Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В060200 – Информатика

Алматы, 2016

СОСТАВИТЕЛИ: Астраханцева Л.Н., Толеуова Б.Ж. Дифференциальные уравнения. Методические указания и задания к выполнению расчетно - графических работ для студентов специальности 5В060200 -Информатика. - Алматы: АУЭС, 2016.- 27 стр.

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам содержат расчётно-графические работы №1, №2 дисциплины «Дифференциальные уравнения» для студентов специальности 5В060200 – Информатика. Приведены основные теоретические вопросы программы. Дано решение типового варианта.

Табл. 17, библиогр. 6 назв.

Рецензент: доцент каф. ИКГ Гармашова Ю.М.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2016 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2016 г.

Введение

В настоящее время математические методы находят широкое применение в самых различных областях науки и техники, они стали составной частью любой технической дисциплины. Это предъявляет повышенные требования к подготовке инженеров и научных работников и приводит к необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышения уровня фундаментальной математической подготовки.

Методические указания содержат расчетно-графические работы по разделам «Дифференциальные уравнения первого порядка, высшего порядка, системы дифференциальных уравнений».

По каждой части приведены теоретические вопросы. Дано решение типового варианта по каждому РГР.

Номер варианта каждого студента определяется по списку группы. Расчетно -графическая работа должна выполняться четко и разборчиво в ученической тетради.

1 Расчётно-графическая работа №1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Цели: ознакомиться с основными понятиями дифференциальных уравнений, рассмотреть методы решения некоторыхдифференциальных уравнений первого порядка.

1.1 Теоретические вопросы

1. Основные понятиядифференциальных уравнений. Геометрическая интерпретация. Задача Коши.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
3. Линейные уравнения первого порядка.
4. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
5. Приведение дифференциального уравнения к системе уравнений.

1.2 Расчётные задания

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$	1.2 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$	1.3 $\frac{dy}{dx}=yx$
1.4 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$	1.5 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}$	1.6 $\frac{dy}{dx}=2yx$

1.7 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{5x}$	1.8 $\frac{dy}{dx}=-yx$	1.9 $\frac{dy}{dx}=2y^2x^2$
1.10 $\frac{dy}{dx}=-2yx$	1.11 $\frac{dy}{dx}=yx^2$	1.12 $\frac{dy}{dx}=y\sqrt{x}$
1.13 $\frac{dy}{dx}=-yx^2$	1.14 $\frac{dy}{dx}=y^2x$	1.15 $\frac{dy}{dx}=y^2$
1.16 $\frac{dy}{dx}=y\frac{1}{\sqrt{x}}$	1.17 $\frac{dy}{dx}=y^2x^2$	1.18 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$
1.19 $\frac{dy}{dx}=-y^2x$	1.20 $\frac{dy}{dx}=2y^2$	1.21 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}$
1.22 $\frac{dy}{dx}=y^3x$	1.23 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$	1.24 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$
1.25 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$	1.26 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}$	1.27 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{3x}$
1.28 $\frac{dy}{dx}=4yx$	1.29 $\frac{dy}{dx}=2y\frac{1}{\sqrt{x}}$	1.30 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{x}$

2 Найти решение задачи Коши.

2.1 $y'=y^2,\ y(0)=1$	2.2 $y'=y^2,\ y(0)=-1$
2.3 $y'=y^2,\ y(0)=0$	2.4 $y'=y^2,\ y(1)=2$
2.5 $y'=y^2,\ y(-1)=2$	2.6 $y'=y^2,\ y(1)=-3$
2.7 $y'=y^2,\ y(-1)=-4$	2.8 $y'=-y^2,\ y(0)=1$
2.9 $y'=-y^2,\ y(0)=-2$	2.10 $y'=-y^2,\ y(2)=5$
2.11 $y'=-y^2,\ y(2)=-3$	2.12 $y'=-y^2,\ y(-1)=4$
2.13 $y'=2y^2,\ y(0)=3$	2.14 $y'=-3y^2,\ y(0)=-1$
2.15 $y'=y^3,\ y(0)=2$	2.16 $y'=-y^3,\ y(0)=4$
2.17 $y'=\frac{1}{y^2},\ y(1)=1$	2.18 $y'=\frac{1}{y^2},\ y(0)=-1$
2.19 $y'=1+y^2,\ y(0)=0$	2.20 $y'=4+y^2,\ y(1)=0$
2.21 $y'=y^2-1,\ y(0)=1$	2.22 $y'=y^2-1,\ y(0)=2$
2.23 $y'=y^2-1,\ y(0)=-2$	2.24 $y'=1-y^2,\ y(0)=-1$
2.25 $y'=\frac{1}{y},\quad y(0)=-2$	2.26 $y'=\frac{y}{1-y^2},\quad y(0)=1$
2.27 $y'=3y^2,\quad y(0)=1$	2.28 $y'=1-y^2,\ y(0)=2$

2.29 $y' = \dfrac{3y}{4-y^2}$, $y(0)=1$	2.30 $y' = \dfrac{3y}{4-y}$, $y(0)=1$

3 Найти общее решение (общий интеграл) уравнения с разделяющимися переменными.

3.1 $4x-3yy' = 3x^2yy' - 2xy^2$	3.2 $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$	3.3 $\sqrt{4+y^2} - yy' = x^2yy'$
3.4 $\sqrt{3+y^2} - yy' = x^2yy'$	3.5 $6x-6yy' = 2x^2yy' - 3xy^2$	3.6 $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3.7 $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$	3.8 $yy'\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$	3.9 $6x-6yy' = 3x^2yy' - 2xy^2$
3.10 $x\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{4+x^2} = 0$	3.11 $y(e^x+4)dy - e^xdx = 0$	3.12 $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$
3.13 $2x-2yy' = x^2yy' - 2xy^2$	3.14 $x\sqrt{4+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$	3.15 $(e^x+8)dy - ye^xdx = 0$
3.16 $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$	3.17 $6x-yy' = x^2yy' - 3xy^2$	3.18 $y\ln y + xy' = 0$
3.19 $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$	3.20 $6x-2yy' = 2x^2yy' - 3xy^2$	3.21 $(e^x+1)y' = ye^x$
3.22 $y(1+\ln y) + xy' = 0$	3.23 $(e^x+3)yy' = e^x$	3.24 $\sqrt{3+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$
3.25 $x-yy' = x^2yy' - xy^2$	3.26 $\sqrt{5+y^2} + 4(x^2y+y)y' = 0$	3.27 $(e^x+1)yy' = e^x$
3.28 $\sqrt{2+y^2} + 3(x^2+1)yy' = 0$	3.29 $2x-yy' = x^2yy' - xy^2$	3.30 $\sqrt{2-x^2}y' + 2x\left(1+y^2\right) = 0$

4 Решить однородное уравнение.

4.1 $y' = 2\dfrac{y}{x} + 1$	4.2 $y' = 3\dfrac{y}{x} + 2$	4.3 $y' = 3\dfrac{y}{x} - 2$
4.4 $y' = 5\dfrac{y}{x} + 1$	4.5 $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1$	4.6 $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}$

4.7 $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+4$	4.8 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$	4.9 $y'=\frac{y^2}{x^2}+5\frac{y}{x}+4$
4.10 $y'=\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y}{x}+4$	4.11 $y'=\frac{y^2}{x^2}-5\frac{y}{x}+9$	4.12 $y'=\frac{y^2}{x^2}+3\frac{y}{x}+5$
4.13 $y'=\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y}{x}+8$	4.14 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+2$	4.15 $y'=\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+1$
4.16 $xy'=-\frac{y^2}{x}+y$	4.17 $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$	4.18 $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$
4.19 $x^2y'=\frac{y^3}{x}+xy$	4.20 $x^2y'=3y^2+xy$	4.21 $y'=-2\frac{y}{x}+3$
4.22 $y'=-3\frac{y}{x}-4$	4.23 $y'=-2\frac{y}{x}-3$	4.24 $y'=2\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+2$
4.25 $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$	4.26 $2y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+3$	4.27 $y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$
4.28 $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$	4.29 $y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+6$	4.30 $4y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+5$

5 Найти общее решение (общий интеграл) однородного уравнения.

5.1 $y'=\frac{x+2y-3}{2x-2}$	5.2 $y'=\frac{x+y-2}{2x-2}$	5.3 $y'=\frac{-x+3y-4}{3x+3}$
5.4 $y'=\frac{2y-2}{x+y-2}$	5.5 $y'=\frac{x+y-2}{3x-y-2}$	5.6 $y'=\frac{2x+y-3}{x-1}$
5.7 $y'=\frac{x+7y-8}{9x-y-8}$	5.8 $y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}$	5.9 $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$
5.10 $y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3}$	5.11 $y'=\frac{x-2y+3}{-2x-2}$	5.12 $y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9}$
5.13 $y'=\frac{2x+3y-5}{5x-5}$	5.14 $y'=\frac{4y-8}{3x+2y-7}$	5.15 $y'=\frac{x+3y-4}{5x-y-4}$
5.16 $y'=\frac{-2x+y+3}{x-1}$	5.17 $y'=\frac{x+2y-3}{x-1}$	5.18 $y'=\frac{3x+2y-1}{x+1}$
5.19 $y'=\frac{5y+5}{4x+3y-1}$	5.20 $y'=\frac{x+4y-5}{6x-y-5}$	5.21 $y'=\frac{x+y+2}{x+1}$

5.22 $y'=\frac{2x+y-3}{4x-4}$	5.23 $y'=\frac{2x+y-3}{2x-2}$	5.24 $y'=\frac{y}{2x+2y-2}$
5.25 $y'=\frac{x+5y-6}{7x-y-6}$	5.26 $y'=\frac{x+y-4}{x-2}$	5.27 $y'=\frac{x+y-3}{-x+y+1}$
5.28 $y'=\frac{-2x+3y+1}{3x+3}$	5.29 $y'=\frac{6y-6}{5x+4y-9}$	5.30 $y'=\frac{x+6y-7}{8x-y-7}$

6 Решить линейное уравнение.

6.1 $y'-\frac{y}{x}=x^3,\ y(1)=0$	6.2 $y'-\frac{y}{x}=\sqrt{x},\ y(4)=2$
6.3 $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y(1)=1$	6.4 $y'+\frac{y}{x}=x,\ y(-1)=1$
6.5 $y'+\frac{y}{x}=\sqrt{x},\ y(4)=-1$	6.6 $y'+\frac{y}{x}=e^x,\ y(1)=0$
6.7 $y'+\frac{y}{x}=\frac{2}{1+x^2},\ y(1)=0$	6.8 $y'-2xy=e^{x^2},\ x, y(0)=-1$
6.9 $y'-2xy=e^{x^2},\ x, y(-1)=2$	6.10 $y'+2xy=e^{-x^2},\ y(1)=2$
6.11 $y'+2xy=x,\ y(0)=1$	6.12 $y'+2xy=2x,\ y(0)=-2$
6.13 $y'+\frac{y}{x}=\cos x,\ y(\pi)=0$	6.14 $y'-\frac{y}{x}=\ln x,\ y(e)=1$
6.15 $y'-\frac{2y}{x}=x,\ y(1)=1$	6.16 $y'-\frac{2y}{x}=1,\ y(2)=-2$
6.17 $y'-\frac{2y}{x}=\sqrt[3]{x},\ y(8)=-1$	6.18 $y'+\frac{2y}{x}=\sqrt{x},\ y(4)=0$
6.19 $y'+\frac{2y}{x}=\frac{\cos 2x}{x^2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	6.20 $y'-2xy=-x,\ y(0)=-1$
6.21 $y'-\frac{y}{x}=\sqrt[3]{x},\ y(8)=1$	6.22 $y'-\frac{y}{x}=x^2e^x,\ y(1)=1$
6.23 $y'-2xy=x,\ y(0)=1$	6.24 $y'-2xy=x^2e^{x^2},\ y(1)=2$
6.25 $y'+2xy=xe^{-x^2},\ y(0)=2$	6.26 $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2},\ y(1)=1$
6.27 $y'-y\cos x=\sin 2x,\ y(0)=-1$	6.28 $y'-4xy=-4x^3,\ y(0)=-\frac{1}{2}$
6.29 $y'+\frac{y}{x}=3x,\ y(1)=1$	6.30 $y'+\frac{y}{x}=\sin x,\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}$

7 Решить уравнение Бернулли.

7.1 $y' + y = xy^2$	7.2 $y' + 2y = xy^3$	7.3 $y' - y = xy^2$
7.4 $y' + y = x\sqrt{y}$	7.5 $y' - y = -x\sqrt{y}$	7.6 $y' - 2y = xy^3$
7.7 $y' + y = x^2y^2$	7.8 $y' + 2y = x^2y^2$	7.9 $y' - y = x^2y^2$
7.10 $y' - y = 2xy^2$	7.11 $y' + y = 2xy^3$	7.12 $y' - 2y = x^2y^2$
7.13 $y' - \frac{1}{3}y = xy^2$	7.14 $y' + \frac{2}{x}y = y^2$	7.15 $y' - 2y = \frac{1}{2}xy^2$
7.16 $y' + \frac{1}{x}y = y^2$	7.17 $y' - \frac{2}{x}y = y^2$	7.18 $y' - \frac{1}{x}y = y^2$
7.19 $y' + 2y = 2xy^2$	7.20 $y' + 3y = xy^2$	7.21 $y' - 3y = xy^3$
7.22 $y' + 2y = y^2e^x$	7.23 $y' + 2y == y^2e^{-2x}$	7.24 $y' + 2y = xy^2$
7.25 $y' + 2y = y^2e^{-5x}$	7.26 $y' + 4y = 2\frac{x}{y}$	7.27 $y' - 2y = y^2e^{-x}$
7.28 $y' + \frac{2}{x}y = 2y^2$	7.29 $y' - \frac{1}{4}y = xy^2$	7.30 $y' + 3y = \frac{x}{y}$

8 Решить уравнение в полных дифференциалах.

8.1 $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$	8.2 $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$
8.3 $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0$	8.4 $3x^2e^ydx + \left(x^3e^y - 1\right)dy = 0$
8.5 $\left(y^2 + y\sec^2 x\right)dx + (2xy + tgx)dy = 0$	8.6 $xy^2dx + y\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$
8.7 $\left(3x^2y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0$	8.8 $2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2y + y^2\right)dy = 0$
8.9 $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0$	8.10 $xe^{y^2}dx + \left(x^2ye^{y^2} + tg^2y\right)dy = 0$
8.11 $\left(1 + \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$	8.12 $\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0$
8.13 $\left(xy^2 + x/y^2\right)dx + \left(x^2y - x^2/y^3\right)dy = 0$	8.14 $\left(5xy^2 - x^3\right)dx + \left(5x^2y - y\right)dy = 0$
8.15 $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0$	8.16 $\left(y^3 + \cos x\right)dx + \left(3xy^2 + e^y\right)dy = 0$
8.17 $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$	8.18 $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$
8.19 $\frac{1+xy}{yx^2}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$	8.20 $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$

8.21	$\left(\frac{1}{y}+\cos x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$	8.22	$\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$
8.23	$10xydx+\left(5x^2-\sin y\right)dy=0$	8.24	$e^y dx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$
8.25	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$		
8.26	$(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0$		
8.27	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$		
8.28	$(\cos(x+y^2)+\sin x)dx+2y\cos\left(x+y^2\right)dy=0$		
8.29	$\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$		
8.30	$\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$		

1.3 Решение типового варианта

В первых трёх заданиях даны уравнения с разделяющимися переменными. Чтобы их решить, поступаем так: если уравнение содержит производные, то записываем их через дифференциалы, т.е. $y'=\frac{dy}{dx}$, затем умножаем обе части уравнения на dx и преобразуем уравнение так, чтобы перед dx была функция, зависящая только от x, а перед dy - только от y. Будет получено уравнение с разделёнными переменными, каждую часть которого проинтегрируем. Если результат интегрирования можно записать в виде, разрешённом относительно y, то это общее решение, если в неразрешённом, то - общий интеграл.

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=x^3y^3$.

Решение: $\frac{dy}{dx}=x^3y^3 \rightarrow dy=x^3y^3dx \rightarrow dy=x^3y^3dx.$ Разделим обе части уравнения на y^3, получим уравнение с разделёнными переменными $\frac{dy}{y^3}=x^3dx$. Проинтегрируем его:

$$\int\frac{dy}{y^3}=\int x^3dx \rightarrow \frac{y^{-2}}{-2}=\frac{x^4}{4}+c \rightarrow -\frac{1}{2y^2}=\frac{x^4}{4}+c.$$

Ответ: $-\frac{1}{2y^2}=\frac{x^4}{4}+c$ – общий интеграл уравнения.

2. Найти решение задачи Коши: $y' = -5y^2$, $y(0) = \frac{1}{5}$.

Решение: $y' = -5y^2 \to \frac{dy}{dx} = -5y^2 \to dy = -5y^2 dx$. Делим последнее равенство на y^2 и интегрируем: $\frac{dy}{y^2} = -5dx \to -\frac{1}{y} = -5x - c \to y = \frac{1}{5x + c}$.

Итак, общее решение $y = \frac{1}{5x + c}$.

Найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 0 + c} \to c = 5$, $y = \frac{1}{5x + 5}$ – частное решение. Заметим, что при делении уравнения на y^2 могло быть потеряно решение $y = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = 0$ удовлетворяет этому уравнению. Кроме того, $y = 0$ является особым решением, т.к. его нельзя получить из общего решения при определённом значении константы *c*.

Ответ: $y = \frac{1}{5x + 5}$, $y = 0$.

3. Найти общее решение (общий интеграл) уравнения с разделяющимися переменными $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$.

Решение: запишем y' через дифференциалы и умножим на dx, получим $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$. Теперь разделим переменные, деля на $(1 + e^{2x})$, и проинтегрируем полученное равенство: $y^2 dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \to \frac{y^3}{3} = arctg\, e^x + \frac{c}{3}$. Разрешая относительно y последнее равенство, получим общее решение.

Ответ: $y = \sqrt[3]{c + 3arctg\, e^x}$ – общее решение.

4. Решить однородное уравнение: $y' = -\frac{y}{x} - 1$.

Решение: задано однородное относительно переменных уравнение первого порядка. Такие уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $u = \frac{y}{x} \to \begin{cases} y = ux \\ y' = u'x + u \end{cases}$, т.е.

$y' = -\frac{y}{x} - 1 \to u'x + u = -u - 1 \to u'x = -2u - 1$.

Разделяем переменные в последнем уравнении и проинтегрируем: $x\frac{du}{dx}=-(2u+1)$ $\rightarrow$ $xdu=-(2u+1)dx$ $\rightarrow$ $\frac{du}{2u+1}=-\frac{dx}{x}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\int\frac{d(2u+1)}{2u+1}=-\ln|x|+\ln|C|$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\ln|2u+1|=-\ln|x|+\ln|C|$ $\rightarrow$ $\sqrt{2u+1}=\frac{C}{x}$.

Делаем обратную замену: $\sqrt{2\cdot\frac{y}{x}+1}=\frac{C}{x}\rightarrow x\sqrt{2\cdot\frac{y}{x}+1}=C$ – общий интеграл.

Ответ: $x\sqrt{2\frac{y}{x}+1}=C$.

5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\frac{2x+y-1}{2x-2}$.

Решение: задано уравнение, приводящееся к однородному. При решении таких уравнений следует учесть следующее: если дано уравнение вида $y'=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ (*), то возможны случаи:

а) $c=c_1=0$, тогда (*) однородное уравнение;

б) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$, тогда замена $\begin{cases} x=x_1+h \\ y=y_1+k \end{cases}$ приводит уравнение к однородному. В замене h и k решения системы $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, тогда $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=t$, поэтому (*) $\rightarrow$ $y'=\frac{ax+by+c}{t(ax+by)+c_1}$. Теперь замена $ax+by=z$ приведёт уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

В нашем случае $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$, поэтому решаем систему $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 2x-2=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$. После замены $\begin{cases} x=x_1+1 \\ y=y_1-1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $y'=y_1'$ уравнение примет вид $y_1'=\frac{2x_1+y_1}{2x_1}$. Это однородное уравнение, решаем его как в предыдущем задании: $y_1'=\frac{2x_1+y_1}{2x_1}$ $\rightarrow$ замена $u=\frac{y_1}{x_1}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} y_1=ux_1 \\ y_1'=u'x_1+u \end{cases}$ $\rightarrow$

$$u'x_1 + u = \frac{2x_1 + ux_1}{2x_1} \to \ldots \to \frac{2du}{2-u} = \frac{dx_1}{x_1} \to -2\ln|2-u| = \ln x_1 - \ln c \to x_1(2-u)^2 = c.$$

Делая обратную замену, получим общий интеграл $\frac{(2x-y-3)^2}{x-1} = c$.

Ответ: $\frac{(2x-y-3)^2}{x-1} = c$.

6. Решить линейное уравнение: $y' - 4xy = xe^{x^2}$, $y(0) = 1$.

Решение: задано линейным неоднородное уравнение первого порядка. Существует два способа решения таких уравнений:

а) метод Бернулли или метод подстановки;

б) метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим оба способа.

Метод Бернулли: делаем подстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

Данное уравнение примет вид: $u'v + uv' - 4xuv = xe^{x^2}$ $\to$ $u'v + u(v' - 4xv) = xe^{x^2}$ (*). Выбираем функцию v так, чтобы $(v' - 4xv) = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому $v' - 4xv = 0$ $\to$ $\frac{dv}{dx} = 4xv$ $\to$ $\frac{dv}{v} = 4xdx$ $\to$ $\ln|v| = 2x^2$ $\to$ $v = e^{2x^2}$.

С учетом выбранной функции v, из уравнения (*) получим:

$$u'v = xe^{x^2} \to \quad u'e^{2x^2} = xe^{x^2} \quad \to \quad \frac{du}{dx} = xe^{-x^2} \quad \to \quad du = xe^{-x^2}dx \quad \to$$

$$u = \int xe^{-x^2}dx = \int e^{-x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C.$$

Функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ найдены, следовательно, $y = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right) \cdot e^{2x^2}$ или $y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + Ce^{2x^2}$ – общее решение. Используем начальное условие $y(0) = 1$:

$$-\frac{1}{2}e^0 + Ce^0 = 1 \to C = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2}e^{2x^2}$.

Метод Лагранжа: для данного линейного неоднородного уравнения $y' - 4xy = xe^{x^2}$ соответствующим однородным уравнением будет уравнение $y' - 4xy = 0$.

Оно является также уравнением с разделяющимися переменными: $y' - 4xy = 0$ $\to$ $\frac{dy}{dx} = 4xy$ $\to$ $\frac{dy}{y} = 4xdx$ $\to$ $\ln|y| = 2x^2 + \ln|C|$ $\to$ $y = Ce^{2x^2}$ –

общее решение соответствующего линейного однородного уравнения. Ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{2x^2}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. Подставим $y = C(x)e^{2x^2}$ и $y' = C'(x)e^{2x^2} + 4xe^{2x^2}C(x)$ в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{2x^2} + C(x)\cdot 4xe^{2x^2} - 4x\cdot C(x)e^{2x^2} = xe^{x^2} \to C'(x)e^{2x^2} = xe^{x^2} \to$$

$$C'(x) = xe^{-x^2} \to C(x) = \int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1.$$

Итак, $y = C(x)e^{2x^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1\right)\cdot e^{2x^2} = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C_1e^{2x^2}$ – общее решение данного уравнения. Используем начальное условие $y(0) = 1$: $-\frac{1}{2}e^0 + C_1e^0 = 1 \to C_1 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2}e^{2x^2}$.

7. Решить уравнение Бернулли: $y' + y = xy^{\frac{1}{2}}$.

Решение: задано уравнение Бернулли, где $n = 1/2$; заменой $z = y^{1-n} = y^{1/2} \to y = z^2$; $y' = 2z\cdot z'$ его можно привести к линейному неоднородному уравнению, методы решения которого были рассмотрены в предыдущем задании. Сделаем замену: $2z\cdot z' + z^2 = x\cdot z \to z' + \frac{1}{2}\cdot z = \frac{1}{2}\cdot x.$

Полученное линейное уравнение решим методом Бернулли: делаем замену $z = uv;\ z' = u'v + uv'$, тогда $z' + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x \to u'v + uv' + \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}x$.

Полагаем $v' + \frac{1}{2}v = 0 \to \frac{dv}{v} + \frac{dx}{2} = 0 \to \ln v + \frac{x}{2} = 0 \to v = e^{-\frac{x}{2}}$. Таким образом, $u'\cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} \to \frac{du}{dx}\cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} \to du = \frac{x}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}dx \to u = xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c.$ Итак, $z = u\cdot v = e^{-\frac{x}{2}}\left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c\right) = x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2$. Окончательно, $y = z^2$, т.е. $y = \left(x + ce^{-\frac{x}{2}} - 2\right)^2$.

При решении уравнения Бернулли можно обойтись без замены, сразу решать его как линейное неоднородное, одним из двух известных методов.

Применим метод Лагранжа. Составляем соответствующее однородное уравнение и его общее решение: $y'+y=0 \;\to\; \frac{dy}{dx}=-y \;\to\; \frac{dy}{y}=-dx \;\to$ $\ln y=-x+\ln c \;\to\; y=ce^{-x}$. Варьируем c и полагаем, что $y=c(x)e^{-x}$ (*) – общее решение данного уравнения. Подставляем $y=c(x)e^{-x}$ и $y'=c'(x)e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$ в исходное уравнение:

$$c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}+c(x)e^{-x}=x(c(x)e^{-x})^{\frac{1}{2}} \;\to\; c'(x)=x\sqrt{c(x)}e^{\frac{x}{2}} \;\to$$

$$\frac{dc(x)}{\sqrt{c(x)}}=xe^{\frac{x}{2}} \to\ldots\to 2\sqrt{c(x)}=2xe^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}+2c_1 \to c(x)=(xe^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+c_1)^2.$$

Подставляем найденную функцию в (*): $y=(xe^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+c_1)^2e^{-x}$ или, если вынести $e^{\frac{x}{2}}$ за скобки, то $y=(x-2+c_1e^{-\frac{x}{2}})^2$ – общее решение уравнения Бернулли. Таким образом, при любом подходе к решению получен один ответ.

Ответ: $y=\left(x+ce^{-\frac{x}{2}}-2\right)^2$.

8. Решить уравнение в полных дифференциалах: $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0.$

Решение: проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.е. проверим выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$: так как $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=e^y+x$, то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. Следовательно, условие выполнено, и левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции u: $du=(x+y-1)dx+(e^y+1)dy$. Т.к. $du=0$, то $u=C$ – общий интеграл дифференциального уравнения. Итак, наша задача по полному дифференциалу функции найти саму функцию. Неизвестную функцию u: найдём по одной из формул $u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+c$ или $u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+c$. В качестве x_0 и y_0 можно взять произвольные числа, поэтому пусть $x_0=0$ и $y_0=0$. По второй формуле имеем:

$$u=\int_0^x (x+y-1)dx+\int_0^y e^y dy+c=\left(\frac{x^2}{2}+xy-x\right)\Bigg|_0^x+e^y\Big|_0^y+c=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1+c.$$

Итак, $u=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1+c,\ u=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=C$, где C=1-c.

Ответ: $\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=C$ – общий интеграл.

2 Расчётно-графическая работа №2. Дифференциальные уравнения высшего порядка. Системы дифференциальных уравнений

Цели: изучить различные методы решения дифференциальных уравнений высшего порядка и систем дифференциальных уравнений.

2.1 Теоретические вопросы

1. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
2. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.
3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.
4. Линейные неоднородные уравненияс постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных.
5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами, метод подбора частного решения.
6. Системы дифференциальных уравнений**.**

2.2 Расчётные задания

1 Решить уравнение второго порядка.

1.1 $y''=\sin 2x$	1.2 $y''=e^{2x}$	1.3 $y''=xe^x$
1.4 $y''=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	1.5 $y''=\frac{1}{1+x^2}$	1.6 $y''=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}$
1.7 $y''=xe^{-x}$	1.8 $y''=\cos 7x$	1.9 $y''=\cos^2 x$
1.10 $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$	1.11 $y''=\frac{1}{1+x}$	1.12 $y''=\frac{x}{(x+1)^3}$
1.13 $y''=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$	1.14 $y''=1-e^{-\frac{x}{2}}$	1.15 $y''=1-e^{-\frac{x}{2}}$

1.16 $y''=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$	1.17 $y''=\sin^2 2x$	1.18 $y''=\sqrt{x}(1-x)^2$
1.19 $y''=\frac{1}{\cos^2 2x}$	1.20 $y''=\frac{1}{\sin^2 x}$	1.21 $y''=-\frac{1}{1+x^2}$
1.22 $y''=\sin x\cdot\cos x$	1.23 $y''=\cos^2 x$	1.24 $y''=-\sin 4x$
1.25 $y''=x-\frac{1}{x^3}$	1.26 $y''=2^x$	1.27 $y''=\frac{1}{2x+1}$
1.28 $y''=(2+x)^3$	1.29 $y''=\sin x\cdot\cos^2 x$	1.30 $y''=3e^{2x}$

2 Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка.

2.1 $y''x\ln x=y'$	2.2 $xy''+y'=1$	2.3 $2xy''=y'$
2.4 $xy''=y'-1$	2.5 $xy''=y'$	2.6 $2xy'y''=y'^2-1$
2.7 $y''ctg2x+2y'=0$	2.8 $x^3y''+x^2y'=0$	2.9 $tgx\cdot y''=2y'$
2.10 $y''ctg2x=2y'$	2.11 $x^4y''+x^3y'=1$	2.12 $xy''+2y'=0$
2.13 $(1+x^2)y''+2xy'=0$	2.14 $x^5y''+x^4y'=0$	2.15 $x^2y''+xy'=0$
2.16 $xy''=y'\ln y'$	2.17 $y''tgx=y'$	2.18 $y''+2xy'^2=0$
2.19 $y''tgx=y'+1$	2.20 $y''tg5x=5y'$	2.21 $y''tg7x=7y'$
2.22 $2xy'y''=y'^2+1$	2.23 $(1+x)y''+y'=0$	2.24 $(1+\sin x)y''=\cos x\cdot y'$
2.25 $y''=-\frac{x}{y'}$	2.26 $x^2y''=y'^2$	2.27 $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=0$
2.28 $2xy'y''=y'^2-4$	2.29 $(1+x^2)y''=2xy'$	2.30 $ctgx\cdot y''+y'=0$

3 Решить задачу Коши для уравнения, допускающего понижения порядка.

3.1 $y''=y'e^y$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	3.2 $2yy''+y'^2=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$	3.3 $yy''+y'^2=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$
3.4 $y''+2y'^3=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=1/3.$	3.5 $y''tgy=2y'^2$, $y(1)=\pi/2,\ y'(1)=2.$	3.6 $2yy''=y'^2$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$
3.7 $y''+\frac{2y'^2}{1-y}=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	3.8 $y''=0{,}5y^{-3}$, $y(0)=1/2,\ y'(0)=\sqrt{2}.$	3.9 $y''=\frac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$

3.10 $y''^2 = y'$, $y(0)=2/3,\ y'(0)=1.$	3.11 $2yy'' = y'^2+1$, $y(0)=2,\ y'(0)=1.$	3.12 $y''=2-y$, $y(0)=2,\ y'(0)=2.$
3.13 $y''=y^{-3}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$	3.14 $yy''-2y'^2=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$	3.15 $y''=y'+y'^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$
3.16 $2yy''-y'^2=1$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$	3.17 $y''(1+y)=5y'^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	3.18 $y''(3+2y)=2y'^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$
3.19 $4y''^2=1+y'^2$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$	3.20 $y''(y-1)=2y'^2$, $y(0)=2,\ y'(0)=2.$	3.21 $yy''=y'^2+1$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$
3.22 $y''+yy'^3=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$	3.23 $yy''-y'^2=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$	3.24 $2yy''-y'^2=4$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$
3.25 $y''-y'e^y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	3.26 $y''(1+y)=y'^2+y'$, $y(0)=2,\ y'(0)=2.$	2.27 $y''=1-y'^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$
3.28 $y''=\dfrac{1+y'^2}{2}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$	3.29 $y''\sqrt{y}=y'$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$	3.30 $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4 Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

4.1 $y''+6y'+9y=0$	4.2 $y''-2y'+y=0$	4.3 $y''+2y'+17y=0$
4.4 $y''-4y'+4y=0$	4.5 $9y''-6y'+y=0$	4.6 $y''+2y'+y=0$
4.7 $y''-2y'+y=0$	4.8 $y''-6y'+25y=0$	4.9 $y''+4y'+4y=0$
4.10 $4y''-4y'+y=0$	4.11 $y''-6y'+9y=0$	4.12 $y''-2y'+10y=0$
4.1 $4y''+4y'+y=0$	4.14 $y''-3y'=0$	4.15 $y''-8y'+25y=0$
4.16 $y''+3y'+2y=0$	4.17 $y''-8y'+16y=0$	4.18 $y''-12y'+36y=0$
4.19 $y''+8y'+16y=0$	4.20 $y''+12y'+37y=0$	4.21 $y''+2y'+10y=0$
4.22 $y''+4y'+8y=0$	4.23 $y''-2y'+y=0$	4.24 $y''+12y'+36y=0$
4.25 $y''+4y=0$	4.26 $y''-2y'+5y=0$	4.27 $36y''+12y'+y=0$
4.28 $y''-10y'+25y=0$	4.29 $y''+10y'+25y=0$	4.30 $y''-2y'+2y=0$

5 Найти решение задачи Коши.

5.1 $y''-6y'+13y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=-1.$	5.2 $y''+6y'+13y=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=0.$	5.3 $y''-2y'-3y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$
5.4 $y''+6y'+10y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$	5.5 $y''-6y'+10y=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=1.$	5.6 $y''+9y=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=2.$

5.7 $y''+4y'+8y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	5.8 $y''+2y'-3y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0.$	5.9 $y''-4y'+5y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0.$
5.10 $y''+4y'+5y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	5.11 $y''-4y'+8y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	5.12 $y''-2y'+10y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0.$
5.13 $y''+2y'+10y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$	5.14 $y''-2y'+y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1.$	5.15 $y''-6y'+8y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$
5.16 $y''-4y'+4y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1.$	5.17 $y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1.$	5.18 $y''-10y'+26y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=0.$
5.19 $y''-4y'+13y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1.$	5.20 $y''+4y'+4y=0,$ $y(0)=-2,\ y'(0)=0.$	5.21 $y''+6y'+8y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2.$
5.22 $y''-y'=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0.$	5.23 $y''+2y'-8y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=2.$	5.24 $y''+18y+32=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=2.$
5.25 $y''-6y'+9y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$	5.26 $y''+6y'+9y=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1.$	5.27 $y''+10y'+26y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$
5.28 $y''-6y'+25y=0,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$	5.29 $y''-6y'+13y=0,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=0.$	5.30 $y''+y'=0,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0.$

6 Найти решение линейного неоднородного уравнения методом подбора частного решения.

6.1 $y''+2y'-8y=x^2+1$	6.2 $y''-3y'=x-2$
6.3 $y''-2y'+y=5e^x$	6.4 $y''+2y'-8y=xe^{4x}$
6.5 $y''-2y'-8y=7e^{4x}$	6.6 $y''-2y'-8y=-e^{-2x}$
6.7 $y''+2y'=x^2+2$	6.8 $y''+2y'+y=-e^{-x}$
6.9 $y''-6y'+5y=2x^2-5$	6.10 $y''+6y'+5y=x^2-3$
6.11 $y''-6y'+8y=2xe^x$	6.12 $y''+6y'+8y=5e^{-4x}$
6.13 $y''+6y'+8y=xe^{-2x}$	6.14 $y''+y=5\cos x$
6.15 $y''+y=-\sin x$	6.16 $y''+y=\cos x-\sin x$
6.17 $y''-y'=x+x^2-x^3$	6.18 $y''+y'=-xe^x$
6.19 $y''-y'=(1-x)e^{2x}$	6.20 $y''+y'=(5-x)e^x$
6.21 $y''-4y'+4y=-2e^{2x}$	6.22 $y''-4y'+4y=xe^{-x}$
6.23 $y''-4y'+8y=(1+2x)e^x$	6.24 $y''+4y'+8y=5-x^2$
6.25 $y''+y'+y=(x+2)e^x$	6.26 $y''-5y'+6y=-6x^2+2x+5$
6.27 $y''-13y'+12=x-1$	6.28 $y''-y'=5x^2-1$
6.29 $y''+y'-6y=(20x+14)e^{2x}$	6.30 $y''-2y'+y=2x(1-x)$

7 Найти решение линейного неоднородного уравнения методом вариации постоянных.

7.1	$y''-3y'+2y=1/(3+e^{-x})$	7.2	$y''+\pi^2 y=\pi^2/\cos\pi x$
7.3	$y''-6y'+8y=4e^{2x}/\left(1+e^{-2x}\right)$	7.4	$y''+3y'=9e^{3x}/\left(1+e^{3x}\right)$
7.5	$y''+16y=16/\sin 4x$	7.6	$y''+4y=8ctg\,2x$
7.7	$y''+16y=16/\cos 4x$	7.8	$y''-6y'+8y=4/\left(1+e^{-2x}\right)$
7.9	$y''-2y'=4e^{-2x}/\left(1+e^{-2x}\right)$	7.10	$y''-9y'+18y=9e^{3x}/\left(1+e^{-3x}\right)$
7.11	$y''+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}ctg\left(x/2\right)$	7.12	$y''+\frac{1}{\pi^2}y=\frac{1}{\pi^2\cos\left(x/\pi\right)}$
7.13	$y''-3y'+2y=1/\left(2+e^{-x}\right)$	7.14	$y''+\pi^2 y=\pi^2/\sin\pi x$
7.15	$y''+3y'+2y=e^{-x}/\left(2+e^{x}\right)$	7.16	$y''-3y'=9e^{-3x}/(3+e^{-3x})$
7.17	$y''+4y=4/\sin 2x$	7.18	$y''+y=4ctgx$
7.19	$y''+4y=4/\cos 2x$	7.20	$y''-6y'+8y=4/\left(2+e^{-2x}\right)$
7.21	$y''+y'=e^{x}/\left(2+e^{x}\right)$	7.22	$y''+6y+8y=4e^{-2x}/\left(2+e^{2x}\right)$
7.23	$y''+y=2ctgx$	7.24	$y''+9y=9/\sin 3x$
7.25	$y''-3y'+2y=1/\left(1+e^{-x}\right)$	7.26	$y''+9y=9/\cos 3x$
7.27	$y''-3y'+2y=e^{x}/\left(1+e^{-x}\right)$	7.28	$y''-y'=e^{-x}/\left(2+e^{-x}\right)$
7.29	$y''+y=1/\sin x$	7.30	$y''+4y=4ctg\,2x$

8 Решить систему дифференциальных уравнений.

8.1 $\begin{cases} y_1' = -2y_1+3y_2, \\ y_2' = 2y_1-3y_2 \end{cases}$	8.2 $\begin{cases} y_1' = -y_1+2y_2, \\ y_2' = y_1-2y_2 \end{cases}$	8.3 $\begin{cases} y_1' = -3y_1+2y_2, \\ y_2' = 3y_1-2y_2 \end{cases}$
8.4 $\begin{cases} y_1' = -3y_1+4y_2, \\ y_2' = 3y_1-4y_2 \end{cases}$	8.5 $\begin{cases} y_1' = -4y_1+3y_2, \\ y_2' = 4y_1-3y_2 \end{cases}$	8.6 $\begin{cases} y_1' = -2y_1+y_2, \\ y_2' = 2y_1-y_2 \end{cases}$
8.7 $\begin{cases} y_1' = -5y_1+y_2, \\ y_2' = 5y_1-y_2 \end{cases}$	8.8 $\begin{cases} y_1' = -2y_1+4y_2, \\ y_2' = 2y_1-4y_2 \end{cases}$	8.9 $\begin{cases} y_1' = -y_1+4y_2, \\ y_2' = y_1-4y_2 \end{cases}$
8.10 $\begin{cases} y_1' = -2y_1+5y_2, \\ y_2' = 2y_1-5y_2 \end{cases}$	8.11 $\begin{cases} y_1' = -3y_1+5y_2, \\ y_2' = 3y_1-5y_2 \end{cases}$	8.12 $\begin{cases} y_1' = -y_1+5y_2, \\ y_2' = y_1-5y_2 \end{cases}$

8.13 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.14 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2 \end{cases}$	8.15 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 \end{cases}$
8.16 $\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + 7y_2, \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.17 $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 5y_2 \end{cases}$	8.18 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 7y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 7y_2 \end{cases}$
8.19 $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	8.20 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 7y_2, \\ y_2' = y_1 - 7y_2 \end{cases}$	8.21 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{3}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{3}{2}y_2 \end{cases}$
8.22 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{5}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{5}{2}y_2 \end{cases}$	8.23 $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ y_2' = 5y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$	8.24 $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = 7y_1 - y_2 \end{cases}$
8.25 $\begin{cases} y_1' = -0{,}4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 0{,}4y_1 - 2y_2 \end{cases}$	8.26 $\begin{cases} y_1' = 0{,}2y_1 - y_2, \\ y_2' = -0{,}2y_1 + y_2 \end{cases}$	8.27 $\begin{cases} y_1' = -2{,}1y_1 + y_2, \\ y_2' = 2{,}1y_1 - y_2 \end{cases}$
8.28 $\begin{cases} y_1' = -4{,}5y_1 - 0{,}5y_2, \\ y_2' = 4{,}5y_1 + 0{,}5y_2 \end{cases}$	8.29 $\begin{cases} y_1' = 0{,}8y_1 - 0{,}2y_2, \\ y_2' = -0{,}8y_1 + 0{,}2y_2 \end{cases}$	8.30 $\begin{cases} y_1' = 3{,}2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3{,}2y_1 - y_2 \end{cases}$

2.3 Решение типового варианта

В заданиях 1, 2 и 3 заданы дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Типы таких уравнений и рекомендации к их решению представлены в таблице.

1	$y^{(n)} = f(x)$	Производная неизвестной функции явно выражена через функцию от x.	n раз интегрировать
2	$F(y, y', y'') = 0$ Частный случай: $F(y, y'') = 0$	В уравнении нет x	Замена: $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p\frac{dp}{dy} \end{cases}$
3	$F(x, y', y'') = 0$ Частные случаи: $F(y', y'') = 0$, $F(x, y'') = 0$, $F(y'') = 0$	В уравнении нет y или нет x и y	Замена: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases}$

4	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$	В уравнении нет y и её производных до k– го порядка	Замена: $\begin{cases} y^{(k)} = p(x) \\ y^{(k+1)} = p' \\ \dots \\ y^{(n)} = p^{(n-k)} \end{cases}$

1. Решить уравнение второго порядка: $y'' = \sin 2x \cos 2x.$

Решение: задано уравнение второго порядка типа 1 из таблицы. Понижаем его порядок двукратным интегрированием:

$$y' = \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = -\frac{1}{8}\cos 4x + C_1;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8}\cos 4x + C_1\right)dx = -\frac{1}{8}\int \cos 4x dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{32}\sin 4x + C_1 x + C_2$ – общее решение.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка: $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0.$

Решение: в данном уравнении отсутствует y, т.е. это уравнение типа 3 из таблицы. Делаем замену $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$:

$(1+x^2)y'' - 2xy' = 0 \quad \to \quad (1+x^2)p' - 2xp = 0 \quad \to \quad (1+x^2)dp - 2xpdx = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части на $p(1+x^2)$ и интегрируем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2} \to \frac{dp}{p} = \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \to \ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1| \to \quad p = C_1(1+x^2).$$

Так как $p = y'$, то $y' = C_1(1+x^2) \to \to \; y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$ – общее решение.

Примечание: в процессе деления на $p(1+x^2)$ мы могли потерять решения уравнений $p = 0$ и $1 + x^2 = 0$. Первое даёт $y' = 0 \Rightarrow y = C,$ но это решение находится в общем решении при $C_1 = 0$. Второе равенство $1 + x^2 = 0$ невозможно при действительных x.

Ответ: $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

3. Решить задачу Коши для уравнения, допускающего понижения порядка: $y^3 y'' = -1, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = 0.$

Решение: данное уравнение относится к типу 2 в таблице, поэтому понизим порядок уравнения с помощью замены $y' = p(y), \;\; y'' = p\frac{dp}{dy}$:

$y^3 y'' = -1 \;\to\; y^3 p\dfrac{dp}{dy} = -1 \;\to\; pdp = -\dfrac{dy}{y^3} \;\to\; \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} + C_1$. Заметим, что в таких задачах, если требуется найти не общее решение, а частное, удобнее определять константы сразу, как только они появляются, а не из общего решения. Поэтому подставим в последнее равенство начальные условия $p = y' = 0,\quad y = 1,$ получим $0 = \dfrac{1}{2} + C_1 \to C_1 = -\dfrac{1}{2}$. Последнее равенство перепишется так $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} - \dfrac{1}{2}$ или $p^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1 \;\to\; p = \pm\sqrt{\dfrac{1-y^2}{y^2}} \;\to$ $y' = \dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Разделяем переменные и интегрируем: $dx = \pm\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \;\to$ $\to x = \mp\sqrt{1-y^2} + C_2$. Найдём C_2 по начальным условиям $x = 1,\quad y = 1$: $1 = \mp\sqrt{1-1} + C_2 \;\to\; C_2 = 1$. Итак, искомое решение имеет вид $x = \mp\sqrt{1-y^2} + 1$.

Ответ: $x = \mp\sqrt{1-y^2} + 1$.

В следующих двух заданиях требуется решить линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$. Общее решение этих уравнений зависит от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Корни лучше вычислять по формуле: $k_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$. Возможны случаи:

а) $k_1 \neq k_2$ – два действительных различных корня, тогда фундаментальная система решений (т.е. два линейно независимых частных решения) будет $y_1 = e^{k_1 x},\; y_2 = e^{k_2 x}$, а общее решение – линейная комбинация решений фундаментальной системы: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

б) $k_1 = k_2 = k$ – два одинаковых действительных корня (т.е. один двукратный действительный корень), тогда фундаментальная система решений будет $y_1 = e^{kx},\; y_2 = xe^{kx}$, а общее решение – $y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}$ или $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$;

в) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – два сопряжённых комплексных корня, тогда фундаментальная система решений будет $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение – $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\varepsilon x}\sin\beta x$ или $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

4. Найти общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами: а) $y'' - 11y' + 10y = 0$; б) $y'' + 16y' + 64y = 0$.

Решение:

а) $k^2-11k+10=0-$ характеристическое уравнение, его корни $k_1=1$, $k_2=10$ действительные различные. Поэтому $y_1=e^x$, $y_2=e^{10x}$ – фундаментальная система решений, а общее решение имеет вид $y=C_1e^{1\cdot x}+C_2e^{10x}$.

Ответ: $y=C_1e^x+C_2e^{10x}$;

б) $k^2+16k+16=0$ – характеристическое уравнение, его корни $k_1=k_2=-8$ – действительные равные. Поэтому $y_1=e^{-8x}$, $y_2=xe^{-8x}$ – фундаментальная система решений, общее решение – $y=C_1e^{-8x}+C_2xe^{-8x}$.

Ответ: $y=e^{-8x}(C_1+xC_2)$.

5. Найти решение задачи Коши: $y''+9y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=6$.

Решение: характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет сопряжённые комплексные корни $k_1=3i,\ k_2=-3i$. Так как $k_{1,2}=0\pm 3i$, т.е. $\alpha=0,\ \beta=3$, то фундаментальная система решений будет $y_1=\cos 3x,\ y_2=\sin 3x,$ а $y=e^{0\cdot x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ – общее решение. Для определения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, подставим эти начальные условия в общее решение и его производную $y'=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x$ и решим систему: $\begin{cases} C_1\cos 3\cdot 0+C_2\sin 3\cdot 0=1 \\ -3C_1\sin 3\cdot 0+3C_2\cos 3\cdot 0=6 \end{cases}\rightarrow$ $C_1=1,\ C_2=2.$

Ответ: $y=\cos 3x+2\sin 3x$.

6-7. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения:

а) методом подбора частного решения: $y''-2y'+2y=6e^{2x}$;

б) методом вариации постоянных: $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Решение: структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=f(x)$ имеет вид $y_{о.н.}=y_{о.о}+y_{ч.н}$, где $y_{о.о}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{ч.н}$ – частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим два метода решения этих уравнений:

а) метод подбора частного решения применим, только если правая часть уравнения, т.е. функция *f(x)*, имеет специальный вид $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]$, где α,β – действительные числа, $P_m(x),\ Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n с действительными коэффициентами. Частные случаи *f(x)*:

а) $f(x)=Ae^{\alpha x}$, ($m=n=0,\ \beta=0$);

б) $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, ($m=n=0,\ \alpha=0$);

в) $f(x)=P_m(x)$, ($\alpha=0,\ \beta=0$);

г) $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$, ($\beta=0$);

д) $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x$, ($\alpha=0$);

е) $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, ($m=n=0$).

Если *f(x)* имеет вид, указанный выше, то частное решение неоднородного уравнения будет иметь подобную форму $y_{ч.н}=x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x+q_l(x)\sin\beta x]$, где $k\geq 0$ – показатель кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения ($k=0$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического многочлена); $l=\max(m,n)$; $p_l(x),\ q_l(x)$ – полные многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами (например, если $l=0$, то $p_0(x)=A,\ q_0(x)=B$; если $l=1$, то $p_1(x)=Ax+B,\ q_1(x)=Cx+D$; если $l=2$, то $p_2(x)=Ax^2+Bx+C,\ q_2(x)=A_1x^2+B_1x+C_1$ и т.д.). Таким образом, для определения частного решения надо найти коэффициенты $p_l(x)$ и $q_l(x)$. Для этого подставляя $y_{ч.н}$, $y'_{ч.н}$, $y''_{ч.н}$ в данное уравнение, получим тождество, из которого и будут найдены коэффициенты. Итак, $y_{ч.н}$ найдено, общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{о.о}$ известно как находить, задача решена.

В нашем случае $k^2-2k+2=0$ – характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения, $k_{1,2}=1\pm i$ – его корни, $\alpha=\beta=1$, следовательно, $y_{oo}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Так как $f(x)=6e^{2x}=e^{2x}(6\cos 0x+0\sin 0x)\to\alpha=2,\ \beta=0,\ m=0,\ n=0,$ $\alpha+\beta i=2$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому $k=0;\ m=n=0,\ l=\max(0,0)=0,$ поэтому $p_0(x)=A,\ q_0(x)=B.$ Подставляя эти значения в формулу $y_{ч.н}=x^k e^{\alpha x}[p_l(x)\cos\beta x+q_l(x)\sin\beta x]$, получим $y_{ч.н}=x^0e^{2x}[A\cos 0\cdot x+B\sin 0\cdot x]=Ae^{2x}$. Для определения A подставим $y_{ч.н}=Ae^{2x}$, $y'_{ч.н}=2Ae^{2x}$, $y''_{ч.н}=4Ae^{2x}$ в первоначальное уравнение:

$$4Ae^{2x}-2\cdot 2Ae^{2x}+2Ae^{2x}=6e^{2x}\ \to\ 2Ae^{2x}=6e^{2x}\ \to\ 2A=6\ \to\ A=3.$$

Итак, $y_{ч.н}=3e^{2x}$.

Следовательно, $y_{о.н.}=y_{о.о}+y_{ч.н}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{2x}$ – общее решение.

Ответ: $y=e^x(C_1\cos x+C_1\sin x)+3e^{2x}$;

б) метод вариации постоянных применим к любым линейным неоднородным уравнениям 2-го порядка с постоянными коэффициентами, но он довольно часто приводит к сложным вычислениям, поэтому, если это возможно, лучше решать первым методом, если невозможно, то поступают так: находят общее решение соответствующего однородного уравнения

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1 и y_2 – фундаментальная система решений. Общее решение неоднородного уравнения ищут в виде $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ (*), т.е. варьируют константы. Для определения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \quad C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad \rightarrow \quad C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + K_i \quad \rightarrow$$

$C_i(x) = \Phi_i(x) + K_i$, $(i = 1,2)$. Осталось подставить $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (*): $y_{он} = (\Phi_1(x) + K_1) y_1 + (\Phi_2(x) + K_2) y_2$.

В нашем случае $k^2 - 2k + 1 = 0$ – характеристическое уравнение, $k_1 = k_2 = 1$ – его корни, поэтому, $y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Варьируем константы: $y_{он} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$ (*) – общее решение данного уравнения.

Составим систему $\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + x e^x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$

Умножая первое уравнение на (-1) и прибавляя ко второму, получим $C_2'(x) e^x = \dfrac{e^x}{1+x^2} \rightarrow C_2'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \rightarrow C_2(x) = arctg\, x + K_2$. Из первого уравнения получим: $C_1'(x) = -C_2'(x) x = -\dfrac{x}{1+x^2} \rightarrow C_1(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + K_1$.

Подставляем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (*): $y_{он} = (K_1 - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)) e^x + (arctg\, x + K_2) x e^x$

или $y_{он} = [K_1 e^x + K_2 x e^x] + [x e^x arctg\, x - \dfrac{1}{2} e^x \ln(1+x^2)]$, где в первой квадратной скобке общее решение соответствующего однородного уравнения, во второй – частное решение данного уравнения, что соответствует структуре общего решения линейного неоднородного уравнения.

Ответ: $y = [K_1 e^x + K_2 x e^x] + [x e^x arctg\, x - \dfrac{1}{2} e^x \ln(1+x^2)]$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1' = -9y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 4y_2. \end{cases}$

Решение: решим систему методом исключения неизвестных. Заметим, что складывая уравнения системы, получим $y_1' + y_2' = 0 \rightarrow y_2' = -y_1'$. Теперь дифференцируем первое уравнение системы и подставляем $y_2' = -y_1'$: $y_1'' = -9y_1' + 4(-y_1') \rightarrow y_1'' + 13y_1' = 0$ – линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. $k^2 + 13k = 0$ – характеристическое уравнение, $k_1 = 0$, $k_2 = -13$ – его корни. Тогда

$y_1 = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{-13x} = C_1 + C_2 e^{-13x}$. Так как $y_1' = -13C_2 e^{-13x}$, то найдём из первого уравнения y_2:

$$4y_2 = y_1' + 9y_1 \to y_2 = \frac{1}{4}\left(-13C_2 e^{-13x} + 9\cdot\left(C_1 + C_2 e^{-13x}\right)\right) \to y_2 = \frac{9}{4}C_1 - C_2 e^{-13x}.$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{-13x}, \\ y_2 = \frac{9}{4}C_1 - C_2 e^{-13x}. \end{cases}$

Список литературы

1 Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. М.:URSS, 2009,208с.

2 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2008,-176 с.

3 Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.-Ч.1,2.-2003.

4 Сборник задач по математике для втузов.-Ч.2.-Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 2002,368 с.

5 Хасеинов К.А. Каноны математики. 2003.

6 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Дифференциальныеуравнения. Конспект лекций для студентовспециальности 5В060200 – Информатика.-Алматы, 2013,- 46 с.

Содержание

1 Расчётно-графическая работа №1. Дифференциальные уравнения первого порядка ……... 3
1.1 Теоретические вопросы……. 3
1.2 Расчётные задания……..… 3
1.3 Решение типового варианта…… 8
2 Расчётно-графическая работа №2.Дифференциальные уравнения высшего порядка. Системы дифференциальных уравнений……... 14
2.1 Теоретические вопросы……. 14
2.2 Расчётные задания……..… 14
2.3 Решение типового варианта……..… 19
Список литературы…….. 26

Сводный план 2016 г., поз. 139

Астраханцева Людмила Николаевна
Толеуова Багила Жаксылыковна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В060200 – Информатика

Редактор Н.М.Голева
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано_____в печать
Тираж 15 экз.
Объем 1,7 уч.-изд. л.

Формат 60х84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ_____Цена 850 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126