Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

5В060200 – Информатика мамандығының студенттері үшін есептеу – сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Алматы, 2016

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Төлеуова Б.Ж. Дифференциалдық теңдеулер. 5В060200 – Информатика мамандығының студенттері үшін есептеу – сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. - Алматы: АУЭС, 2016.-25 бет.

Әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар 5В060200 – Информатика мамандығының студенттеріне арналған «Дифференциалдық теңдеулер» пәнінің №1, №2 есептеу – сызба жұмыстарынан тұрады.

Типтік нұсқаның шешуі толық көрсетілген. Тапсырмаларды орындау барысында қажетті теориялық материалдар келтірілген. Әдістемелік нұсқаулар бағдарламаға сай құрылып, студенттердің осы тарауды өз бетімен игеруіне көмектеседі және басылымға ұсынылады.

Кестелер 17, библиогр. 6 атау.

Пікір беруші: «Электроника» кафедрасының аға оқытушысы Елеукулов Е.О.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2016 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2016 ж.

Кіріспе

Математикалық әдістер ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында үлкен қолданысқа ие болады және кез келген техникалық пәндердің құрама бөлігі болып саналады, яғни математиканың қолданбалы саласының маңызы зор. Сондықтан инженерлер мен ғылыми жұмысшыларды дайындау үшін, студенттердің фундаментальді математикалық деңгейін күшейтуге талаптар қойылып отыр.

Әдістемелік нұсқау «Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер», «Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер», «Дифференциалдық теңдеулер жүйесі» тараулары бойынша есептеу-сызба жұмыстарынан тұрады.

Әрбір бөлімде тапсырмалар, теориялық сұрақтар, қажет теориялық материалдар, типтік нұсқаудың шешуі берілген. Әрбір студенттің нұсқасы топтың тізімі бойынша анықталады. Есептеу-сызба жұмыстары оқушы дәптерінде өте мұқият орындалуы керек.

1 №1 есептеу-сызба жұмыстары. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Мақсаты: дифференциалдық теңдеулердің негізгі түсініктерімен, бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешудің негізгі тәсілдерімен танысу.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Дифференциалдық теңдеулердің негізгі түсініктері. Геометриялық интерпретация. Коши есебі.
2. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер. Біртекті теңдеулер.
3. Бірінші ретті сызықтық теңдеу.
4. Толық дифференциалды теңдеу, интегралдаушы көбейткіш.
5. Дифференциалдық теңдеуді теңдеулер жүйесіне келтіру.

1.2 Тапсырмалар

1 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз

1.1 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$	1.2 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$	1.3 $\frac{dy}{dx}=yx$
1.4 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$	1.5 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}$	1.6 $\frac{dy}{dx}=2yx$
1.7 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{5x}$	1.8 $\frac{dy}{dx}=-yx$	1.9 $\frac{dy}{dx}=2y^2x^2$

1.10 $\frac{dy}{dx}=-2yx$	1.11 $\frac{dy}{dx}=yx^2$	1.12 $\frac{dy}{dx}=y\sqrt{x}$
1.13 $\frac{dy}{dx}=-yx^2$	1.14 $\frac{dy}{dx}=y^2x$	1.15 $\frac{dy}{dx}=y^2$
1.16 $\frac{dy}{dx}=y\frac{1}{\sqrt{x}}$	1.17 $\frac{dy}{dx}=y^2x^2$	1.18 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$
1.19 $\frac{dy}{dx}=-y^2x$	1.20 $\frac{dy}{dx}=2y^2$	1.21 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}$
1.22 $\frac{dy}{dx}=y^3x$	1.23 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$	1.24 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$
1.25 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$	1.26 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}$	1.27 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{3x}$
1.28 $\frac{dy}{dx}=4yx$	1.29 $\frac{dy}{dx}=2y\frac{1}{\sqrt{x}}$	1.30 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{x}$

2 Коши есебін шешіңіз

2.1 $y'=y^2,\ y(0)=1$	2.2 $y'=y^2,\ y(0)=-1$
2.3 $y'=y^2,\ y(0)=0$	2.4 $y'=y^2,\ y(1)=2$
2.5 $y'=y^2,\ y(-1)=2$	2.6 $y'=y^2,\ y(1)=-3$
2.7 $y'=y^2,\ y(-1)=-4$	2.8 $y'=-y^2,\ y(0)=1$
2.9 $y'=-y^2,\ y(0)=-2$	2.10 $y'=-y^2,\ y(2)=5$
211 $y'=-y^2,\ y(2)=-3$	2.12 $y'=-y^2,\ y(-1)=4$
2.13 $y'=2y^2,\ y(0)=3$	2.14 $y'=-3y^2,\ y(0)=-1$
2.15 $y'=y^3,\ y(0)=2$	2.16 $y'=-y^3,\ y(0)=4$
2.17 $y'=\frac{1}{y^2},\ y(1)=1$	2.18 $y'=\frac{1}{y^2},\ y(0)=-1$
2.19 $y'=1+y^2,\ y(0)=0$	2.20 $y'=4+y^2,\ y(1)=0$
2.21 $y'=y^2-1,\ y(0)=1$	2.22 $y'=y^2-1,\ y(0)=2$
2.23 $y'=y^2-1,\ y(0)=-2$	2.24 $y'=1-y^2,\ y(0)=-1$
2.25 $y'=\frac{1}{y},\quad y(0)=-2$	2.26 $y'=\frac{y}{1-y^2},\quad y(0)=1$
2.27 $y'=3y^2,\quad y(0)=1$	2.28 $y'=1-y^2,\ y(0)=2$
2.29 $y'=\frac{3y}{4-y^2},\ y(0)=1$	2.30 $y'=\frac{3y}{4-y},\quad y(0)=1$

3 Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз

3.1 $4x-3yy'=3x^2yy'-2xy^2$	3.2 $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$	3.3 $\sqrt{4+y^2}-yy'=x^2yy'$
3.4 $\sqrt{3+y^2}-yy'=x^2yy'$	3.5 $6x-6yy'=2x^2yy'-3xy^2$	3.6 $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
3.7 $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$	3.8 $yy'\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=0$	3.9 $6x-6yy'=3x^2yy'-2xy^2$
3.10 $x\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{4+x^2}=0$	3.11 $y(e^x+4)dy-e^xdx=0$	3.12 $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$
3.13 $2x-2yy'=x^2yy'-2xy^2$	3.14 $x\sqrt{4+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$	3.15 $(e^x+8)dy-ye^xdx=0$
3.16 $\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$	3.17 $6x-yy'=x^2yy'-3xy^2$	3.18 $y\ln y+xy'=0$
3.19 $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$	3.20 $6x-2yy'=2x^2yy'-3xy^2$	3.21 $(e^x+1)y'=ye^x$
3.22 $y(1+\ln y)+xy'=0$	3.23 $(e^x+3)yy'=e^x$	3.24 $\sqrt{3+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$
3.25 $x-yy'=x^2yy'-xy^2$	3.26 $\sqrt{5+y^2}+4(x^2y+y)y'=0$	3.27 $(e^x+1)yy'=e^x$
3.28 $\sqrt{2+y^2}+3(x^2y+y)y'=0$	3.29 $2x-yy'=x^2yy'-xy^2$	3.30 $\sqrt{2-x^2}y'+2x+2xy^2=0$

4 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз

4.1 $y'=2\frac{y}{x}+1$	4.2 $y'=3\frac{y}{x}+2$	4.3 $y'=3\frac{y}{x}-2$
4.4 $y'=5\frac{y}{x}+1$	4.5 $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1$	4.6 $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$
4.7 $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+4$	4.8 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$	4.9 $y'=\frac{y^2}{x^2}+5\frac{y}{x}+4$
4.10 $y'=\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y}{x}+4$	4.11 $y'=\frac{y^2}{x^2}-5\frac{y}{x}+9$	4.12 $y'=\frac{y^2}{x^2}+3\frac{y}{x}+5$
4.13 $y'=\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y}{x}+8$	4.14 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+2$	4.15 $y'=\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+1$
4.16 $xy'=-\frac{y^2}{x}+y$	4.17 $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$	4.18 $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$
4.19 $x^2y'=\frac{y^3}{x}+xy$	4.20 $x^2y'=3y^2+xy$	4.21 $y'=-2\frac{y}{x}+3$

4.22 $y'=-3\frac{y}{x}-4$	4.23 $y'=-2\frac{y}{x}-3$	4.24 $y'=2\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+2$
4.25 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$	4.26 $2y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+3$	4.27 $y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$
4.28 $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$	4.29 $y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+6$	4.30 $4y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+5$

5 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз

5.1 $y'=\frac{x+2y-3}{2x-2}$	5.2 $y'=\frac{x+y-2}{2x-2}$	5.3 $y'=\frac{-x+3y-4}{3x+3}$
5.4 $y'=\frac{2y-2}{x+y-2}$	5.5 $y'=\frac{x+y-2}{3x-y-2}$	5.6 $y'=\frac{2x+y-3}{x-1}$
5.7 $y'=\frac{x+7y-8}{9x-y-8}$	5.8 $y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}$	5.9 $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$
5.10 $y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3}$	5.11 $y'=\frac{x-2y+3}{-2x-2}$	5.12 $y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9}$
5.13 $y'=\frac{2x+3y-5}{5x-5}$	5.14 $y'=\frac{4y-8}{3x+2y-7}$	5.15 $y'=\frac{x+3y-4}{5x-y-4}$
5.16 $y'=\frac{-2x+y+3}{x-1}$	5.17 $y'=\frac{x+2y-3}{x-1}$	5.18 $y'=\frac{3x+2y-1}{x+1}$
5.19 $y'=\frac{5y+5}{4x+3y-1}$	5.20 $y'=\frac{x+4y-5}{6x-y-5}$	5.21 $y'=\frac{x+y+2}{x+1}$
5.22 $y'=\frac{2x+y-3}{4x-4}$	5.23 $y'=\frac{2x+y-3}{2x-2}$	5.24 $y'=\frac{y}{2x+2y-2}$
5.25 $y'=\frac{x+5y-6}{7x-y-6}$	5.26 $y'=\frac{x+y-4}{x-2}$	5.27 $y'=\frac{x+y-3}{-x+y+1}$
5.28 $y'=\frac{-2x+3y+1}{3x+3}$	5.29 $y'=\frac{6y-6}{5x+4y-9}$	5.30 $y'=\frac{x+6y-7}{8x-y-7}$

6 Коши есебін шешіңіз

6.1 $y'-\frac{y}{x}=x^3,\ y(1)=0$	6.2 $y'-\frac{y}{x}=\sqrt{x},\ y(4)=2$
6.3 $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y(1)=1$	6.4 $y'+\frac{y}{x}=x,\ y(-1)=1$
6.5 $y'+\frac{y}{x}=\sqrt{x},\ y(4)=-1$	6.6 $y'+\frac{y}{x}=e^x,\ y(1)=0$
6.7 $y'+\frac{y}{x}=\frac{2}{1+x^2},\ y(1)=0$	6.8 $y'-2xy=e^{x^2},\ x, y(0)=-1$
6.9 $y'-2xy=e^{x^2},\ x, y(-1)=2$	6.10 $y'+2xy=e^{-x^2},\ y(1)=2$

6.11 $y' + 2xy = x,\ \ y(0) = 1$	6.12 $y' + 2xy = 2x,\ \ y(0) = -2$
6.13 $y' + \frac{y}{x} = \cos x,\ y(\pi) = 0$	6.14 $y' - \frac{y}{x} = \ln x,\ y(e) = 1$
6.15 $y' - \frac{2y}{x} = x,\ y(1) = 1$	6.16 $y' - \frac{2y}{x} = 1,\ y(2) = -2$
6.17 $y' - \frac{2y}{x} = \sqrt[3]{x},\ y(8) = -1$	6.18 $y' + \frac{2y}{x} = \sqrt{x},\ y(4) = 0$
6.19 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos 2x}{x^2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	6.20 $y' - 2xy = -x,\ y(0) = -1$
6.21 $y' - \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x},\ y(8) = 1$	6.22 $y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x,\ y(1) = 1$
6.23 $y' - 2xy = x,\ y(0) = 1$	6.24 $y' - 2xy = x^2 e^{x^2},\ y(1) = 2$
6.25 $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0) = 2$	6.26 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2},\ y(1) = 1$
6.27 $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1$	6.28 $y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\frac{1}{2}$
6.29 $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1$	6.30 $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

7 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз

7.1 $y' + y = xy^2$	7.2 $y' + 2y = xy^3$	7.3 $y' - y = xy^2$
7.4 $y' + y = x\sqrt{y}$	7.5 $y' - y = -x\sqrt{y}$	7.6 $y' - 2y = xy^3$
7.7 $y' + y = x^2 y^2$	7.8 $y' + 2y = x^2 y^2$	7.9 $y' - y = x^2 y^2$
7.10 $y' - y = 2xy^2$	7.11 $y' + y = 2xy^3$	7.12 $y' - 2y = x^2 y^2$
7.13 $y' - \frac{1}{3}y = xy^2$	7.14 $y' + \frac{2}{x}y = y^2$	7.15 $y' - 2y = \frac{1}{2}xy^2$
7.16 $y' + \frac{1}{x}y = y^2$	7.17 $y' - \frac{2}{x}y = y^2$	7.18 $y' - \frac{1}{x}y = y^2$
7.19 $y' + 2y = 2xy^2$	7.20 $y' + 3y = xy^2$	7.21 $y' - 3y = xy^3$
7.22 $y' + 2y = y^2 e^x$	7.23 $y' + 2y == y^2 e^{-2x}$	7.24 $y' + 2y = xy^2$
7.25 $y' + 2y = y^2 e^{-5x}$	7.26 $y' + 4y = 2\frac{x}{y}$	7.27 $y' - 2y = y^2 e^{-x}$
7.28 $y' + \frac{2}{x}y = 2y^2$	7.29 $y' - \frac{1}{4}y = xy^2$	7.30 $y' + 3y = \frac{x}{y}$

8 Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз

8.1 $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$	8.2 $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0$
8.3 $\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy=0$	8.4 $3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$
8.5 $\left(y^2+y\sec^2 x\right)dx+\left(2xy+tgx\right)dy=0$	8.6 $xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0$
8.7 $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$	8.8 $2\left(3xy^2+2x^3\right)dx+3\left(2x^2y+y^2\right)dy=0$
8.9 $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$	8.10 $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+tg^2y\right)dy=0$
8.11 $\left(1+\frac{1}{y}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$	8.12 $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$
8.13 $\left(xy^2+x/y^2\right)dx+\left(x^2y-x^2/y^3\right)dy=0$	8.14 $\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy=0$
8.15 $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$	8.16 $\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$
8.17 $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$	8.18 $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$
8.19 $\frac{1+xy}{yx^2}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$	8.20 $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$
8.21 $\left(\frac{1}{y}+\cos x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$	8.22 $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$
8.23 $10xydx+\left(5x^2-\sin y\right)dy=0$	8.24 $e^ydx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$
8.25 $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$	
8.26 $(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0$	
8.27 $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$	
8.28 $(\cos(x+y^2)+\sin x)dx+2y\cos\left(x+y^2\right)dy=0$	
8.29 $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$	
8.30 $\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$	

1.3 Типтік нұсқаның шешуі

Алғашқы үш тапсырмада айнымалылары ажыратылатын теңдеулер берілген. Егер теңдеудің құрамында туынды бар болса, оны дифференциал арқылы, яғни $y'=\frac{dy}{dx}$ түрінде жазамыз. Теңдеудің екі жағын dx - ке көбейтіп,

dx - тің алдында x - ке тәуелді, ал dy - тің алдында y - ке тәуелді функция болатындай етіп түрлендіреміз. Айнымалылары ажыратылған теңдеуге келтіріп, теңдеудің екі жағын интегралдаймыз. Сонда жалпы шешімін немесе жалпы интегралын аламыз.

1. Дифференциалдық теңдеуді шешіңіз: $\frac{dy}{dx} = x^3 y^3$.

Шешуі: $\frac{dy}{dx} = x^3 y^3 \Rightarrow dy = x^3 y^3 dx \Rightarrow dy = x^3 y^3 dx$. Теңдеудің екі жағын y^3-қа бөліп, айнымалылары ажыратылған теңдеуге келтіреміз: $\frac{dy}{y^3} = x^3 dx$. Интегралдаймыз: $\int \frac{dy}{y^3} = \int x^3 dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^4}{4} + c$

$\Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^4}{4} + c \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^4}{4} + c.$

Жауабы: $-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^4}{4} + c$ – теңдеудің жалпы интегралы.

2. Коши есебін шешіңіз: $y' = -5y^2$, $y(0) = \frac{1}{5}$.

Шешуі: $y' = -5y^2 \to \frac{dy}{dx} = -5y^2 \to dy = -5y^2 dx$. Соңғы теңдеуді y^2-қа көбейтіп, интегралдаймыз: $\frac{dy}{y^2} = -5dx \to -\frac{1}{y} = -5x - c \to y = \frac{1}{5x + c}$. Сонымен, теңдеудің шешімі $y = \frac{1}{5x + c}$. Бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табамыз: $\frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 0 + c} \to c = 5$, $y = \frac{1}{5x + 5}$ - дербес шешімі. Теңдеуді y^2-қа бөлгенде $y = 0$ шешімін жоғалтуымыз мүмкін. Теңдеуге қою арқылы шешімі екендігіне көз жеткіземіз. Сонымен қатар, $y = 0$ теңдеудің ерекше шешімі, өйткені бұл шешімді c - ның нақты мәнінде жалпы шешімнен алуға болмайды.

Жауабы: $y = \frac{1}{5x + 5}$, $y = 0$.

3. Дифференциалдық теңдеуді шешіңіз: $(1 + e^{2x}) y^2 y' = e^x$.

Шешуі: y' - ті дифференциал арқылы жазып, теңдеудің екі жағын dx – ке көбейтеміз: $(1 + e^{2x}) y^2 dy = e^x dx$. Айнымалыларды ажыратып, екі жағын интегралдаймыз: $y^2 dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \to \frac{y^3}{3} = arctg\, e^x + \frac{c}{3}$. Соңғы теңдіктен y-ті тауып, жалпы шешімін табамыз: $y = \sqrt[3]{c + 3arctg\, e^x}$.

Жауабы: $y=\sqrt[3]{c+3arctg\,e^{x}}$.

4. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз: $y'=-\frac{y}{x}-1$.

Шешуі: бірінші ретті біртекті теңдеу берілген. Мұндай теңдеулер $u=\frac{y}{x}$ ауыстыруы арқылы айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіріледі: $\begin{cases} y=ux \\ y'=u'x+u \end{cases}$, $y'=-\frac{y}{x}-1 \Rightarrow u'x+u=-u-1 \Rightarrow u'x=-2u-1$. Айнымалыларды ажыратып, теңдеуді интегралдаймыз: $x\cdot\frac{du}{dx}=-(2u+1) \Rightarrow xdu=-(2u+1)dx$ $\Rightarrow \frac{du}{2u+1}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d(2u+1)}{2u+1}=-\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2u+1|=-\ln|x|+\ln|C|$ $\Rightarrow \sqrt{2u+1}=\frac{C}{x}$. Ескі айнымалыға көшеміз: $\sqrt{2\cdot\frac{y}{x}+1}=\frac{C}{x} \Rightarrow x\sqrt{2\cdot\frac{y}{x}+1}=C$ – теңдеудің жалпы интегралы.

Жауабы: $x\sqrt{2\cdot\frac{y}{x}+1}=C$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз: $y'=\frac{2x+y-1}{2x-2}$.

Шешуі: біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеу берілген. Мұндай есептерді шешу үшін мыналарды ескеру керек: егер теңдеу $y'=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ (*) түрінде берілген болса, онда:

а) $c=c_1=0$ болғанда (*) біртекті теңдеу;

б) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$ болса, онда $\begin{cases} x=x_1+h \\ y=y_1+k \end{cases}$ алмастыруы арқылы біртекті теңдеу аламыз, мұндағы h және k $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ жүйенің шешімі;

в) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ болса, онда $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=t$, сондықтан (*) $\Rightarrow y'=\frac{ax+by+c}{t(ax+by)+c_1}$. $ax+by=z$ алмастыруы арқылы айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіреміз.

Біздің жағдайда $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, сондықтан жүйе құрамыз: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 2x-2=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$. $\begin{cases} x=x_1+1 \\ y=y_1-1 \end{cases} \Rightarrow y'=y_1'$ алмастыруын қолдансақ, теңдеу $y_1'=\dfrac{2x_1+y_1}{2x_1}$. түрге келеді. Бұл біртекті теңдеу: $y_1'=\dfrac{2x_1+y_1}{2x_1} \to$ алмастыру $u=\dfrac{y_1}{x_1} \to \begin{cases} y_1=ux_1 \\ y_1'=u'x_1+u \end{cases} \to \quad u'x_1+u=\dfrac{2x_1+ux_1}{2x_1} \to \ldots \to \dfrac{2du}{2-u}=\dfrac{dx_1}{x_1}$ $\to -2\ln|2-u|=\ln x_1-\ln c \;\to\; x_1(2-u)^2=c$. Ескі айнымалыға көшу арқылы теңдеудің жалпы интегралын аламыз: $\dfrac{(2x-y-3)^2}{x-1}=c$.

Жауабы: $\dfrac{(2x-y-3)^2}{x-1}=c$.

5. Коши есебін шешіңіз: $y'-4xy=xe^{x^2}$, $y(0)=1$.

Шешуі: бірінші ретті сызықтық біртекті емес теңдеу берілген. Мұндай теңдеуді:

а) Бернулли әдісі;

ә) Лагранж әдісі немесе тұрақтыны вариациялау әдісі арқылы шешуге болады. Екі әдісті де қарастырамыз.

Бернулли әдісі: $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$ алмастыруын қолданамыз. Теңдеу мына түрге келеді: $u'v+uv'-4xuv=xe^{x^2} \to u'v+u(v'-4xv)=xe^{x^2}$ (*). v функциясын $(v'-4xv)=0$ болатындай етіп таңдаймыз: $v'-4xv=0 \to \dfrac{dv}{dx}=4xv \to \dfrac{dv}{v}=4xdx \to \ln|v|=2x^2 \to v=e^{2x^2}$.

$(v'-4xv)=0$ екендігін ескеріп, (*) теңдеуін шешеміз: $u'v=xe^{x^2} \to$ $u'e^{2x^2}=xe^{x^2} \to \dfrac{du}{dx}=xe^{-x^2} \to u=\int xe^{-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(x^2\right)=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

$u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары табылды, демек, $y=\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)\cdot e^{2x^2}$ немесе $y=-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+Ce^{2x^2}$ – теңдеудің жалпы шешімі. $y(0)=1$ бастапқы шартты қолданамыз: $-\dfrac{1}{2}e^0+Ce^0=1 \to C=\dfrac{3}{2}$.

Жауабы: $y=-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\dfrac{3}{2}e^{2x^2}$.

Лагранж тәсілі: берілген $y'-4xy=xe^{x^2}$ сызықтық біртекті емес теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеу жазамыз: $y'-4xy=0$. Бұл

айнымалылары ажыратылатын теңдеу: $y' - 4xy = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = 4xy \to$ $\frac{dy}{y} = 4xdx \to \quad \ln|y| = 2x^2 + \ln|C| \quad \to \quad y = Ce^{2x^2}$ – сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі. Сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін $y = C(x)e^{2x^2}$, мұндағы $C(x)$ – белгісіз функция, түрінде іздейміз. Берілген теңдеуге $y = C(x)e^{2x^2}$ және $y' = C'(x)e^{2x^2} + C(x) \cdot 4xe^{2x^2}$ қоямыз:

$C'(x)e^{2x^2} + C(x) \cdot 4xe^{2x^2} - 4x \cdot C(x)e^{2x^2} = xe^{x^2} \to C'(x)e^{2x^2} = xe^{x^2} \to$

$C'(x) = xe^{-x^2} \quad \to \quad C(x) = \int xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2} d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1$.

Сонымен, $y = C(x)e^{2x^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1\right) \cdot e^{2x^2} = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C_1 e^{2x^2}$ – теңдеудің жалпы шешімі. Бастапқы шартты қолданамыз: $-\frac{1}{2}e^0 + C_1 e^0 = 1 \quad \to$ $C_1 = \frac{3}{2}$.

Жауабы: $y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2}e^{2x^2}$.

7. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + y = xy^{\frac{1}{2}}$.

Шешуі: Бернулли теңдеуі берілген, мұндағы n=1/2; $z = y^{1-n} = y^{1/2} \to y = z^2$; $y' = 2z \cdot z'$ алмастыруы арқылы сызықтық біртекті емес теңдеуге келтіріп, Бернулли тәсілімен шешеміз. Біздің теңдеу үшін $2z \cdot z' + z^2 = x \cdot z \quad \to \quad z' + \frac{1}{2} \cdot z = \frac{1}{2} \cdot x.$

$z = uv;\ z' = u'v + uv'$ алмастыруын қолданамыз, сонда $z' + \frac{1}{2} \cdot z = \frac{1}{2} \cdot x \to u'v + uv' + \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}x$.

$v' + \frac{1}{2}v = 0$ деп алсақ, онда $\frac{dv}{v} + \frac{dx}{2} = 0 \quad \to \quad \ln v + \frac{x}{2} = 0 \to v = e^{-\frac{x}{2}}$.

Сонымен, $u' \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} \to \quad \frac{du}{dx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} \quad \to \quad du = \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$

$\to u = xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c$. Демек, $z = u \cdot v = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c \right) = x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2$

яғни, $y = z^2 \to y = \left(x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2 \right)^2$.

Бернулли теңдеуін айнымалыны ауыстырмай, сызықтық біртекті емес теңдеу ретінде қарастырып, екі тәсілдің біреуімен шешуге болады. Берілген теңдеуді Лагранж тәсілімен шешеміз. Сәйкес сызықтық біртекті теңдеуді шешеміз:

$$y' + y = 0 \to \frac{dy}{dx} = -y \to \frac{dy}{y} = -dx \to \ln y = -x + \ln c \to y = ce^{-x}$$ -

сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі. Тұрақтыны вариациялап, теңдеуге қоямыз: $y = c(x)e^{-x} \to y' = c'(x)e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$,

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = x(c(x)e^{-x})^{\frac{1}{2}} \to c'(x) = x\sqrt{c(x)}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\to \frac{dc(x)}{\sqrt{c(x)}} = xe^{\frac{x}{2}} \to \ldots \to 2\sqrt{c(x)} = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 2c_1 \to c(x) = (xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c_1)^2.$$

Табылған функцияны (*) - ға қоямыз: $y = (xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c_1)^2 e^{-x}$

немесе $y = (x - 2 + c_1 e^{-\frac{x}{2}})^2$ - Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі.

Жауабы: $y = \left(x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2 \right)^2$.

8. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз: $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$

Шешуі: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шартын тексеру арқылы берілген теңдеудің толық дифференциалды теңдеу екендігін тексереміз: $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, демек $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Шарт орындалғандықтан, теңдіктің сол жағы қандайда бір u функциясының дифференциалы болып табылады: $du = (x + y - 1)dx + (e^y + 1)dy$.

$du = 0$ болғандықтан, $u = C -$берілген теңдеудің жалпы интегралы. Сонымен, біздің мақсатымыз толық дифференциал бойынша анықтау. Белгісіз u функциясын мына формулалардың біреуі бойынша табамыз:

$u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+c$ немесе $u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+c$.

x_0 және y_0 мәндерін өз еркімізше аламыз: $x_0=0$, $y_0=0$. Екінші формула бойынша табамыз:

$$u=\int\limits_{0}^{x}(x+y-1)dx+\int\limits_{0}^{y}e^y dy+c=\left(\frac{x^2}{2}+xy-x\right)\Bigg|_0^x+e^y\Big|_0^y+c=$$

$=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1+c$. Сонымен, $u=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1+c$ немесе $u=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=C$, мұндағы C=1-c.

Жауабы: $\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=C$ - жалпы интеграл.

2 №2 есептеу-сызба жұмыстары. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі.

Мақсаты: жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді және дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің негізгі тәсілдерімен танысу.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Ретін төмендетуге болатын дифференциалдық теңдеулер.
2. Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.
3. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеулер.
4. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеулер. Тұрақтыны вариациялау тәсілі.
5. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеулер. Дербес шешімін таңдау тәсілімен табу.
6. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі.

2.2 Тапсырмалар

1 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз

1.1 $y''=\sin 2x$	1.2 $y''=e^{2x}$	1.3 $y''=xe^x$
1.4 $y''=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	1.5 $y''=\frac{1}{1+x^2}$	1.6 $y''=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}$
1.7 $y''=xe^{-x}$	1.8 $y''=\cos 7x$	1.9 $y''=\cos^2 x$

1.10 $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$	1.11 $y''=\frac{1}{1+x}$	1.12 $y''=\frac{x}{(x+1)^3}$
1.13 $y''=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$	1.14 $y''=1-e^{-\frac{x}{2}}$	1.15 $y''=1-e^{-\frac{x}{2}}$
1.16 $y''=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$	1.17 $y''=\sin^2 2x$	1.18 $y''=\sqrt{x}(1-x)^2$
1.19 $y''=\frac{1}{\cos^2 2x}$	1.20 $y''=\frac{1}{\sin^2 x}$	1.21 $y''=-\frac{1}{1+x^2}$
1.22 $y''=\sin x\cdot\cos x$	1.23 $y''=\cos^2 x$	1.24 $y''=-\sin 4x$
1.25 $y''=x-\frac{1}{x^3}$	1.26 $y''=2^x$	1.27 $y''=\frac{1}{2x+1}$
1.28 $y''=(2+x)^3$	1.29 $y''=\sin x\cdot\cos^2 x$	1.30 $y''=3e^{2x}$

2 Ретін төмендетуге болатын дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табыңыз

2.1 $y''x\ln x=y'$	2.2 $xy''+y'=1$	2.3 $2xy''=y'$
2.4 $xy''=y'-1$	2.5 $xy''=y'$	2.6 $2xy'y''=y'^2-1$
2.7 $y''ctg\,2x+2y'=0$	2.8 $x^3y''+x^2y'=0$	2.9 $tgx\cdot y''=2y'$
2.10 $y''ctg\,2x=2y'$	2.11 $x^4y''+x^3y'=1$	2.12 $xy''+2y'=0$
2.13 $(1+x^2)y''+2xy'=0$	2.14 $x^5y''+x^4y'=0$	2,15 $x^2y''+xy'=0$
2.16 $xy''=y'\ln y'$	2.17 $y''tgx=y'$	2.18 $y''+2xy'^2=0$
2.19 $y''tgx=y'+1$	2.20 $y''tg5x=5y'$	2.21 $y''tg7x=7y'$
2.22 $2xy'y''=y'^2+1$	2.23 $(1+x)y''+y'=0$	2.24 $(1+\sin x)y''=\cos x\cdot y'$
2.25 $y''=-\frac{x}{y'}$	2.26 $x^2\cdot y''=y'^2$	2.27 $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=0$
2.28 $2xy'y''=y'^2-4$	2.29 $(1+x^2)y''=2xy'$	2.30 $ctgx\cdot y''+y'=0$

3 Ретін төмендетуге болатын теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз

3.1 $y''=y'e^y$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1.$	3.2 $2yy''+y'^2=0$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1.$	3.3 $yy''+y'^2=0$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1.$
3.4 $y''+2y'^3=0$, $y(0)=2,\quad y'(0)=1/3.$	3.5 $y''tgy=2y'^2$, $y(1)=\pi/2,\quad y'(1)=2.$	3.6 $2yy''=y'^2$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1.$
3.7 $2yy''-y'^2=1$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1.$	3.8 $y''=1/2y^3$, $y(0)=1/2,\quad y'(0)=\sqrt{2}.$	3.9 $y''=1-y'^2$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1.$
3.10 $y''^2=y'$, $y(0)=2/3$, $y'(0)=1$	3.11 $2yy''=y'^2+1$,	3.12 $y''=2-y$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$

	$y(0)=2$ $y'(0)=1$	
3.13 $y''=\frac{1}{y^3}$, $y(0)=1$ $y'(0)=0$	3.14 $yy''-2y'^2=0$, $y(0)=1$ $y'(0)=2$	3.15 $y''=y'+y'^2$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$
3.16 $y''+\frac{2y'^2}{1-y}=0$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$	3.17 $y''(1+y)=5y'^2$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$	3.18 $y''(3+2y)=2y'^2$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$
3.19 $4y''^2=1+y'^2$ $y(0)=1$ $y'(0)=0$	3.20 $y''(y-1)=2y'^2$, $y(0)=2$ $y'(0)=2$	3.21 $yy''=y'^2+1$, $y(0)=1$ $y'(0)=0$
3.22 $y''+yy'^3=0$, $y(0)=1$ $y'(0)=2$	3.23 $yy''-y'^2=0$, $y(0)=1$ $y'(0)=2$	3.24 $2yy''-y'^2=4$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$
3.25 $y''-y'e^y=0$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$	3.26 $y''(1+y)=y'^2+y'$ $y(0)=2$ $y'(0)=2$	2.27 $y''=\frac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0)=1$ $y'(0)=2$
3.28 $y''=\frac{1+y'^2}{2}$, $y(0)=0$ $y'(0)=0$	3.29 $y''\sqrt{y}=y'$, $y(0)=1$ $y'(0)=2$	3.30 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0)=0$ $y'(0)=0$

4 Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз

4.1 $y''+6y'+9y=0$	4.2 $y''-2y'+y=0$	4.3 $y''+2y'+17y=0$
4.4 $y''-4y'+4y=0$	4.5 $9y''-6y'+y=0$	4.6 $y''+2y'+y=0$
4.7 $y''-2y'+y=0$	4.8 $y''-6y'+25y=0$	4.9 $y''+4y'+4y=0$
4.10 $4y''-4y'+y=0$	4.11 $y''-6y'+9y=0$	4.12 $y''-2y'+10y=0$
4.13 $4y''+4y'+y=0$	4.14 $y''-3y'=0$	4.15 $y''-8y'+25y=0$
4.16 $y''+3y'+2y=0$	4.17 $y''-8y'+16y=0$	4.18 $y''-12y'+36y=0$
4.19 $y''+8y'+16y=0$	4.20 $y''+12y'+37y=0$	10.21 $y''+2y'+10y=0$
4.22 $y''+4y'+8y=0$	4.23 $y''-2y'+y=0$	4.24 $y''+12y'+36y=0$
4.25 $y''+4y=0$	4.26 $y''-2y'+5y=0$	4.27 $36y''+12y'+y=0$
4.28 $y''-10y'+25y=0$	4.29 $y''+10y'+25y=0$	4.30 $y''-2y'+2y=0$

5 Коши есебін шешіңіз

5.1 $y''-6y'+13y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	5.2 $y''+6y'+13y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=0$	5.3 $y''-2y'-3y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$
5.4 $y''+6y'+10y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1$	5.5 $y''-6y'+10y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=1$	5.6 $y''+9y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2$

5.7 $y''+4y'+8y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.8 $y''+2y'-3y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0$	5.9 $y''-4y'+5y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0$
5.10 $y''+4y'+5y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.11 $y''-4y'+8y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.12 $y''-2y'+10y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$
5.13 $y''+2y'+10y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1$	5.14 $y''-2y'+y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	5.15 $y''-6y'+8y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$
5.16 $y''-4y'+4y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	5.17 $y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$	5.18 $y''-10y'+26y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0$
5.19 $y''-4y'+13y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	5.20 $y''+4y'+4y=0,$ $y(0)=-2,\ y'(0)=0$	5.21 $y''+6y'+8y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2$
5.22 $y''-y'=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0$	5.23 $y''+2y'-8y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=2$	5.24 $y''+18y+32=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2$
5.25 $y''-6y'+9y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$	5.26 $y''+6y'+9y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	5.27 $y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$
5.28 $y''-6y'+25y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$	5.29 $y''-6y'+13y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=0$	5.30 $y''+y'=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0$

6 Сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін таңдау тәсілімен табыңыз

6.1 $y''+2y'-8y=x^2+1$	6.2 $y''-3y'=x-2$
6.3 $y''-2y'+y=5e^x$	6.4 $y''+2y'-8y=xe^{4x}$
6.5 $y''-2y'-8y=7e^{4x}$	6.6 $y''-2y'-8y=-e^{-2x}$
6.7 $y''+2y'=x^2+2$	6.8 $y''+2y'+y=-e^{-x}$
6.9 $y''-6y'+5y=2x^2-5$	6.10 $y''+6y'+5y=x^2-3$
6.11 $y''-6y'+8y=2xe^x$	6.12 $y''+6y'+8y=5e^{-4x}$
6.13 $y''+6y'+8y=xe^{-2x}$	6.14 $y''+y=5\cos x$
6.15 $y''+y=-\sin x$	6.16 $y''+y=\cos x-\sin x$
6.17 $y''-y'=x+x^2-x^3$	6.18 $y''+y'=-xe^x$

6.19	$y'' - y' = (1-x)e^{2x}$	6.20	$y'' + y' = (5-x)e^{x}$
6.21	$y'' - 4y' + 4y = -2e^{2x}$	6.22	$y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}$
6.23	$y'' - 4y' + 8y = (1+2x)e^{x}$	6.24	$y'' + 4y' + 8y = 5 - x^2$
6.25	$y'' + y' + y = (x+2)e^{x}$	6.26	$y'' - 5y' + 6y = -6x^2 + 2x + 5$
6.27	$y'' - 13y' + 12 = x - 1$	6.28	$y'' - y' = 5x^2 - 1$
6.29	$y'' + y' - 6y = (20x+14)e^{2x}$	6.30	$y'' - 2y' + y = 2x(1-x)$

7 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тұрақтыны вариациялау тәсілімен табыңыз

7.1	$y'' - 3y' + 2y = 1/(3+e^{-x})$	7.2	$y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$
7.3	$y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x} / (1+e^{-2x})$	7.4	$y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1+e^{3x})$
7.5	$y'' + 16y = 16 / \sin 4x$	7.6	$y'' + 4y = 8ctg\, 2x$
7.7	$y'' + 16y = 16 / \cos 4x$	7.8	$y'' - 6y' + 8y = 4/(1+e^{-2x})$
7.9	$y'' - 2y' = 4e^{-2x} / (1+e^{-2x})$	7.10	$y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} / (1+e^{-3x})$
7.11	$y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} ctg(x/2)$	7.12	$y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$
7.13	$y'' - 3y' + 2y = 1/(2+e^{-x})$	7.14	$y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \sin \pi x$
7.15	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} / (2+e^{x})$	7.16	$y'' - 3y' = 9e^{-3x} / (3+e^{-3x})$
7.17	$y'' + 4y = 4 / \sin 2x$	7.18	$y'' + y = 4ctgx$
7.19	$y'' + 4y = 4 / \cos 2x$	7.20	$y'' - 6y' + 8y = 4/(2+e^{-2x})$
7.21	$y'' + y' = e^{x} / (2+e^{x})$	7.22	$y'' + 6y + 8y = 4e^{-2x} / (2+e^{2x})$
7.23	$y'' + y = 2ctgx$	7.24	$y'' + 9y = 9 / \sin 3x$
7.25	$y'' - 3y' + 2y = 1/(1+e^{-x})$	7.26	$y'' + 9y = 9 / \cos 3x$
7.27	$y'' - 3y' + 2y = e^{x} / (1+e^{-x})$	7.28	$y'' - y' = e^{-x} / (2+e^{-x})$
7.29	$y'' + y = 1 / \sin x$	7.30	$y'' + 4y = 4ctg\, 2x$

7 Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз

8.1	$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}$	8.2	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.3	$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$

8.4	$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.5	$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 \end{cases}$	8.6	$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$
8.7	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + y_2, \\ y_2' = 5y_1 - y_2 \end{cases}$	8.8	$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.9	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 - 4y_2 \end{cases}$
8.10	$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.11	$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.12	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2, \\ y_2' = y_1 - 5y_2 \end{cases}$
8.13	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.14	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.15	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 \end{cases}$
8.16	$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + 7y_2, \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.17	$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.18	$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 7y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 7y_2 \end{cases}$
8.19	$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	8.20	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 7y_2, \\ y_2' = y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.21	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{3}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{3}{2}y_2 \end{cases}$
8.22	$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{5}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{5}{2}y_2 \end{cases}$	8.23	$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ y_2' = 5y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$	8.24	$\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = 7y_1 - y_2 \end{cases}$
8.25	$\begin{cases} y_1' = -0{,}4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 0{,}4y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.26	$\begin{cases} y_1' = 0{,}2y_1 - y_2, \\ y_2' = -0{,}2y_1 + y_2 \end{cases}$	8.27	$\begin{cases} y_1' = -2{,}1y_1 + y_2, \\ y_2' = 2{,}1y_1 - y_2 \end{cases}$
8.28	$\begin{cases} y_1' = -4{,}5y_1 - 0{,}5y_2, \\ y_2' = 4{,}5y_1 + 0{,}5y_2 \end{cases}$	8.29	$\begin{cases} y_1' = 0{,}8y_1 - 0{,}2y_2, \\ y_2' = -0{,}8y_1 + 0{,}2y_2 \end{cases}$	8.30	$\begin{cases} y_1' = 3{,}2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3{,}2y_1 - y_2 \end{cases}$

2.3 Типтік нұсқаның шешуі

1, 2 және 3 тапырмаларда ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер көсетілген. Мына кестеде осындай теңдеулердің түрлері мен оларды шешуге нұсқаулар келтірілген:

1	$y^{(n)} = f(x)$	Белгісіз функцияның туындысы x арқылы айқын түрде көрсетілген.	n рет интегралдау

2	$F(y, y', y'') = 0$ Дербес жағдай: $F(y, y'') = 0$	Теңдеуде x жоқ	Алмастыру: $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p\dfrac{dp}{dy} \end{cases}$
3	$F(x, y', y'') = 0$ Дербес жағдайлар: $F(y', y'') = 0$, $F(x, y'') = 0$, $F(y'') = 0$	Теңдеуде y немесе x және y жоқ	Алмастыру: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases}$
4	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$	Теңдеуде y және k –ші ретті туындысы жоқ	Алмастыру: $\begin{cases} y^{(k)} = p(x) \\ y^{(k+1)} = p' \\ \dots \\ y^{(n)} = p^{(n-k)} \end{cases}$

1. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' = \sin 2x \cos 2x.$

Шешуі: екінші ретті теңдеу берілген. Бұл кестедегі теңдеулердің бірінші түріне жатады. Екі рет интегралдау арқылы шешімін табамыз:

$$y' = \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = -\frac{1}{8}\cos 4x + C_1;$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{8}\cos 4x + C_1\right)dx = -\frac{1}{8}\int \cos 4x dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2.$$

Жауабы: $y = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2$ – жалпы шешімі.

2. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0.$

Шешуі: теңдеуде y жоқ, яғни кестедегі теңдеулердің үшінші түріне жатады. Алмастыру жасаймыз: $\begin{cases} y' = p(x), \\ y'' = p'. \end{cases}$ Сонда $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0$ $\to \left(1 + x^2\right)p' - 2xp = 0$ $\to \left(1 + x^2\right)dp - 2xpdx = 0$ – айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Теңдеудің екі жағын $p\left(1 + x^2\right)$ - қа бөліп, интегралдаймыз: $\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$ $\to$ $\frac{dp}{p} = \frac{d\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2}$ $\to$ $\ln|p| = \ln\left(1 + x^2\right) + \ln|C_1|$ $\to$ $p = C_1\left(1 + x^2\right).$ $p = y'$ болғандықтан, $y' = C_1\left(1 + x^2\right) \to$ $\to$ $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$ – жалпы шешімі.

Ескерту: $p\left(1 + x^2\right)$-қа бөлгенде теңдеудің $p = 0$ және $1 + x^2 = 0$ шешімдерін жоғалтуымыз мүмкін. Бірінші теңдеуден $y' = 0 \Rightarrow y = C,$ бұл шешімді жалпы шешімнен $C_1 = 0$ үшін алуға болады. Екінші теңдеудің x-тің нақты мәндерінде шешімі жоқ.

Жауабы: $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

3. Ретін төмендетуге болатын теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз: $y^3y''=-1,\ \ y(1)=1,\ \ \ y'(1)=0.$

Шешуі: кестедегі теңдеулердің екінші түріне жатады. $\begin{cases} y'=p(y), \\ y''=p\dfrac{dp}{dy} \end{cases}$ алмастыруы арқылы ретін төмендетеміз: $y^3y''=-1\to\ y^3p\dfrac{dp}{dy}=-1\to pdp=-\dfrac{dy}{y^3}$ $\to\ \dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2y^2}+C_1.$

Жалпы шешімді емес, ал дербес шешімді табатын осындай есептерде тұрақтыларды соңында жалпы шешімнен емес, ал пайда болған кезде бастапқы шарттарды қою арқылы тапқан тиімді: $p=y'=0$, $y=1$, $0=\dfrac{1}{2}+C_1\to C_1=-\dfrac{1}{2}$. Тұрақтының мәнін қоямыз: $\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2y^2}-\dfrac{1}{2}$ немесе $p^2=\dfrac{1}{y^2}-1\to p=\pm\sqrt{\dfrac{1-y^2}{y^2}}\to y'=\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Айнымалыларды ажыратып, интегралдаймыз: $dx=\pm\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}\ \to\ x=\mp\dfrac{1}{2}\int(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2)\ \to\ \to x=\mp\sqrt{1-y^2}+C_2$. Бастапқы шарттар бойынша C_2 -ні табамыз: $x=1$, $y=1$: $1=\mp\sqrt{1-1}+C_2\to C_2=1.$ Сонда теңдеудің шешімі $x=\mp\sqrt{1-y^2}+1$.

Жауабы: $x=\mp\sqrt{1-y^2}+1$.

Келесі тапсырмаларда $y''+py'+qy=0$ түріндегі 2-ші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеулерді қарастырамыз. Мұндай теңдеудің жалпы шешімі $k^2+pk+q=0$ сипаттаушы теңдеудің түбірлерінен тәуелді. Түбірлерін $k_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ формуласы бойынша анықтаймыз. Әртүрлі жағдайларын қарастырамыз:

а) егер түбірлері $k_1\neq k_2$ нақты сандар болса, онда жалпы шешімін $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ түрінде жазамыз;

б) егер түбірлері $k_1=k_2=k$ нақты сандар болса, онда жалпы шешімін $y=e^{kx}(C_1+C_2x)$ түрінде жазамыз;

в) егер түбірлері $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ комплекс сандар болса, онда жалпы шешімін $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ түрінде жазамыз.

4. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеуді шешіңіз:

а) $y''-11y'+10y=0$; ә) $y''+16y'+64y=0$.

Шешуі: а) сипаттаушы теңдеу құрып, түбірлерін табамыз: $k^2-11k+10=0,\ k_1=1, k_2=10.$ Демек, жалпы шешімі $y=C_1e^x+C_2e^{10x}$.

Жауабы: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{10x}$.

ә) сипаттаушы теңдеу құрып, түбірлерін табамыз: $k^2 + 16k + 16 = 0$, $k_1 = k_2 = -8$. Демек, жалпы шешімі $y = C_1 e^{-8x} + C_2 x e^{-8x}$.

Жауабы: $y = e^{-8x}(C_1 + xC_2)$.

5. Коши есебін шешіңіз: $y'' + 9y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 6$.

Шешуі: сипаттаушы теңдеуі $k^2 + 9 = 0.$ $k_{1,2} = 0 \pm 3i$ – сипаттаушы теңдеудің комплекс түбірлері. $\alpha = 0,\ \beta = 3$ болғандықтан, жалпы шешімі мына түрде болады: $y = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Дербес шешімін табу үшін бастапқы шарттарды қолданамыз: $y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$, $\begin{cases} C_1 \cos 3\cdot 0 + C_2 \sin 3\cdot 0 = 1 \\ -3C_1 \sin 3\cdot 0 + 3C_2 \cos 3\cdot 0 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$.

Жауабы: $y = \cos 3x + 2\sin 3x$.

6-7. Сызықтық біртекті емес теңдеу берілген.

а) $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$ теңдеуінің дербес шешімін таңдау тәсілімен;

ә) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ теңдеуін тұрақтыны вариациялау тәсілімен шешіңіз.

Шешуі: 2-ші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес $y'' + py' + qy = f(x)$ теңдеудің жалпы шешімінің құрамы мына түрде болады: $y_{б.е.} = y_{бірт.} + y_{д.ш.}$, мұндағы $y_{бірт}$- біртекті теңдеудің жалпы шешімі, $y_{д.ш.}$- біртекті емес теңдеудің дербес шешімі.

а) дербес шешімін таңдау тәсілі теңдеудің оң жағы $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$, мұндағы α, β - нақты сандар, $P_m(x), Q_n(x)$ - m-ші және n-ші дәрежелі көпмүшелер, түріндегі функция жағдайында қолданылады. Дербес жағдайларын қарастырамыз:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$, ($m = n = 0,\ \beta = 0$);

2) $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, ($m = n = 0,\ \alpha = 0$);

3) $f(x) = P_m(x)$, ($\alpha = 0,\ \beta = 0$);

4) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, ($\beta = 0$);

5) $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$, ($\alpha = 0$);

6) $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, ($m = n = 0$).

Егер *f(x)* осындай түрде берілсе, онда біртекті емес теңдеудің дербес шешімін $y_{д.ш.} = x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x]$, мұндағы $k \ge 0$ - $\alpha + \beta i$ санының біртекті теңдеудің сипаттаушы теңдеуі түбірлерімен сәйкестік саны (егер $\alpha + \beta i$ сипаттаушы теңдеуінің түбірі болмаса, онда k = 0); $l = \max(m, n)$; $p_l(x),\ q_l(x)$ – l - ші дәрежелі коэффициенттері белгісіз көпмүшелер (мысалы, егер l=0 болса, онда $p_0(x) = A,\ q_0(x) = B$; егер l=1 болса, онда $p_1(x) = Ax + B,\ q_1(x) = Cx + D$; егер l=2 болса, онда

$p_2(x) = Ax^2 + Bx + C,\ q_2(x) = A_1x^2 + B_1x + C_1)$. $p_l(x)$ және $q_l(x)$ коэффициенттерін анықтау үшін $y_{д.ш.}$, $y'_{д.ш.}$, $y''_{д.ш.}$ берілген теңдеуге қойып, тепе-теңдіктің екі жағындағы x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, теңдеулер жүйесін аламыз. Осы жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді анықтаймыз.

$y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$ теңдеуіне сәйкес біртекті теңдеудің сипаттаушы теңдеуін жазып, түбірлерін табамыз: $k^2 - 2k + 2 = 0$, $k_{1,2} = 1 \pm i$, $\alpha = \beta = 1$, демек, $y_{бірт.} = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

$$f(x) = 6e^{2x} = e^{2x}(6\cos 0x + 0\sin 0x) \to \left| \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ m = 0 \\ n = 0 \end{array} \right. \to \quad \alpha + \beta i = 2$$

саны сипаттаушы теңдеудің түбірлерімен сәйкес келмейді, демек k=0; m=n=0, l=max(0,0), сондықтан $p_0(x) = A,\ q_0(x) = B.$ Осы мәндерді $y_{д.ш.} = x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x]$ формуласына қоямыз: $y_{д.ш.} = x^0 e^{2x}[A\cos 0x + B\sin 0x] = Ae^{2x}$. Белгісіз A коэффициентін анықтау үшін $y_{д.ш.} = Ae^{2x}$, $y'_{д.ш.} = 2Ae^{2x}$, $y''_{д.ш.} = 4Ae^{2x}$ берілген теңдеуге қоямыз: $4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x} \quad \to \quad 2Ae^{2x} = 6e^{2x} \quad \to 2A = 6 \to A = 3$. Демек, $y_{д.ш.} = 3e^{2x}$.

Сондықтан, $y_{б.емес} = y_{бірт.} + y_{д.ш.} = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

Жауабы: $y = e^x(C_1 \cos x + C_1 \sin x) + 3e^{2x}$;

ә) коэффициенттері тұрақты 2-ші ретті сызықтық біртекті емес теңдеуді жоғарыда қарастырылған тәсілмен шеше алмаған жағдайда, тұрақтыны вариациялау тәсілімен шешуге болады. Бірақ бұл тәсіл көп жағдайда күрделі есептеулерге келтіреді. Бұл тәсіл бойынша берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеуді шешеміз: $y_{бірт.} = C_1y_1 + C_2y_2$, мұндағы y_1 және y_2- шешімдердің фундаменталды жүйесі. Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз: $y_{б.емес} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ (*), яғни тұрақтыларды вариациялаймыз. $C_1(x)$ және $C_2(x)$ белгісіз функцияларды анықтау үшін жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x) = f(x) \end{cases} \to C_i'(x) = \varphi_i(x) \to$$

$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + K_i \ \to \ C_i(x) = \Phi_i(x) + K_i$, ($i$ = 1, 2).

$C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларын (*) - ға қоямыз: $y_{б.емес} = (\Phi_1(x) + K_1)y_1 + (\Phi_2(x) + K_2)y_2$.

Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің сипаттаушы теңдеуін құрып, түбірлерін тауып, жалпы шешімін жазамыз:

$$k^2-2k+1=0,\ k_1=k_2=1,\ y_{бірт.}=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Біртекті емес теңдеуді шешу үшін тұрақтыларды вариациялаймыз:

$y_{б.емес}=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$ (*).

Теңдеулер жүйесін құрамыз: $\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0 \\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)(e^x+xe^x)=\dfrac{e^x}{1+x^2} \end{cases}$.

Бірінші теңдеуді (-1)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз:

$C_2'(x)e^x=\dfrac{e^x}{1+x^2}$ $\rightarrow$ $C_2'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\rightarrow$ $C_2(x)=arctg\,x+K_2$.

$C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0 \rightarrow C_1'(x)=-C_2'(x)x=-\dfrac{x}{1+x^2} \rightarrow C_1(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+K_1$.

$C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларын (*)-ға қоямыз:

$y_{б.емес}=(K_1-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2))e^x+(arctg\,x+K_2)xe^x$ немесе

$y_{б.емес}=[K_1e^x+K_2xe^x]+[xe^xarctg\,x-\dfrac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)]$.

Жауабы: $y=[K_1e^x+K_2xe^x]+[xe^xarctg\,x-\dfrac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)]$.

8. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} y_1'=-9y_1+4y_2 \\ y_2'=9y_1-4y_2. \end{cases}$

Шешуі: жүйені белгісіздерді жою тәсілімен шешеміз. Теңдеулерді қосамыз: $y_1'+y_2'=0 \rightarrow y_2'=-y_1'$.

Бірінші теңдеудің екі жағын дифференциалдап, $y_2'=-y_1'$ қолданамыз:

$y_1''=-9y_1'+4y_2'$ $\rightarrow$ $y_1''=-9y_1'+4(-y_1')$ $\rightarrow$ $y_1''+13y_1'=0$ – бұл коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеу.

$k^2+13k=0$, $k_1=0$, $k_2=-13$, демек $y_1=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-13x}=C_1+C_2e^{-13x}$.

$y_1'=-13C_2e^{-13x}$ болғандықтан, бірінші теңдеуден y_2 – ні табамыз:

$4y_2=y_1'+9y_1$ $\rightarrow$ $y_2=\dfrac{1}{4}\left(-13C_2e^{-13x}+9\cdot\left(C_1+C_2e^{-13x}\right)\right) \rightarrow y_2=\dfrac{9}{4}C_1-C_2e^{-13x}$.

Жауабы: $\begin{cases} y_1=C_1+C_2e^{-13x}, \\ y_2=\dfrac{9}{4}C_1-C_2e^{-13x}. \end{cases}$

Әдебиеттер тізімі

1 Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.:URSS, 2009,208с.

2 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008. –176 с.

3 Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.1,2. 2003.

4 Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 2002– 368 с.

5 Хасеинов К.А. Каноны математики. 2003.

6 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Дифференциальные уравнения. Конспект лекций для студентов специальности 5В060200 – Информатика. – Алматы. 2013.-46 с.

Мазмұны

1 №1 есептеу-сызба жұмыстары. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер..... 3
1.2 Тапсырмалар..... 3
1.3 Типтік нұсқаның шешуі …..... 6
2 №2 есептеу-сызба жұмыстары. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі..... 12
2.2 Тапсырмалар……..... 12
2.3 Типтік нұсқаның шешуі .....…… 17
Әдебиеттер тізімі..... 23

2016 ж. жиынтық жоспары, реті 140

Астраханцева Людмила Николаевна
Төлеуова Бағила Жаксылыққызы

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

5В060200 – Информатика мамандығының студенттері үшін есептеу – сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Редакторы Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ. Молдабекова

Басуға _____ қол қойылды
Таралымы 15 дана
Көлемі 1,6 есептік-баспа табақ

Пішімі 60 х 84 1/16
Баспаханалық қағаз№1
Тапсырыс_____Бағасы 800 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126