 1.

Рассмотрим эти методы на примерах.

Задание 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}$ при

а) a=2;

б) a=5.

Решение: а) подставим предельную точку a=2 в данную функцию вместо x, получим сразу ответ:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\left|\frac{2^2-6\cdot 2+5}{3\cdot 2^2-14\cdot 2-5}\right|=\frac{-3}{-21}=\frac{1}{7};$$

б) при подстановке a = 5 получим неопределённость вида $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\left|\frac{5^2-6\cdot 5+5}{3\cdot 5^2-14\cdot 5-5}=\frac{0}{0}\right|,$$

которую можно раскрыть, применяя один из двух методов:

1) разложить числитель и знаменатель дроби на множители, а затем сократить дробь на общий множитель:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)}{3(x-5)(x+1/3)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{3x+1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4};$$

2) применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

По этому правилу имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-6}{6x-14}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

Задание 2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-12x+7}{5x^2+4x-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x+7}{x^3-3x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{4x^2-8x^4+1}$.

Решение: при вычислении данных пределов после подстановки ∞ получается неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для её раскрытия применяем правило 1 таблицы 1.

а) числитель и знаменатель имеют одинаковые степени ($m=n=2$), поэтому предел равен отношению коэффициентов старших степеней:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-12x+7}{5x^2+4x-8}=\frac{2}{5};$$

б) степень числителя больше степени знаменателя: $m=5,\ n=3,\ m>n$, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x+7}{x^3-3x^2-4}=\infty;$$

в) степень знаменателя больше степени числителя: $m=2,\ n=4,\ n>m$, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{4x^2-8x^4+1}=0.$$

Задание 3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 9x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{4x}$.

Решение. а) данная функция не определена в предельной точке и в этой точке представляет неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия неопределённости можно применить различные способы: первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и его следствия, сравнение бесконечно малых (таблица эквивалентных бесконечно малых) и теоремы об эквивалентных бесконечно малых. Используя следствие из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m,$$

имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin 9x)/7x}=\frac{1}{9/7}=\frac{7}{9}.$$

Второй способ: сравнение бесконечно малых

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)\quad(\alpha(x)\to 0),$$

тогда имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{9}=\frac{7}{9};$$

б) можно убедиться, что при указанном изменении аргумента функция представляет неопределённость вида 1^{∞}, при раскрытии которой применяется второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

или его следствие

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

или сравнение бесконечно малых и теоремы об эквивалентных бесконечно малых. Преобразуем данный предел следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-8}{x}\right)^{\frac{x}{-8}}\right]^{\frac{-8}{x}4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{x}4x}=e^{-32}.$$

Задание 4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+7}\right)^{x-3}$.

Решение: а) при подстановке ∞ получим неопределённость вида 1^{∞}, которую можно раскрыть, применяя, например, следующие методы:

1) первый метод – это приведение данного предела к форме второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

или его обобщенной форме

$$\lim_{N(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{N(x)}\right)^{N(x)}=e:$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4+1}{3x+4}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4}\right]^{\frac{7x}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{3x+4}}=e^{\frac{7}{3}}.$$

2) второй метод – это использование формулы, которую часто применяют для раскрытия неопределённостей вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}:

$$\lim_{x\to a(\infty)}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

По этой формуле

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}7x\cdot\ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}7x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)}=$$

(используем теорему о замене бесконечно малой функции эквивалентной ей бесконечно малой: $\ln(1+\dfrac{1}{3x+4})\approx\dfrac{1}{3x+4}$ при $x\to\infty$)

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{3x+4}}=e^{\frac{7}{3}}.$$

Приведённую выше формулу можно не помнить, но использовать приём, который привёл к этой формуле: положим

$$y=\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x},$$

прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y = 7x \ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)$$

и найдём

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} 7x \ln\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right) = \frac{7}{3}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \frac{7}{3},$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x} = e^{\frac{7}{3}};$$

б) для вычисления предела предварительно сделаем алгебраические преобразования

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{x} \cdot \left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^{-3} = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right| = 0 \cdot 8 = 0.$$

Задание 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6}$.

Решение: при подстановке предельного значения получается неопределённость вида $\frac{0}{0}$, которую в данном случае лучше раскрыть, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю. Одновременно знаменатель следует разложить на множители и затем сократить дробь на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{4x+1})(3+\sqrt{4x+1})}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{9-4x-1}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-4(x-2)}{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{4x+1})} = \lim_{x\to 2} \frac{-4}{(x+3)(3+\sqrt{4x+1})} = -\frac{4}{5\cdot 6} = -\frac{2}{15}.$$

Если применить правило Лопиталя, то получится тот же результат:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{-\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}}{2x+1} = -\frac{2}{15}.$$

Задание 6. Для функций $f(x)=5^{\frac{3}{x+2}}$ и $g(x)=\dfrac{x+4}{x-6}$ найти:

а) точку разрыва;

б) левый и правый пределы в точке разрыва;

в) определить характер точки разрыва.

Решение: рассмотрим функцию $f(x)=5^{\frac{3}{x+2}}$.

а) точка $x = -2$ не входит в область определения этой функции, но функция определена в её окрестности, значит, $x = -2$ точка разрыва;

б) $f(-2-0)=\lim\limits_{x\to -2-0} 5^{\frac{3}{x+2}}=\left|5^{\frac{3}{-0}}=5^{-\infty}\right|=0,$

$f(-2+0)=\lim\limits_{x\to -2+0} 5^{\frac{3}{x+2}}=\left|5^{\frac{3}{+0}}=5^{+\infty}\right|=\infty;$

в) так как один из односторонних пределов $f(-2+0)=\infty$, то $x = -2$ точка разрыва второго рода.

Рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{x+4}{x-6}$:

а) точка x=6 не входит в область определения этой функции, но функция определена в её окрестности, значит, $x = 6$ точка разрыва;

б) найдем левый и правый пределы в точках разрыва:

$$g(6-0)=\lim_{x\to 6-0}\frac{x+4}{x-6}=\left|\frac{10}{-0}\right|=-\infty,$$

$$g(6+0)=\lim_{x\to 6+0}\frac{x+4}{x-6}=\left|\frac{10}{+0}\right|=+\infty;$$

в) так как оба односторонних предела «равны» ∞, то x=6 точка разрыва второго рода.

Таблица 1

Виды пределов	Результат подстановки предельной точки	Результат или метод вычисления предела
1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\begin{cases} a_0/b_0, & m=n, \\ 0, & m<n, \\ \infty, & m>n. \end{cases}$

2 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$	а) разложение на множители; б) правило Лопиталя; в) умножение на сопряжённое выражение; г) применение эквивалентных б.м.; д) правило 1 этой таблицы
3 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{c}, \dfrac{c}{\infty}, \dfrac{0}{\infty}$	0
4 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{c}{0}, \dfrac{\infty}{c}, \dfrac{\infty}{0}$	∞
5 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)\cdot g(x)$	$0\cdot\infty$	привести к неопределённостям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, затем как в 1 или 2 этой таблицы
6 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)\cdot g(x)$	$\infty\cdot\infty,\ \infty\cdot c$	∞
7 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)\cdot g(x)$	$0\cdot 0,\ 0\cdot c$	0
8 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} [f(x)\pm g(x)]$	$\infty-\infty$	привести к неопределённостям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, затем как в 1 или 2 этой таблицы
9 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} [f(x)\pm g(x)]$	$\infty+\infty$	∞
10 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)^{g(x)}$	$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$	а) привести ко 2-му замечательному пределу $\lim\limits_{N(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{N(x)}\right)^{N(x)}=e$; б) использовать формулу $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)\ln f(x)}$
11 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)^{g(x)}$	$c^{+\infty}$	$\begin{cases}\infty, & c>1\\ 0, & 0\le c<1\end{cases}$
12 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\infty)}} f(x)^{g(x)}$	$c^{-\infty}$	$\begin{cases}0, & c>1\\ \infty, & 0\le c<1\end{cases}$

Задание 7. Вычислить производную заданной функции

$$y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^2}x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Решение:

$$y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^2}=x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}.$$

$$y'=\left(x^{1/2}+5x^{-1/3}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}\right)'=(x^{1/2})'+5(x^{-1/3})'-(x^{-2})'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-1/2}+5\cdot(-\frac{1}{3})x^{-4/3}-1(-2)x^{-3}+\frac{1}{3}(-3)x^{-4}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}.$$

Задание 8. Найти производные сложной функции:

а) $y=(1+5x)^3$;

б) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$.

*Решение: а) п*олагаем $y=u^3$, $u=1+5x$, тогда

$$\acute{o}'_{\tilde{o}}=(\grave{e}^3)'_{\grave{e}}\cdot\grave{e}'_{\tilde{o}}=3\grave{e}^2(1+5\tilde{o})'_{\tilde{o}}=3(1+5\tilde{o})^2\cdot(0+5\cdot1)=15(1+5\tilde{o})^2;$$

*б) п*олагаем $\acute{o}=\grave{e}^{1/3}$, $\grave{e}=2+\tilde{o}^4$. Тогда

$$y'_x=(u^{1/3})'_u\cdot u'_x=\frac{1}{3}u^{-2/3}\left(2+x^4\right)'_x=\frac{1}{3}u^{-2/3}\left(0+4x^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-2/3}\cdot4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)2}}.$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$\left(\sqrt[3]{2+x^4}\right)'=\left[\left(2+x^4\right)^{1/3}\right]'=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-2/3}\cdot(2+x^4)'=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-2/3}\cdot(0+4x^3)=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Этот способ записи без особого обозначения промежуточного аргумента значительно проще. Ему и следует научиться при дифференцировании сложных функций.

Задание 9. Найти производные сложной функции $y = ch^3 8x \cdot \arccos 2x^6$.

*Решение: п*рименим формулу

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Полагаем $u = ch^3 8x, \quad v = \arccos 2x^6,$ тогда

$$y' = (ch^3 8x \cdot \arccos 2x^6)' = (ch^3 8x)' \cdot \arccos 2x^6 + ch^3 8x \cdot (\arccos 2x^6)' =$$

$$= 3ch^2 8x \cdot (ch 8x)' \cdot \arccos 2x^6 + ch^3 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} (2x^6)' =$$

$$= 3ch^2 8x \cdot sh 8x \cdot (8x)' \cdot \arccos 2x^6 + ch^3 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} \cdot 12x^5 =$$

$$= 3ch^2 8x \cdot sh 8x \cdot 8 \cdot \arccos 2x^6 + \frac{12x^5 \cdot ch^3 8x}{\sqrt{1-(2x^6)^2}} =$$

$$= 24ch^2 8x \cdot sh 8x \cdot \arccos 2x^6 + \frac{12x^5 \cdot ch^3 8x}{\sqrt{1-(2x^6)^2}}.$$

Задание 10. Для данной функции $y = \cos 2x$ и аргумента $x_0 = \frac{\pi}{4}$ вычислить $y'''(x_0)$.

Решение: найдем производную третьего порядка

$$y' = (\cos 2x)' = -2\sin 2x;$$

$$y'' = (y')' = -2(\sin 2x)' = -4\cos 2x;$$

$$y''' = (y'')' = -4(\cos 2x)' = 8\sin 2x.$$

Найдем значение производной третьего порядка в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 8.$$

Задание 11. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

Решение:

1) область существования $0 < x < \infty$, так как в этой области определена функция $y = \ln x$;

2) функция является ни четной, ни нечетной;

3) для нахождения точек пересечения с осью О*x,* решим уравнение

$$\frac{\ln x}{x} = 0,$$

откуда $\ln x = 0$, $x = 1$. С осью Оy функция не пересекается, так как $x > 0$;

4) как частное двух непрерывных функций $y = \frac{\ln x}{x}$. непрерывна в области своего существования, но при приближении к граничной точке $x = 0$ области существования имеем

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой;

5) левая наклонная асимптота отсутствует, так как невозможно, чтобы $x \to -\infty$. Найдем правую наклонную асимптоту

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно, правая горизонтальная асимптота – ось Оx (y=0);

6) найдем интервалы монотонности и экстремум заданной функции. Для этого найдем

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{x(\ln x)' - x' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Так как $x^2 > 0$, то $y' > 0$, тогда и только тогда, когда $1 - \ln x > 0$, то есть $1 > \ln x$. Следовательно, $y' > 0$, при $x \in (0; e)$.

$y' < 0$ тогда и только тогда, когда $1 - \ln x = 0$, отсюда $x = e$ – точка максимума. Итак, имеется один локальный максимум в точке $x = e$;

7) найдем интервалы выпуклости, для этого вычислим вторую производную заданной функции

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

$y'' > 0$ тогда и только тогда, когда $2\ln x - 3 > 0$, отсюда $\ln x > \frac{3}{2}$. Значит, функция выпукла вниз для $x \in (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

$y'' < 0$ тогда и только тогда, когда $2\ln x - 3 < 0$, то есть $\ln x < \frac{3}{2}$. Отсюда следует, что функция выпукла вверх для $x \in (0; e^{3/2})$. Вывод: точка $x = e^{3/2}$ - точка перегиба. Вычислим $y_{\max} = y(e) \approx 037; \quad y(e^{3/2}) \approx 0{,}33.$

Построим график.

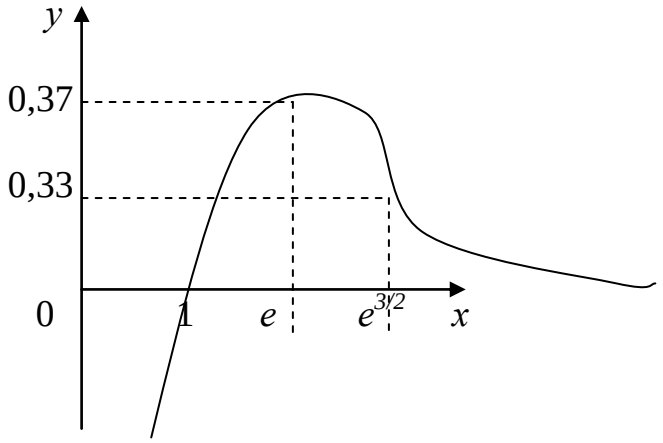


Рисунок 1

Расчетно-графическая работа №3. Модуль 3. Интегральное исчисление функции одной переменной

Расчетные задания

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы.

1.1	$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}} 3x^2 dx$	1.16	$\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$
1.2	$\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$	1.17	$\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$
1.3	$\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2} dx$	1.18	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx$
1.4	$\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right) dx$	1.19	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}} dx$
1.5	$\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x} dx$	1.20	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2} dx$
1.6	$\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x} dx$	1.21	$\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right) dx$

1.7	$\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx$	1.22	$\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$
1.8	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$	1.23	$\int\frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx$
1.9	$\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$	1.24	$\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx$
1.10	$\int\frac{3x^2\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx$	1.25	$\int\frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$
1.11	$\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$	12.26	$\int\frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$
1.12	$\int\frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$	1.27	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$
1.13	$\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$	1.28	$\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$
1.14	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$	1.29	$\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$
1.15	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$	1.30	$\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$

Задание 2. Вычислить неопределенные интегралы.

2.1	$\int\sqrt{3+x}dx$	2.11	$\int\cos(2+3x)dx$	2.21	$\int\frac{dx}{3-x}$
2.2	$\int\sqrt[3]{(1+x)^2}dx.$	2.12	$\int\frac{dx}{4-3x}$	2.22	$\int\sqrt[3]{(1-2x)^5}dx.$
2.3	$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$	2.13	$\int\frac{dx}{(2-5x)^3}$	2.23	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-9x}}$
2.4	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$	2.14	$\int(1-3x)^4dx$	2.24	$\int(1-4x)^7dx.$
2.5	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	2.15	$\int\sqrt[3]{1+5x}dx$	2.25	$\int(1+2x)^5dx$
2.6	$\int\sin(2-3x)dx$	2.16	$\int\frac{dx}{2-3x}.$	2.26	$\int\sqrt{(1+3x)^7}dx$
2.7	$\int e^{3x-5}dx$	2.17	$\int\cos(3+2x)dx$	2.27	$\int\frac{dx}{1-4x}$

2.8	$\int \frac{dx}{2+3x}$	2.18	$\int \frac{dx}{2-5x}$	2.28	$\int \frac{dx}{3x-4}$
2.9	$\int e^{3-8x}dx$	2.19	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+7x}}$	2.29	$.\int \sin(3-x)dx$
2.10	$\int \sin(3+4x)dx$	2.20	$\int \sqrt{1+3x}dx$	2.30	$\int e^{5-3x}dx$

Задание 3. Вычислить неопределенные интегралы.

3.1	$\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$	3.11	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	3.21	$\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$
3.2	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	3.12	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	3.22	$\int \frac{2dx}{4+3x^2}$
3.3	$\int \frac{dx}{9x^2+3}$	3.13	$\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	3.23	$\int \frac{dx}{4x^2+5}$
3.4	$\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	3.14	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	3.24	$\int \frac{dx}{8x^2-25}$
3.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	3.15	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+7}}$	3.25	$\int \frac{dx}{4x^2-9}$
3.6	$\int \frac{dx}{7x^2-4}$	3.16	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$	3.26	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$
3.7	$\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$	3.17	$\int \frac{dx}{3x^2+1}$	3.27	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-49x^2}}$
3.8	$\int \frac{dx}{5x^2+3}$	3.18	$\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$	3.28	$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+81}}$
3.9	$\int \frac{dx}{5x^2-3}$	3.19	$\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$	3.29	$\int \frac{dx}{4x^2+1}$
3.10	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	3.20	$\int \frac{dx}{8x^2+9}$	3.30	$\int \frac{dx}{x^2+16}$

Задание 4. Вычислить неопределенные интегралы.

4.1	$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$	4.16	$\int xe^{1-6x^2}dx$
4.2	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1-x)}}{x-1}dx$	4.17	$\int \frac{x}{e^{x^2-3}}dx$

4.3	$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$	4.18	$\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x dx$
4.4	$\int \frac{dx}{(3+x)\sqrt[5]{\ln^2(3+x)}}$	4.19	$\int \sqrt{\cos 7x}\sin 7x dx$
4.5	$\int \frac{\ln^3(2-x)dx}{x-2}$	4.20	$\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$
4.6	$\int \sin^4 2x \cos 2x dx$	4.21	$\int e^{2x^3-1} x^2 dx$
4.7	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$	4.22	$\int e^{\cos x} \sin x dx$
4.8	$\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$	4.23	$\int \frac{x^2}{e^{x^3+1}} dx$
4.9	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}} dx$	4.24	$\int \frac{x}{e^{x^2+7}} dx$
4.10	$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$	4.25	$\int \frac{x}{e^{3x^2+4}} dx$
4.11	$\int \frac{\sqrt{tg^3 x}}{\cos^2 x} dx$	4.26	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
4.12	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[3]{tgx}}$	4.27	$\int \frac{arcctg^7 2x}{1+4x^2} dx$
4.13	$\int \frac{dx}{\sin^2 x ctg^4 x}$	4.28	$\int \frac{\sqrt[5]{\arccos^2 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
4.14	$\int \frac{ctg^5 x}{\sin^2 x} dx$	4.29	$\int \frac{\sqrt{\arcsin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
4.15	$\int \frac{tg^4 5x}{\cos^2 5x} dx$	4.30	$\int \frac{\sqrt{arctg^3 3x}}{1+9x^2} dx$

Задание 5. Вычислить неопределенные интегралы.

5.1	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$	5.11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	5.21	$\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$
5.2	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$	5.12	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$	5.22	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

5.3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$	5.13	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$	5.23	$\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$
5.4	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$	5.14	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$	5.24	$\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$
5.5	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$	5.15	$\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$	5.25	$\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$
5.6	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$	5.16	$\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$	5.26	$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
5.7	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$	5.17	$\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$	5.27	$\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$
5.8	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$	5.18	$\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$	5.28	$\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$
5.9	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$	5.19	$\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	5.29	$\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$
5.10	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$	5.20	$\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$	5.30	$\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$

Задание 6. Вычислить неопределенные интегралы.

6.1	$\int (5-x)e^{3x}dx$	6.11	$\int x^2 \cos x dx$	6.21	$\int arctg\,8x dx$
6.2	$\int x\cos 6x dx$	6.12	$\int \ln^2 x dx$	6.22	$\int \arccos 2x dx$
6.3	$\int (3x+5)\sin 4x dx$	6.13	$\int x \sin x \cos x dx$	6.23	$\int arcctg\,3x dx$
6.4	$\int \ln(x+2)dx$	6.14	$\int (3-x)\cos x dx$	6.24	$\int 3x\cos x dx$
6.5	$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$	6.15	$\int x arctgx dx$	6.25	$\int arctg\,2x dx$
6.6	$\int xe^{3x}dx$	6.16	$\int (x+1)e^{2x}dx$	6.26	$\int x^2 e^{-2x}dx$
6.7	$\int (6-5x)\sin x dx$	6.17	$\int (3x+1)e^{x}dx$	6.27	$\int (x+1)e^{-4x}dx$
6.8	$\int \ln(x^2+1)dx$	6.18	$\int (1-x)\cos 7x dx$	6.28	$\int x^2 e^{-x}dx$
6.9	$\int x arctg\,2x dx$	6.19	$\int (x-7)\cos 3x dx$	6.29	$\int arctg\,4x dx$
6.10	$\int (x+2)e^{x}dx$	6.20	$\int (x+2)\sin 3x dx$	6.30	$\int \ln(x-5)dx$

Задание 7. Вычислить неопределенные интегралы.

7.1	$\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx$	7.11	$\int \frac{x^4}{x^2-3}dx$	7.21	$\int \frac{1-2x^4}{x^2+1}dx$
7.2	$\int \frac{7-x^2}{1-x}dx$	7.12	$\int \frac{x^2+5x}{x^2+1}dx$	7.22	$\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx$
7.3	$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$	7.13	$\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$	7.23	$\int \frac{2x^2+5}{x+1}dx$
7.4	$\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$	7.14	$\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$	7.24	$\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx$
7.5	$\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$	7.15	$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$	7.25	$\int \frac{x^2+x}{2-x}dx$
7.6	$\int \frac{2x^4-3}{x^2-4}dx$	7.16	$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$	7.26	$\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx$
7.7	$\int \frac{x^3-1}{2x+1}dx$	7.17	$\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx$	7.27	$\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx$
7.8	$\int \frac{x^5}{1-x^3}dx$	7.18	$\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx$	7.28	$\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$
7.9	$\int \frac{x^2}{x^2+3}dx$	7.19	$\int \frac{x^3-3}{x+5}dx$	7.29	$\int \frac{x^2+4}{x-3}dx$
7.10	$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx$	7.20	$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$	7.30	$\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx$

Задание 8. Вычислить неопределенные интегралы.

8.1	$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$	8.16	$\int \frac{2x^4-4x^3+2x^3-4x+1}{x(x-1)^2}dx$
8.2	$\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$	8.17	$\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)}dx$
8.3	$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$	8.18	$\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$
8.4	$\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$	8.19	$\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$
8.5	$\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$	8.20	$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$
8.6	$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$	8.21	$\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$

8.7	$\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$	8.22	$\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$
8.8	$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x^3}dx$	8.23	$\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
8.9	$\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$	8.24	$\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
8.10	$\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx$	8.25	$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$
8.11	$\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$	8.26	$\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$
8.12	$\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$	8.27	$\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
8.13	$\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$	8.28	$\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$
8.14	$\int \frac{x-1}{(x-1)(x^2-4x+13)}dx$	8.29	$\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
8.15	$\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	8.30	$\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$

Задание 9. Вычислить определенные интегралы.

9.1	$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$	9.11	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 3x}$	9.21	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
9.2	$\int_0^{2\sqrt[6]{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$	9.12	$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	9.22	$\int_3^8 \sqrt{x+1}dx$
9.3	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$	9.13	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	9.23	$\int_{\pi/6}^{\pi/6} \sin\alpha\cos^3\alpha$
9.4	$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$	9.14	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$	9.24	$\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12ctg3xdx$
9.5	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$	9.15	$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$	9.25	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$
9.6	$\int \frac{dx}{x^2+1}$	9.16	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	9.26	$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
9.7	$\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	9.17	$\int_0^1 3(x^2+x^2e^{x^2})dx$	9.27	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

9.8	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$	9.18	$\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	9.28	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$
9.9	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	9.19	$\int_1^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2}{1+x^6} dx$	9.29	$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha \sin^3\alpha d\alpha$
9.10	$\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1} dz$	9.20	$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x} dx$	9.30	$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$

Решение типового варианта

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы $\int \frac{3x^3-5x^2+7}{x^2} dx$.

Решение:

$$\int \frac{3x^3-5x^2+7}{x^2} dx = \int \left(\frac{3x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right) dx = 3\int x dx - 5\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 5\ln x - \frac{7}{x} + C.$$

Задание 2. Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int \frac{dx}{x+3}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;

в) $\int ctgx \cdot \ln\sin x dx$;

г) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[9]{\sin x - \cos x}} dx$;

д) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Решение. а) вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

;

б) сведем заданный интеграл к табличному

$$\int \frac{du}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$$

;

в) $\int ctgx \cdot \ln\sin x dx$ Зная, что $ctgxdx = (\ln \sin x)' dx = a(\ln \sin x)$, данный интеграл можно свести к табличному интегралу

$$\int \ln\sin x d(\ln\sin x) = \frac{\ln^2 \sin x}{2} + C;$$

г) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[9]{\sin x - \cos x}} dx$. Числитель подынтегральной дроби есть дифференциал подкоренного выражения, т.е. $(\sin x + \cos x)dx = d(\sin x - \cos x)$.

Получим:

$$I = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[9]{\sin x - \cos x}} = \int (\sin x - \cos x)^{-1/9} d(\sin x - \cos x) =$$

$$= \frac{9}{8}\sqrt[9]{(\sin x - \cos x)^8} + C;$$

д) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. Целесообразна подстановка $t = \sqrt{1+\ln x}$, отсюда $\ln x = t^2 - 1$, $\frac{dx}{x} = 2tdt$. Подставляя в данный интеграл, освободимся от радикала:

$$2\int \frac{(t^2-1)tdt}{t} = 2\int (t^2-1)dt = 2\int t^2 dt - 2\int dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C.$$

Задание 3. Вычислить неопределенные интегралы $\int \frac{dx}{1+5x^2}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{1+5x^2} = \left| \begin{array}{l} \textit{заданный интеграл} \\ \textit{сведем к табличному} \\ \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C \end{array} \right| = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{5}x)^2} = arctg\sqrt{5}x + C.$$

Задание 4. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(x+2) \\ dt = \frac{1}{x+2}dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{-2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2(x+2)} + C.$$

Задание 5. Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$;

б) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$;

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}$.

Решение: а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$. Дополним знаменатель до полного квадрата

$$x^2+6x+25 = x^2+2\cdot 3x+3^2-3^2+25 = (x^2+2\cdot 3x+9)-9+25 =$$
$$= (x^2+6x+9)+16 = (x+3)^2+16.$$

Таким образом, сведем заданный интеграл к табличному

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{4} + C;$$

б) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$. Выделяя полный квадрат в знаменателе и преобразуя числитель, имеем

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\cdot \int \frac{dx}{x^2-4x+8} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} + 5\cdot \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} arctg \frac{x-2}{2} + C;$$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}$. Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении, получим:

$$x^4-4x^2+3 = [(x^2)^2-2\cdot 2x^2+4]-4+3 = (x^2-2)^2-1,$$

тогда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-4x^2+3}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-2)^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2)2}{\sqrt{(x^2-2)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 2 + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 3}\right| + C.$$

Задание 6. Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int(4x-3)\cos 2x\,dx;$

б) $\int arctg\, x\,dx$.

Решение: а) $\int(4x-3)\cos 2x\,dx$. Положив $u=4x-3$, $dv=\cos 2x\,dx$, найдем $du=4dx$, $v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$. Подставляя в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int(4x-3)\cos 2x\,dx = (4x-3)\frac{\sin 2x}{2} - 2\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(4x-3)\sin 2x + \cos 2x + C;$$

$$\text{б) } \int arctg\, x\,dx = \left|\begin{matrix} u = arctg\, x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{matrix}\right| =$$

$$= x\,arctd\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = x\,arctg\, x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Задание 7. Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int \dfrac{dx}{x^5 - x^2}$;

б) $\int \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Решение: а) $\int \dfrac{dx}{x^5 - x^2}$. Разложим знаменатель на множители

$$x^5 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \int\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}\right)dx.$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, получим

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^4 & B+C+D=0 \\ x^3 & A+C-D+E=0 \\ x^2 & C-E=0 \\ x & -B=0 \\ x^0 & -A=1 \end{array}\right\},$$

из которой найдем A=-1, B=0, C=1/3, D=-1/3, E=1/3. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

б) $\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$. Разложим подынтегральное выражение на простые дроби:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}\Rightarrow x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

$$x=1:\quad 1=2c\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$x=0:\quad 0=-B+C\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим

$$0=A+C\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

Таким образом,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=--\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c.$$

Задание 8. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2+5x+12}dx$.

Решение: разложим знаменатель подынтегральной дроби на простейшие действительные множители:

$$x^3-2x^2+5x+12=(x-1)(x-4)(x+3),$$

тогда схема разложения подынтегральной дроби на сумму простых дробей имеет следующий вид:

$$\frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2+5x+12}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим равенство:

$$2x^2+41x-91=A(x-4)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-4).$$

В данном примере знаменатель подынтегральной дроби имеет действительные и различные корни, тогда неопределенные коэффициенты A, B и C можно найти следующим способом:

при $x = 1$ имеем $-48 = -12A$, отсюда $A = 4$;

при $x = 4$ имеем $105 = 21B$, отсюда $B = 4$;

при $x = -3$ имеем $-196 = 28C$, отсюда $C = -7$.

Подставив найденные коэффициенты в схему разложения и интегрируя каждое слагаемое отдельно, получим:

$$\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x-4}-\frac{7}{x+3}\right]dx=4\int\frac{dx}{x-1}+5\int\frac{dx}{x-4}-7\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=4\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$$

Задание 9. Вычислить неопределенный интеграл.

Решение: используем формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

получим

$$\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{0}{3}=\frac{8}{3}.$$

Список литературы

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Учебник для вузов. – Т.1, -М.: Дрофа, 2013. – 351 с.

2 Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. -ч.1. – М., 2003, 2008.

3 Индивидуальные задания по высшей математике: Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной/под ред. А.П. Рябушко – Мн.: Выш. шк., 2007, 2009.-304 с.

4 Индивидуальные задания по высшей математике: Ч. 2 Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных Обыкновенные дифференциальные уравнения /под ред. А.П. Рябушко – Мн.: Выш. шк., 2007.-304 с.

5 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

6 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданими). Часть 1. – Алматы, 2008. – 423 с.

7 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2007. – 288 с.

Содержание

Введение…… 3
Теоретические вопросы……... 3
Расчетно-графическая работа №1. Модуль 1. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия…….. 5
Решение типового варианта ……... 15
Расчетно-графическая работа №2. Модуль 2. Элементы математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной…… 31
Решение типового варианта ……... 42
Расчетно-графическая работа №3. Модуль 3.Интегральное исчисление функции одной переменной…… 51
Решение типового варианта…… 53
Список литературы……... 65