



**Некоммерческое
акционерное
общество**

**АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ
И СВЯЗИ**

Кафедра высшей математики

**РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Конспект лекций
для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛИ: К.М. Мустахишев, Б.Ж. Атабай. Решение дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления. Конспект лекций для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика. – Алматы, 2014 – 27 с.

Конспект лекций содержит конспекты к 7 лекциям по курсу «Решение дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления», иллюстрированным решением 12 задач и примеров различными способами.

Ил. 11, библиогр.-10 назв.

Рецензент: канд. тех. наук, доцент К.А. Бакенов.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014 г.

Модуль 1. Операционное исчисление

Лекция 1. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа

Цель лекции: ознакомление студентов с преобразованием (оператором) Лапласа и его основными свойствами.

Рассмотрим функцию $f(t)$, аргументом которой служит время $t \geq 0$. Ее называют оригиналом, если она удовлетворяет следующим требованиям [1]:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$ и $f(0) = f(0+0)$;
- 2) на любом отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I-рода;
- 3) $f(t)$ ограничена экспонентой, т.е. существуют числа $\sigma_0 > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Для выполнения условия 1) считается, что оригинал содержит множитель

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

называемый функцией Хэвисайда. Условие (1.1) означает, что при $t \rightarrow \infty$ оригинал по модулю может расти не быстрее чем экспонента $e^{\sigma t}$. Число $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется показателем роста функции $f(t)$.

Если указанные условия выполняются, то несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = L[f; p], \quad (1.3)$$

называемый изображением функции $f(t)$, сходится абсолютно и равномерно на полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. В этой области $F(p)$ есть аналитическая, т.е. разлагаемая в сходящийся степенной ряд, функция и представляет собой образ оригинала $f(t)$ с помощью оператора (преобразования) Лапласа (1.3). Этот факт условно записывают так:

$$f(t) \div F(p) \vee f(t) \div L[f; p]. \quad (1.4)$$

Вообще, интеграл Лапласа (1.3) зависит от комплексного параметра $p = \sigma + ir$. Подынтегральная функция в нем при $\sigma > \sigma_0$ и $t \rightarrow +\infty$ убывает быстрее затухающей экспоненты:

$$|e^{-pt} f(t)| = |e^{-\sigma t} f(t)(\cos rt - i \sin rt)| \leq Me^{-(\sigma - \sigma_0)t}.$$

Свойства преобразования Лапласа (теоремы)

Свойства преобразования Лапласа вытекают из свойств несобственного интеграла, содержащего параметр [1]. Отметим основные из них.

1. Линейные свойства:

$$f_j(t) \div F_j(p), \quad j = \overline{1, k} \Rightarrow \sum_{j=1}^k C_j f_j(t) \div \sum_{j=1}^k C_j F_j(p), \quad (1.5)$$

$$\forall C_j = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad \text{Re } p > \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем будем считать, что соответствие (1.4) выполняется.

2. Теорема подобия:

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0, \quad \text{Re } p > \alpha \sigma_0. \quad (1.6)$$

3. Теорема сдвига:

$$e^{\alpha t} f(t) \div F(p - \alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{Re}(p - \alpha) > \sigma_0. \quad (1.7)$$

4. Теорема запаздывания:

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p), \quad \forall \tau > 0, \quad \text{Re } p > \sigma. \quad (1.8)$$

5. Дифференцирование оригинала. Если производные оригинала $f^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, n}$ также являются оригиналами, то:

$$\begin{aligned} f'(t) \div pF(p) - f(0), \quad f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \dots, \\ f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0); \\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0+0), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Re } p > \sigma_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

6. Дифференцирование изображения:

$$t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

7. Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \quad \text{Re } p > \sigma_0. \quad (1.11)$$

8. Интегрирование изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q) dq. \quad (1.12)$$

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами, то выражение

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_2 * f_1 \quad (1.13)$$

называется сверткой этих функций.

9. Теорема умножения изображений:

$$f_j(t) \div F_j(p), \quad j = 1; 2 \Rightarrow f_1 * f_2 \div F_1(p) \cdot F_2(p). \quad (1.14)$$

10. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Если $f(t, q) \div F(p, q)$ и функции времени $\frac{\partial}{\partial q} f(t, q)$, $\int_{q_1}^{q_2} f(t, q) dq$ являются оригиналами, то:

$$\frac{\partial}{\partial q} f(t, q) \div \frac{\partial}{\partial q} F(p, q), \quad \int_{q_1}^{q_2} f(t, q) dq \div \int_{q_1}^{q_2} F(p, q) dq. \quad (1.15)$$

В операционном исчислении решаются две задачи (прямая и обратная):
 1) по заданному оригиналу $f(t)$ найти его изображение $F(p)$; 2) по известному изображению $F(p)$ восстановить соответствующий ему оригинал $f(t)$.
 Первую задачу можно решать по определению изображения, т.е. непосредственно вычисляя несобственный интеграл I-рода (1.3).

Пример. Найти изображение функции $f(t) = t$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\epsilon} t e^{-pt} dt = \left. \begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = e^{-pt} dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\epsilon} + \frac{1}{p} \int_0^{\epsilon} e^{-pt} dt \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(-\frac{\epsilon}{p} e^{-p\epsilon} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{\epsilon} \right) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(-\frac{\epsilon}{p} e^{-p\epsilon} - \frac{1}{p^2} e^{-p\epsilon} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p^2},
 \end{aligned}$$

т.к. первые две слагаемых стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow +\infty$. Итак, интеграл Лапласа сходится и

$$t \div \frac{1}{p^2}.$$

Некоторую особенность имеет нахождение изображения кусочно-линейной (полигональной) функции

$$f(t) = f(t_k + 0) + \frac{f(t_k - 0) - f(t_k + 0)}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для нее [2]

$$F(p) = \sum_{k=1}^n e^{-pt_k} \left(f(t_k + 0) - f(t_k - 0) + \frac{1}{p} (f'(t_k + 0) - f'(t_k - 0)) \right) \frac{1}{p}.$$

Пример. По заданным графикам оригиналов (рисунок 1) найти изображения.

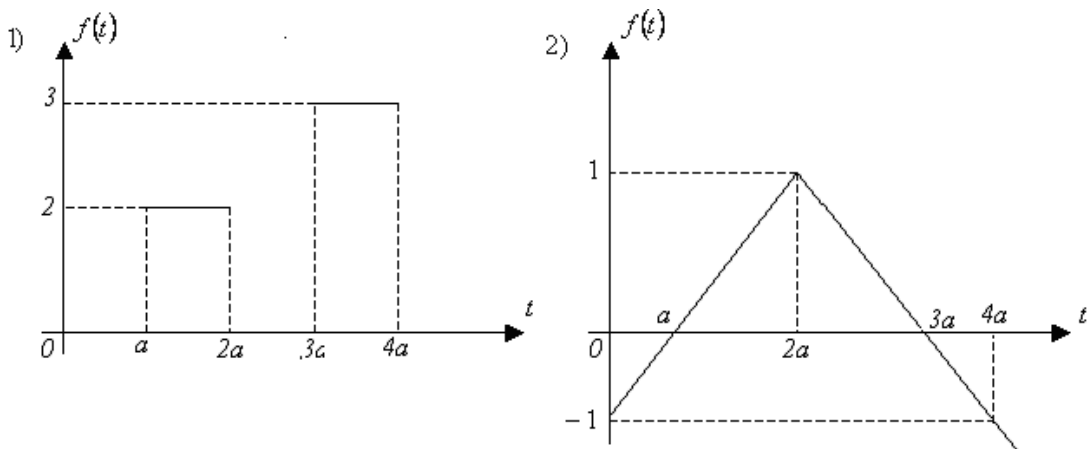


Рисунок 1 - Кусочно-линейные функции

Решение. Графики соответствуют кусочно-линейным функциям вида $f(t)$. Найдем их изображения $F(p)$.

$$1) t_k = ka, \quad k = \overline{1,4}, \quad f(t_1 - 0) = f(t_2 + 0) = f(t_3 - 0) = f(t_4 + 0) = 0, \\ f(t_1 + 0) = f(t_2 - 0) = 2, \quad f(t_3 + 0) = f(t_4 - 0) = 3, \quad \forall f'(t_k \pm 0) = 0;$$

$$F(p) = \frac{1}{p} (2e^{-ap} - 2e^{-2ap} + 3e^{-3ap} - 3e^{-4ap}) = \frac{1}{p} e^{-ap} (1 - e^{-ap}) (2 + 3e^{-2ap}).$$

$$2) k = \overline{1,2}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2a; \quad f(t_1 - 0) = f'(t_1 - 0) = 0, \quad f(t_1 + 0) = -1, \\ f'(t_1 + 0) = f'(t_2 - 0) = \frac{1}{a}, \quad f'(t_2 + 0) = -\frac{1}{a};$$

$$F(p) = \left(-1 + \frac{1}{ap} - \frac{2}{ap} e^{-2ap} \right) \frac{1}{p} = \frac{1}{ap^2} (1 - 2e^{-2ap}) - \frac{1}{p}.$$

Пользуясь также свойствами преобразования Лапласа, можно найти изображения основных элементарных функций и составить таблицу «Оригинал-изображение»:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	8	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	9	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	10	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
6	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	11	$t sh \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$
7	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	12	$t ch \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$

Лекция 2. Обратное преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений (ДУ) методами операционного исчисления (ОИ)

Цель лекции: изложить способы решения обратной задачи ОИ и линейных неоднородных дифференциальных уравнений (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами методами ОИ.

Для преобразования Лапласа имеет место формула обращения (обратное преобразование)

$$f(t) \doteq \int_0^{+\infty} F(s) e^{st} ds.$$

С ее помощью по заданному изображению можно восстановить оригинал. Но, для практического применения более удобны следствие из формулы обращения, называемое теоремой разложения и таблица “Оригинал-изображение”.

Теорема. Оригинал изображения, разложимого в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд по степеням $\frac{1}{p}$, есть ряд по степеням t :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}, \quad \forall c_n = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

С помощью методов ОИ можно решать задачу Коши для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и их систем, правые части которых являются оригиналами. Для этого, считая, что решения таких уравнений существуют и являются оригиналами, в заданных уравнениях все известные и неизвестные функции, также производные последних заменяют их образами по Лапласу. Из составленных таким образом линейных алгебраических уравнений или их систем находят изображения неизвестных функций. А восстановленные по ним оригиналы дают решение задачи Коши. Рассмотрим примеры.

1. Решить задачу Коши

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \doteq F(p)$ есть искомое решение. Тогда по (1.9)

$$\dot{x}(t) \doteq pF(p) - 1, \quad \ddot{x}(t) \doteq p^2F(p) - p.$$

Найдем изображение свободного члена из таблицы и в заданном уравнении перейдем к изображениям:

$$p^2F(p) - p - 3pF(p) + 3 + 2F(p) = 2 \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}},$$

$$F(p) = \frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p-1)(p-2)\left((p-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \left| A = 2, B = \frac{3}{53}, C = -\frac{56}{53}, D = -\frac{18}{53} \right|;$$

$$F(p) = \frac{2}{p-1} + \frac{3}{53} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{56}{53} \cdot \frac{(p-1) + \frac{37}{14} \cdot \frac{1}{2}}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}}.$$

Пользуясь таблицей изображений, восстановим оригинал, что дает решение задачи Коши

$$x(t) = 2e^t + \frac{3}{53}e^{2t} - \frac{56}{53} \left(e^t \cos \frac{t}{2} - \frac{37}{14} e^t \sin \frac{t}{2} \right).$$

2. На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R = 10mv$, пропорциональная скорости $v = \dot{x}$. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость $v_0 = 1 \text{ м/с}$?

Решение. Приняв начальное положение точки (при $t = 0$) за начало отсчета расстояний (рисунок 2), придем к задаче Коши:

$$m\ddot{x} = -10m\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 10\dot{x} = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

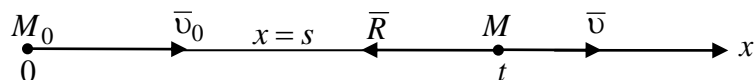


Рисунок 2 – Прямолинейное движение точки M

Положив $x(t) \div F(p)$, из (1.9) имеем: $\dot{x}(t) \div pF(p)$, $\ddot{x}(t) \div p^2F(p) - 1$. Перейдя в составленном ДУ к изображениям, найдем:

$$F(p) = \frac{1}{p(p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+10} = | A = -B = 0,1 |;$$

$$x(t) = 0,1 - 0,1e^{-10t} \Rightarrow s = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,1 \text{ м.}$$

Здесь учтено, что $0 \div 0$, т.е. при $f(t) = 0, \forall t \geq 0$ по (1.3) $F(p) = 0$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Пусть функции $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$ являются решениями заданной системы. Тогда по (1.9) $\dot{x}(t) \div pX(p)$, $\dot{y}(t) \div pY(p) - 1$. Перейдя к изображениям, получим систему алгебраических уравнений

$$pX(p) = -2X(p) + Y(p), \quad pY(p) - 1 = 3X(p).$$

Ее решение

$$X = \frac{1}{(p+3)(p-1)}, \quad Y = \frac{p+2}{(p+3)(p-1)}$$

или

$$X = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+3} \right), \quad Y = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{p-1} + \frac{1}{p+3} \right).$$

Решение задачи Коши для заданной системы ДУ

$$x(t) = \frac{1}{4} (e^t - e^{-3t}), \quad y(t) = \frac{1}{4} (3e^t + e^{-3t}).$$

Лекция 3. Применение интегралов Дюамеля к решению задачи Коши для ЛНДУ

Цель лекции: ознакомить студентов с интегралами Дюамеля и показать их применение к решению ЛНДУ с постоянными коэффициентами, правые части которых не являются оригиналами.

Рассмотрим дифференцируемые и являющиеся оригиналами функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, для которых $f_j(t) \div F_j(p)$, $j=1;2$. Если свертка любой из них и производной другой является оригиналом, то имеют место соотношения, называемые интегралами Дюамеля:

$$f_1(0)f_2(t) + (f_1 * f_2)(t) = f_2(0)f_1(t) + (f_2 * f_1)(t) \div pF_1(p)F_2(p). \quad (1.16)$$

При решении задачи Коши для ЛНДУ n -порядка с постоянными коэффициентами, правая часть которого $f(t)$ не является оригиналом применяются интегралы Дюамеля. Применяя известное обозначение [1], заданное ДУ представим в виде

$$L_n[x(t)] = f(t). \quad (1.17)$$

Путем замены неизвестной функции $x(t)$ начальные условия задачи можно привести к “нулевому” виду:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (1.18)$$

Допустим, найдено удовлетворяющее начальным условиям (1.18) решение $x_1(t)$ дифференциального уравнения

$$L_n[x(t)] = 1,$$

левая часть которого одинакова с (1.17). Тогда для решения задачи Коши (1.17,18) с помощью интегралов Дюамеля можно применять одну из формул

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau) d\tau, \quad x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим примеры.

1. Найти решение задачи Коши

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Решение. Сначала найдем решение $x_1(t) \div F(p)$, $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ уравнения $L_2[x(t)] = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 1$. Для этого из (1.9) возьмем $\dot{x}_1(t) = pF(p)$, $\ddot{x}_1(t) = p^2F(p)$ и в тождестве $L_2[x_1(t)] = 1$ перейдем к изображениям:

$$F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2} = \left| A = -B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2} \right|.$$

Подставив функции $x_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1+2t}{4} e^{-2t}$, $\dot{x}_1 = te^{-2t}$ и $f(t) = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$ во второе

из равенств (1.19), найдем требуемое решение:

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) e^{-2(t-\tau)} e^{-2\tau} \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2} = -\frac{1}{4} e^{-2t} \left((2t+1) \int_0^t \frac{-2d\tau}{(2\tau+1)^2} + \int_0^t \frac{d(2\tau+1)}{2\tau+1} \right);$$

$$x(t) = \frac{2t - \ln(2t+1)}{4} e^{-2t}.$$

2. Найти решение задачи Коши

$$\ddot{x} + x = \frac{3}{1 + \sin t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Решение. Сперва решим задачу Коши, соответствующую заданной: $\ddot{x} + x = 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, полагая, $x_1(t) \doteq F(p)$. Из ее операторного уравнения $p^2 F(p) + F(p) = \frac{1}{p}$ найдем:

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1} = | A = 1, B = -1, C = 0 |.$$

Следовательно, $x_1(t) = 1 - \cos t$, $\dot{x}_1(t) = \sin t$, а по условию $f(t) = \frac{3}{1 + \sin t}$.

Из второго равенства (1.19) найдем:

$$x(t) = 3 \int_0^t \sin(t - \tau) \frac{d\tau}{1 + \sin \tau} = 3 \left(\sin t \int_0^t \frac{\cos \tau}{1 + \sin \tau} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin \tau}{1 + \sin \tau} d\tau \right),$$

$$x(t) = 3 \left(\sin t \cdot \ln(1 + \sin \tau) \Big|_0^t \right) - \cos t \cdot \left(t - 2 \int_0^t \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}\right)^2} \cdot \frac{d\tau}{2 \cos^2 \frac{\tau}{2}} \right),$$

$$x(t) = 3 \left(\sin t \cdot \ln(1 + \sin t) - \left(t + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}} \right) \Big|_0^t \right) \cos t.$$

Окончательно, решение первоначальной задачи Коши

$$x(t) = 3 \left(\sin t \cdot \ln(1 + \sin t) - \left(t + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - 2 \right) \cos t \right).$$

Модуль 2. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Лекция 4. Криволинейные интегралы

Цель лекции: изложить основные понятия, свойства и способы вычисления криволинейных интегралов I и II-рода.

1. Интеграл по длине дуги кривой.

Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ определена в точках пространственной несамопересекающейся кривой $L = \tilde{A}B \in R_3$ (рисунок 3). Точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ кривую произвольно разобьем на n неперекрывающихся

между собой частей ΔL_i , $\sum_{i=1}^n \Delta L_i = L$. В каждой части произвольно возьмем точку $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta L_i$, найдем значения функции в этих точках. Умножив их на

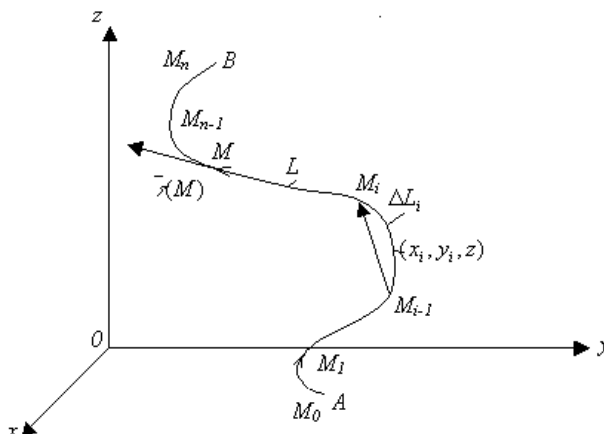


Рисунок 3 - Криволинейные интегралы

длины соответствующих частей, сложим. Полученное таким образом выражение

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i \quad (2.1)$$

называют интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по длине дуги кривой L .

Наибольшая из длин составляющих дуг

$$\lambda = \max_{i=1, n} \{ \Delta L_i \}$$

называется шагом разбиения кривой L на части ($\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \Delta L_i \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$).

Определение. Если при $\lambda \rightarrow 0$ существует конечный предел интегральной суммы (2.1), не зависящий ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) на каждой части, то этот предел (число) называется криволинейным интегралом (I-рода) от функции $f(x, y, z)$ по длине дуги кривой L и обозначается символом $\int_L f dL$.

По определению

$$\int_L f(x, y, z) dL = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i. \quad (2.2)$$

Здесь $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ - элемент длины дуги кривой интегрирования [1]. Если предел (2.2) существует и конечен, то функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой по кривой L .

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точках кривой L , то она интегрируема по длине дуги этой кривой.

При вычислении криволинейный интеграл I-рода приводится к определенному интегралу. Поэтому он обладает основными свойствами интегралов. Криволинейный интеграл I-рода не зависит от обозначения

переменных интегрирования и от направления отсчета длин дуг вдоль кривой интегрирования. Он линеен и аддитивен:

$$\int_L \sum_{i=1}^n C_i f_i(M) dL = \sum_{i=1}^n C_i \int_L f_i(M) dL, \quad \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}, \quad L = L_1 + L_2.$$

Поэтому самопересекающиеся кривые можно разделить на части.

Если $f(M) = 1 \quad \forall M \in L$, то криволинейный интеграл I-рода определяет длину дуги кривой интегрирования:

$$\int_L dL = L.$$

Криволинейный интеграл I-рода обладает также свойствами, выражаемыми неравенствами.

Если кривая интегрирования есть материальное тело (провода), а подынтегральная функция $f = \mu(x, y, z)$ - плотность распределения массы вдоль кривой, то криволинейный интеграл I-рода определяет массу кривой интегрирования:

$$M = \int_L \mu(x, y, z) dL.$$

Вычисление криволинейного интеграла I-рода зависит от способа задания кривой интегрирования.

1. Кривая интегрирования гладкая, задана своими параметрическими уравнениями:

$$L: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (2.3)$$

Значит, функции (2.3) непрерывно дифференцируемы на (α, β) :

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt.$$

Криволинейный интеграл I-рода превращается в определенный интеграл:

$$\int_L f(x, y, z) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt.$$

2. Если кривая интегрирования плоская: $L \in R_2$, то она параметрически определяется первыми двумя из уравнений (2.3). Формула для вычисления криволинейного интеграла по ней будет иметь вид

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt. \quad (2.4)$$

3. Если плоская кривая L представляет собой график непрерывно дифференцируемой на (a, b) функции $y = \varphi(x)$, то можно перейти к параметрическим уравнениям:

$$x = x, \quad y = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.5)$$

приняв независимую переменную x за параметр. Тогда формула (2.4) примет вид

$$\int_L f(x, y) dL = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2} dx. \quad (2.6)$$

4. Пусть плоская кривая задана своим уравнением в полярных координатах

$$L: \rho = \rho(\varphi) \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

Элемент длины дуги кривой [1]:

$$dL = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Так как $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

2. Криволинейный интеграл по координатам

Кривая называется ориентированной в пространстве, если указано направление движения – положительное направление отсчета расстояний по ней. Пусть функции $P(M), Q(M), R(M)$ определены в точках ориентированной кривой $L \in R_3$ (рисунок 2). Изложенным в 1 способом составим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i. \quad (2.6)$$

Определение. Если при $\lambda \rightarrow 0$ существуют конечные пределы интегральных сумм (2.6), не зависящие ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) на каждой части, то эти пределы (числа) называются криволинейными интегралами (II-рода) по переменным x, y, z соответственно от функций P, Q, R по ориентированной кривой L .

По определению

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i, \\ \int_L Q(x, y, z) dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i, \\ \int_L R(x, y, z) dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0 \quad \forall \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ и наоборот. Сумма определенных таким образом интегралов

$$\int_L P(M) dx + \int_L Q(M) dy + \int_L R(M) dz = \int_L P dx + Q dy + R dz \quad (2.8)$$

называется криволинейным интегралом II-рода в общем (полном) виде. Все они вычисляются путем приведения к определенным интегралам.

Криволинейный интеграл II-рода также обладает свойствами линейности и аддитивности. Ориентация кривой интегрирования осуществляется с помощью единичного вектора $\vec{\tau}(M)$ касательной к L . При изменении ориентации на противоположную интеграл меняет знак. Эти свойства условно можно записать так:

$$L = L_1 + L_2 \Rightarrow \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}, \quad \int_L = - \int_{L^-}.$$

Если функции $P(M), Q(M), R(M)$ непрерывны в точках ориентированной гладкой кривой L , то криволинейные интегралы II-рода (2.7,8) существуют. При параметрическом задании (2.3) кривой интегрирования

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^\beta (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \quad (2.9)$$

Приравнивая соответствующие слагаемые в обеих частях (2.9), можно получить формулы для вычисления криволинейных интегралов по отдельным координатам (2.7). Если кривая интегрирования плоская: $L \in xy$, то в обеих частях (2.9) под интегралами будут отсутствовать третья слагаемая и переменная z . Когда плоская кривая интегрирования задается уравнениями (2.5), то криволинейный интеграл II-рода вычисляется по формуле

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x))dx.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{\tau}(M) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ также являются непрерывными функциями точек гладкой кривой L . Так как

$$dx = dL \cos \alpha, \quad dy = dL \cos \beta, \quad dz = dL \cos \gamma,$$

то

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)dL.$$

Это есть формула связи между криволинейными интегралами I и II-рода.

Лекция 5. Поверхностные интегралы

Цель лекции: изложить основные понятия, свойства и способы вычисления поверхностных интегралов I и II-рода.

1. Интеграл по площади поверхности.

Рассмотрим функцию $f(M) = f(x, y, z)$, определенную в точках несамопересекающейся в пространстве поверхности $\sigma \in R_3$ (рисунок 4). Разобьем

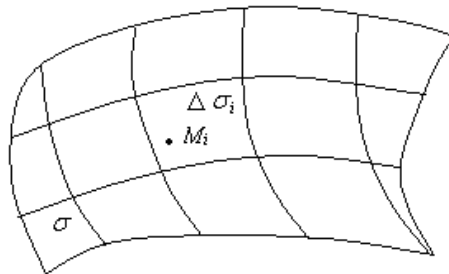


Рисунок 4 - Поверхностные интегралы

поверхность произвольным образом на неперекрывающиеся между собой n частей $\Delta \sigma_i$: $\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \sigma$. В каждой части произвольно возьмем точку

$M_i(x_i, y_i, z_i)$, найдем значения функции в этих точках и, умножив их на площади соответствующих частей, сложим. Найденное выражение

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i \quad (2.10)$$

называют интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по площади поверхности σ . Измеряя расстояния по поверхности, введем шаг разбиения поверхности на части

$$\lambda = \max_{i=1, n} \{diam \Delta\sigma_i\}: \quad \lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \Delta\sigma_i \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Определение. Если при $\lambda \rightarrow 0$ существует конечный предел интегральной суммы (2.10), не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) на каждой части, то этот предел (число) называется поверхностным интегралом (I-рода) от функции $f(x, y, z)$ по площади поверхности σ и обозначается выражением $\iint_{\sigma} f(M) d\sigma$.

Таким образом,

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i. \quad (2.11)$$

Здесь σ - поверхность интегрирования, $d\sigma$ - элемент ее площади. Если предел в правой части (2.11) существует (равен действительному числу), то $f(M)$ называется функцией, интегрируемой по площади поверхности σ .

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точках поверхности σ , то она интегрируема по площади этой поверхности.

Если во всех точках поверхности интегрирования $f(M)=1$, то поверхностный интеграл I-рода определяет площадь поверхности интегрирования

$$\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Вычисление поверхностного интеграла I-рода приводится к вычислению двойного интеграла. Поэтому поверхностный интеграл обладает линейными свойствами, свойством аддитивности по поверхности и свойствами, выражающимися неравенствами.

Если поверхность интегрирования материальна, а функция $f = \mu(x, y, z)$ - плотность распределения ее массы по поверхности, то поверхностный интеграл I-рода определяет массу поверхности σ :

$$M = \iint_{\sigma} \mu(x, y, z) d\sigma.$$

Известно [1], что площадь гладкой пространственной поверхности $\sigma: z = \varphi(x, y)$ может определяться с помощью двойного интеграла. Здесь $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемая в области $D = \pi p_{xy} \sigma$ (рисунок 5) функция. Элемент площади области

$$ds = \pi p_{xy} d\sigma = dx dy = d\sigma \cdot \cos \gamma.$$

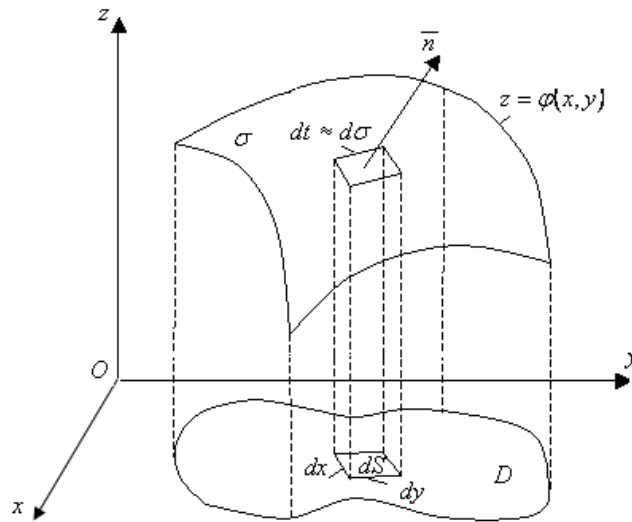


Рисунок 5 – Вычисление поверхностного интеграла I-рода

Третий направляющий косинус нормали $\bar{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ к поверхности интегрирования [1]

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(x, y) + \varphi'_y{}^2(x, y)}}.$$

Тогда формулу для вычисления поверхностного интеграла I-рода можно представить в виде

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(x, y) + \varphi'_y{}^2(x, y)} dx dy. \quad (2.12)$$

В правой части (2.12) имеем двойной интеграл по плоской области D . Путем круговой перестановки переменных $x \leftarrow y \leftarrow z$ из (2.12) можно получить еще две формулы для вычисления поверхностного интеграла I-рода по поверхностям вида $\sigma : x = \varphi(y, z) \wedge y = \varphi(z, x)$.

2. Поверхностный интеграл по координатам.

Поверхности в большинстве своем являются двусторонними. У поверхности различают ее положительную (лицевую) и отрицательную (противоположную) стороны. Если указано направление единичного вектора \bar{n} нормали к поверхности (обычно, направленного в положительную сторону поверхности), то поверхность считается ориентированной в пространстве. У замкнутых поверхностей различают внешнюю и внутреннюю нормали. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких частей, называется кусочно-гладкой. Допустим, любая из прямых, параллельных осям координат, пересекает поверхность не более, чем в одной точке. В противном случае, поверхность можно разбить на части, удовлетворяющие этому требованию.

Пусть функции $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ определены в точках ориентированной в пространстве поверхности σ (рисунки 5, 6). Изложенным выше способом составим интегральные суммы для этих функций по поверхности σ и попарно взятым независимым переменным:

$$\sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta y_i \Delta z_i, \quad \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta z_i \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta x_i \Delta y_i. \quad (2.13)$$

Определение. Если при $\lambda \rightarrow 0$ интегральные суммы (2.13) имеют конечные пределы, не зависящие ни от способа разбиения поверхности σ на части, ни от выбора точек M_i в каждой части, то эти числа называются поверхностными интегралами (II-рода) от функций P, Q, R по ориентированной в пространстве поверхности σ и по переменным соответственно $(y, z), (z, x), (x, y)$ и обозначаются через $\iint_{\sigma} P dydz, \iint_{\sigma} Q dzdx, \iint_{\sigma} R dx dy$.

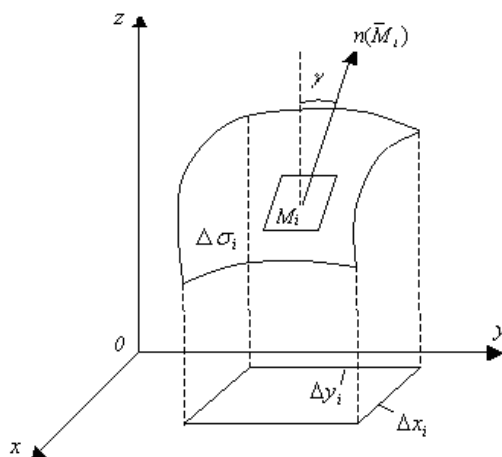


Рисунок 6 – Вычисление поверхностного интеграла II-рода

По определению

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i \Delta z_i, \\ \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i \Delta x_i, \\ \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i, \\ \lambda \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \forall \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сумма этих пределов

$$\iint_{\sigma} P(M) dydz + \iint_D Q(M) dzdx + \iint_D R(M) dx dy = \iint_D P dydz + Q dx dy + R dx dy \quad (2.15)$$

носит название поверхностного интеграла II-рода в общем виде.

При вычислении поверхностные интегралы по координатам приводятся к двойным интегралам. Они также обладают свойствами линейности и аддитивности по области. Кроме того, при изменении ориентации поверхности интегрирования поверхностный интеграл II-рода меняет знак на противоположный. Последние свойства символически можно представить в виде:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \iint_{\sigma} = \iint_{\sigma_1} + \iint_{\sigma_2}, \quad \iint_{\sigma} = -\iint_{\sigma^-}.$$

От функций $P(M), Q(M)$ и $R(M)$, непрерывных в точках ориентированной в пространстве поверхности σ , поверхностные интегралы II-рода (2.14,15) существуют.

Пусть поверхность интегрирования задана уравнением

$$\sigma: F(x, y, z) = 0, \quad (2.16)$$

которое на множестве точек поверхности σ определяет неявные функции

$$x = f_1(y, z), \quad y = f_2(z, x), \quad z = f_3(x, y).$$

Причем последние суть непрерывно дифференцируемые функции в плоских областях соответственно:

$$\sigma_{yz} = n p_{yz} \sigma, \quad \sigma_{zx} = n p_{zx} \sigma, \quad \sigma_{xy} = n p_{xy} \sigma.$$

Тогда формула для вычисления поверхностного интеграла II-рода в общем виде записывается так:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P(f_1(y, z), y, z) dydz \pm \\ \pm \iint_{\sigma_{zx}} Q(x, f_2(z, x), z) dzdx \pm \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Двойные интегралы в правой части равенства берутся со знаком плюс, если вектор нормали \bar{n} к поверхности составляет с осями координат соответственно Ox, Oy, Oz острые углы и со знаком минус, если эти углы тупые. Приравнявая соответствующие слагаемые в обеих частях равенства (2.17), можно получить формулы для вычисления поверхностных интегралов II-рода, определяемых равенствами (2.14). Если уравнение (2.16) неразрешимо относительно некоторой из переменных x, y, z , то формула для вычисления соответствующего поверхностного интеграла из (2.14) не имеет места.

Подставив в правую часть (2.15) выражения

$$dydz = d\sigma \cos \alpha, \quad dzdx = d\sigma \cos \beta, \quad dx dy = d\sigma \cos \gamma,$$

придем к формуле

$$\iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

выражающей связь между поверхностными интегралами I и II рода.

Лекция 6. Элементы теории поля. Скалярное и векторное поля. Основные характеристики

Цель лекции: изложить основные понятия теории поля, характеристики скалярного и векторного полей. Показать применение формулы Остроградского-Гаусса.

1. Скалярное поле.

Множество значений (область изменения) любой функции $u(M) = f(x, y, z)$ по-другому называют скалярным полем. Геометрическое место

точек пространства, где функция принимает одинаковое значение: $f(x, y, z) = \text{const} = C$ называется поверхностью уровня. Для плоского поля уравнение $f(x, y) = C$ определяет линии уровня.

Пусть функция дифференцируема в заданной области $\Omega \subset R_3$ и с помощью вектора $\bar{I} = I_x \bar{i} + I_y \bar{j} + I_z \bar{k}$ в пространстве указано определенное направление. Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (2.18)$$

называется производной функции (скалярного поля) u в точке $M(x, y, z)$ по направлению вектора \bar{I} . Здесь

$$\cos \alpha = \frac{I_x}{I}, \quad \cos \beta = \frac{I_y}{I}, \quad \cos \gamma = \frac{I_z}{I}, \quad I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

направляющие косинусы заданного вектора (направления). Градиент функции [1]

$$\text{gradu} = f'_x(M) \bar{i} + f'_y(M) \bar{j} + f'_z(M) \bar{k}$$

будем называть градиентом скалярного поля u в точке M .

Пользуясь единичным вектором заданного направления $\bar{I}^\circ = \frac{\bar{I}}{I}$, производную по направлению можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \bar{I}^\circ \cdot \text{gradu} = n_{\bar{I}} \text{gradu}.$$

Эта величина принимает наибольшее значение при $\bar{I} \uparrow \uparrow \text{gradu}$. Значит, производная по направлению в данной точке принимает наибольшее значение, когда заданное направление совпадает с направлением вектора градиента поля. Для удобства применения (2.18) записывают также в виде

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial u}{\partial x} I_x + \frac{\partial u}{\partial y} I_y + \frac{\partial u}{\partial z} I_z \right).$$

Пример. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - \arctg(y+z)$ в точке $M_0(2,1,1)$ по направлению вектора $\bar{I} = 3\bar{j} - 4\bar{k}$.

Решение. По условию $I_x = 0, I_y = 3, I_z = -4 \Rightarrow I = 5$. Частные производные функции в заданной точке:

$$u'_x(M_0) = 2x_0 = 4, \quad u'_y(M_0) = u'_z(M_0) = -\frac{1}{1+(y_0+z_0)^2} = -\frac{1}{5},$$

а производная по направлению

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial I} = \frac{1}{5} \left(4 \cdot 0 - \frac{1}{5} (3 - 4) \right) = \frac{1}{25}.$$

2. Векторное поле.

Часть пространства $\Omega \in xyz = R$, в каждой точке которой определен вектор $\bar{a}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$ носит название поля вектора \bar{a} или векторного поля \bar{a} .

Кривая $L \in \Omega$, в каждой точке к которой вектор поля $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ является касательной: $\bar{a} \parallel \bar{\tau}$ называется векторной линией поля. Иначе, говорят, что векторная линия L поля \bar{a} идет «вдоль» поля. Для векторной линии, как параллельные одному и тому же вектору $\bar{\tau}$, векторы $d\bar{r}$ и \bar{a} коллинеарны. Поэтому векторные линии поля \bar{a} определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (2.19)$$

Замкнутую цилиндрическую поверхность конечной длины, «образующими» которой служат векторные линии поля, называют соленоидом (трубкой, гр.). Если в области Ω имеет место явление переноса вещества (массы), например, течение жидкости или газа, то векторные линии поля скоростей $\bar{a} = \bar{v}$ показывают направление движения материальных частиц. Если все векторные линии поля направлены из замкнутой области наружу, то говорят, что в области имеется источник. В противном случае в области образовывается сток.

Рассмотрим вектор-функцию $\bar{a}(x, y, z)$, непрерывно дифференцируемую в области Ω . В векторном анализе применяют символический вектор

$$\bar{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\},$$

называемый набла - оператором или оператором Гамильтона. В векторной алгебре им можно оперировать как обычным вектором. Например, в

$$\text{grad}u = \bar{\nabla} \cdot u = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u$$

имеет место умножение вектора на скаляр.

Функция (скалярное поле), равная сумме частных производных непрерывно дифференцируемых в области Ω функций P, Q, R по переменным соответственно x, y, z называется дивергенцией (расхождением) векторного поля $\bar{a}(x, y, z)$ в точке (x, y, z) и обозначается через $\text{div} \bar{a}$. Пользуясь оператором Гамильтона, имеем:

$$\text{div} \bar{a} = \bar{\nabla} \cdot \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.20)$$

Разумеется, данное скалярное произведение не подчиняется переместительному закону. При $\text{div} \bar{a} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$ поле вектора \bar{a} называют соленоидальным (трубчатым). В таком поле нет ни источников, ни стоков.

3. Поток вектора через поверхность.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую в области $\Omega \subset xyz$ вектор-функцию $\bar{a}(x, y, z)$ и ориентированную в пространстве поверхность σ . Считая, что поверхность разбита на части, как при составлении интегральных сумм для поверхностных интегралов: $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$, произвольно возьмем одну из

частей $\Delta\sigma_i$ (рисунок 7). Вектор поля в произвольно взятой точке $M_i \in \Delta\sigma_i$ разложим на составляющие в направлении единичного вектора \bar{n} нормали к поверхности σ в точке и в направлении, перпендикулярном к нему:

$$\bar{a}(M_i) = \bar{a}_n(M_i) + \bar{a}_\tau(M_i).$$

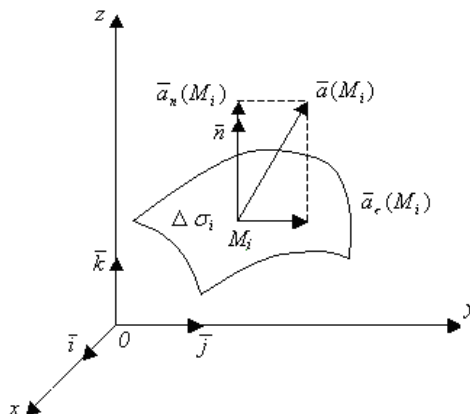


Рисунок 7 - Поток вектора через поверхность

Скалярная величина $a_n(M_i)\Delta\sigma_i = \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}(M_i)\Delta\sigma_i$ называется потоком вектора \bar{a} через площадку $\Delta\sigma_i$. Суммируя эти величины по индексу i , получим приближенное значение потока Π вектора \bar{a} через поверхность σ . С другой точки зрения полученное выражение представляет собой интегральную сумму для поверхностного интеграла II-рода в общем виде от вектор-функции $\bar{a}(M) = \{P, Q, R\}$ по ориентированной поверхности σ . После перехода к пределу придем к формуле

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy, \quad (2.21)$$

выражающей физический смысл поверхностного интеграла по координатам. Здесь $\bar{n} d\sigma = d\vec{\sigma} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$ называется вектор-площадкой. Итак, поверхностный интеграл II-рода от вектор-функции \bar{a} по ориентированной поверхности σ равен потоку вектора \bar{a} через поверхность σ - количеству векторных линий, проходящих через поверхность σ в направлении нормали \bar{n} к поверхности.

Касательная составляющая $\bar{a}_\tau(M)$ вектора поля направлена “вдоль” поверхности. Ее поток через поверхность равен нулю. Поток вектора \bar{a} через поверхность σ , сплошь состоящей из векторных линий поля, также равен нулю, так как $a_n(M) = 0 \quad \forall M \in \sigma$. Заметим, что для поля скоростей $\bar{a} = \bar{v}$ движущейся в Ω жидкости или газа поток Π определяет количество вещества, проходящего через поверхность σ в положительном направлении нормали за единицу времени.

Рассмотрим тело $V \in \Omega$, ограниченное замкнутой поверхностью σ , ориентированной с помощью внешней нормали.

Теорема Гаусса-Остроградского. Поток вектора \vec{a} через ориентированную в пространстве замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля \vec{a} по ограниченной поверхностью σ области V :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \Pi \quad (2.22)$$

или

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (2.23)$$

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + y\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\sigma: z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$ (нормаль внешняя) путем непосредственного вычисления и с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

Решение. По условию: $P = x + z, Q = 0, R = y$. Поверхность σ состоит из частей $\sigma_1: 4 \leq z \leq 8, 0 \leq \left(\hat{n}, z\right) \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sigma_2: 0 \leq z \leq 4, \frac{\pi}{2} \leq \left(\hat{n}, z\right) \leq \pi$ заданных параболоидов вращения (вокруг оси Oz), вырезаемых плоскостью $z = 4$ ($\sigma_{1,xy} = \sigma_{2,xy}: x^2 + y^2 \leq 4$, рисунок 8).

1. Непосредственное вычисление потока вектора через поверхность производится по формулам (2.21) и (2.17):

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma_{1,yz}} \left(\sqrt{8-z-y^2} + z \right) dy dz - \iint_{\sigma_{1,xy}} \left(-\sqrt{8-z-y^2} + z \right) dy dz + \iint_{\sigma_{1,xy}} y dx dy + \\ &+ \iint_{\sigma_{2,yz}} \left(\sqrt{z-y^2} + z \right) dy dz - \iint_{\sigma_{2,yz}} \left(-\sqrt{z-y^2} + z \right) dy dz - \iint_{\sigma_{2,xy}} y dx dy = \\ &= 2 \left(\int_4^8 dz \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \sqrt{8-z-y^2} dy + \int_0^4 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2} dy \right) = \left| \begin{array}{lll} 8-z=t & z=4 & t=4 \\ dz=-dt & z=8 & t=0 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

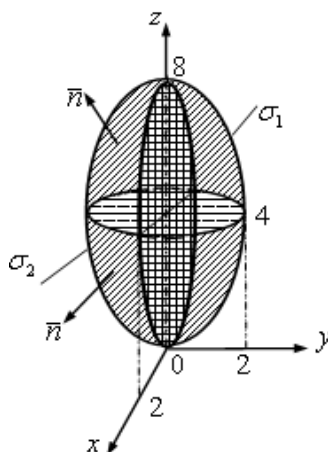


Рисунок 8 – Поток вектора через замкнутую поверхность

Сохраняя прежнее обозначение переменной интегрирования ($t \rightarrow z$), в силу (2.28) получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= 8 \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2} dy = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{z} \sin t \quad y = 0 \quad t = 0 \\ dy = \sqrt{z} \cos t dt \quad y = \sqrt{z} \quad t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^4 z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \cos 2t) dt = z^2 \Big|_0^4 \cdot (2t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi. \end{aligned}$$

2. Учитывая симметричность тела V относительно координатных плоскостей xOz и yOz , применяем (2.23):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{a} &= \frac{\partial P}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Pi = \iiint_V dx dy dz; \\ \Pi &= 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{8-x^2-y^2} dz = 8 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2) dy = \frac{16}{3} \int_0^2 (4-x^2) \sqrt{4-x^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \quad x = 0 \quad t = 0 \\ dx = 2 \cos t dt \quad x = 2 \quad t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^2 dt = \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt = 16\pi. \end{aligned}$$

Лекция 7. Линейный интеграл векторного поля. Потенциальное поле

Цель лекции: раскрыть физический смысл понятий и величин, связанных с векторным полем. Подчеркнуть связь изучаемого курса с дисциплинами специализации студентов электроэнергетического факультета и технической практикой.

Пусть в векторном поле \bar{a} вдоль ориентированной кривой $L \in \Omega$ точка M движется в направлении, указанном с помощью касательного вектора $\bar{\tau}$ (рисунок 9). Криволинейный интеграл II-рода

$$\int_L \bar{a} d\bar{r} = \int_L P dx + Q dy + R dz \quad (2.24)$$

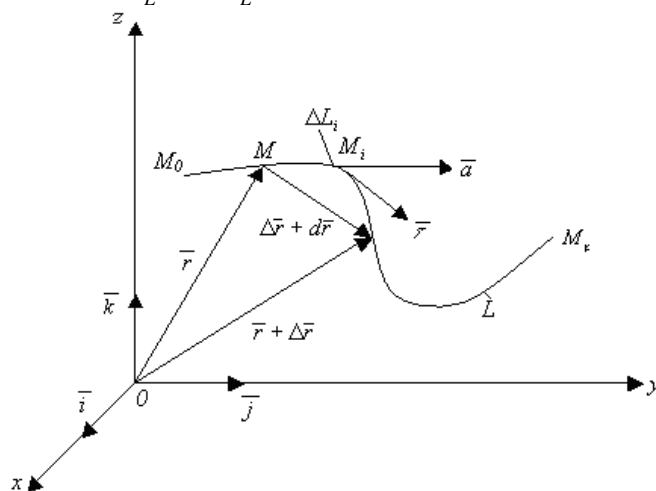


Рисунок 9 – Линейный интеграл векторного поля

называют линейным интегралом векторного поля. Если кривая интегрирования замкнутая, то (2.24) называется циркуляцией вектора \bar{a} по контуру L .

Вектор поля может иметь различный физический смысл. В силовом поле, например, $\bar{a} = \bar{F}$ есть сила, зависящая только от положения движущейся точки $M(x, y, z) \in R_3$ в пространстве. Положение точки на кривой L определяется ее радиусом-вектором $\bar{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$. Элементарное перемещение точки: $d\bar{r} = (dx, dy, dz) \parallel \bar{\tau}, |d\bar{r}| \approx dL$. В (2.24) подынтегральное выражение $\bar{F}d\bar{r}$ определяет элементарную работу силового поля, а интеграл выражает работу A поля по перемещению точки M вдоль кривой L из ее начального положения M_0 до конечного положения M_k . Формула

$$A = \int_L \bar{F}d\bar{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

выражает физический смысл криволинейного интеграла II-рода.

Если в Ω существует функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R, \quad (2.25)$$

то поле вектора $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ называется потенциальным, $u(x, y, z)$ - потенциальной функцией, вкратце, потенциалом поля. Для скалярного поля, определяемого функцией $u(x, y, z)$ в области Ω ,

$$\bar{F} = \text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Таким образом, потенциальное векторное поле есть поле вектора градиента некоторого скалярного поля.

Если условия (2.25) выполняются, то [1]:

$$\bar{F}d\bar{r} = Pdx + Qdy + Rdz = du(x, y, z). \quad (2.26)$$

Верно и обратное, т.е. условия (2.25) и (2.26) равносильны. При выполнении любого из них

$$A = \int_L du(M) = \int_{(M_0)}^{(M_k)} du(M) = u(M_k) - u(M_0),$$

т.е. работа потенциального силового поля не зависит от формы пути (дуги $M_0 \overset{\cup}{M} \in L$) движущейся точки M и всегда равна разности значений потенциала поля в конечном и начальном положениях точки. Следовательно, циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру в Ω равна нулю. Равенства (2.25,26) представляют собой условия независимости криволинейного интеграла II-рода (2.8) от формы пути интегрирования L с закрепленными начальной и конечной точками. Для плоского силового поля в этих условиях будут отсутствовать переменная z и функция R , следовательно,

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (2.27)$$

Пример. Найти работу силы $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + \vec{j}$ при перемещении точки M по кривой $L: x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) от точки $A(2;0)$ к точке $B(-2;0)$ (рисунок 10).

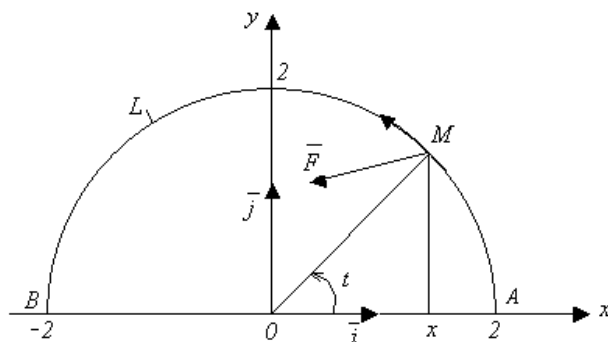


Рисунок 10 – Работа плоского силового поля

Решение. Поле силы \vec{F} и кривая L (верхняя полуокружность) плоские:

$$P = x - y, \quad Q = 1; \quad y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow dy = -\frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad 2 \geq x \geq -2.$$

Подставив эти выражения в (2.27) и учитывая свойство определенного интеграла по симметричному относительно начала координат промежутку:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{при } f - \text{четной,} \\ 0 & \text{при } f - \text{нечетной,} \end{cases} \quad (2.28)$$

получим:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^{-2} \left(x - \sqrt{4 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx = -2 \int_2^0 \sqrt{4 - x^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \cos t \quad x = 0 \quad t = \frac{\pi}{2} \\ dx = -2 \sin t dt \quad x = 2 \quad t = 0 \end{array} \right| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Потенциал поля (если он имеется) с точностью до постоянной слагаемой $C = u(M_0)$ можно найти путем интегрирования равенств (2.25). В потенциальном поле дугу M_0M кривой L (рисунок 11), сохранив ее конечные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$, можно заменить любой другой линией, например,

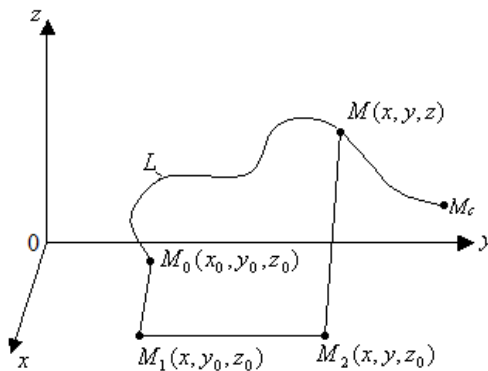


Рисунок 11 – Потенциал поля

ломаной линией $M_0M_1M_2M$ с звеньями, параллельными осям координат. Это позволит найти потенциальную функцию поля в виде

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C.$$

Необходимым и достаточным условием существования потенциала поля является равенство нулю циркуляции поля по любому замкнутому контуру $L \in \Omega$: $\oint_L \vec{a} d\vec{r} = 0$.

Пример. Найти циркуляцию \mathcal{U} поля вектора $\vec{a} = \frac{y}{3}\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$ по контуру $\Gamma: x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$ (в направлении возрастания параметра t , рисунок 10).

Решение. По условию:

$$P = \frac{y}{3} = \frac{2}{3}\sin t, \quad Q = -3x = -6\cos t, \quad R = x = 2\cos t;$$

$$dx = -2\sin t dt, \quad dy = 2\cos t dt, \quad dz = 2(\sin t - \cos t) dt.$$

Подставим эти выражения в (2.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t - 24\cos^2 t + 6\cos t \sin t) dt = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (-13 - 11\cos 2t + 3\sin 2t) dt = -\frac{52\pi}{3}. \end{aligned}$$

Поле не является потенциальным.

Ротор векторного поля. Теорема Стокса.

Векторное произведение $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot} \vec{a}$ носит название ротора (вихря) векторного поля \vec{a} . В силу формул векторной алгебры [1]:

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\text{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Область Ω называется односвязной, если в ней любой замкнутый контур путем непрерывного деформирования можно стянуть в одну точку.

Теорема. Для того, чтобы поле непрерывно дифференцируемого в односвязной области Ω вектора $\vec{a}(x, y, z)$ было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$, или, что то же:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.30)$$

Условия (2.25) и (2.30) равносильны. Последние часто применяются для проверки потенциальности поля или, что то же, независимости криволинейного интеграла II-рода от формы пути интегрирования. При

$\text{rot} \bar{a} = \bar{0}$ поле вектора \bar{a} называют безвихревым. Это свидетельствует об отсутствии в рассматриваемой области вращательных движений, а в жидкой или газовой среде – об отсутствии турбулентных (вихревых) течений.

Символическое выражение

$$\Delta = \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

носит название оператора Лапласа. Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \vee \quad (\bar{\nabla}, \bar{\nabla} u) = \bar{\nabla} \cdot \text{gradu} = 0$$

известно в математике под названием уравнения Лапласа или гармонического уравнения. Любое решение $u(x, y, z)$ этого уравнения называют функцией Лапласа или гармонической функцией. Определяемое такой функцией скалярное поле называется гармоническим или лапласовым полем. Потенциал безвихревого и соленоидального векторного поля есть гармоническая функция, т.е. образует гармоническое скалярное поле.

Оператор Гамильтона позволяет применять правила векторной алгебры для изучения характеристик векторного поля.

Говорят, что контур и натянутая на него поверхность в пространстве взаимно (одинаково) ориентированы, если при наблюдении с положительного конца нормали к поверхности обход по контуру наблюдается против хода часовой стрелки (плоская область при обходе остается слева).

Теорема Стокса. В односвязной области Ω циркуляция вектора \bar{a} по контуру L равна потоку вектора ротора поля через поверхность σ , натянутую на контур L и одинаково с ним ориентированную, т.е.

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma = \oint_L \bar{a} d\bar{r} \quad (2.31)$$

или

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (2.32)$$

Из (2.31) следует, что циркуляция вектора безвихревого поля по любому замкнутому контуру в односвязной области равна нулю, т.е. безвихревое векторное поле есть поле потенциальное. Формула Стокса (2.32) для плоского векторного поля $\bar{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ и области D , ограниченной контуром L , ранее была установлена Гринном:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$$

Список литературы

1. Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (полный курс). –Алматы: NSN-Company, 2009. -429 с.
2. Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Решение дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления. Методические указания и задания к расчетно-графическим работам. – Алматы, АУЭС, 2014, ч.1. – 19 с.
3. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. –М.: Наука, 2000.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 2002.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы. Под ред. А.В. Ефимова. –М.: Наука, 2004, ч.3.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). –М.: Высшая школа, 2003.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). –М.: Айрис пресс, 2004.
8. Рябушко А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. –Минск-Алматы, 2002, ч.3.
9. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). –М: Айрис пресс, 2005, 1,2-курсы.
10. Kazbek Khasseinov Canons of matematics. –Moscow: Nauka, 2007.

Содержание

Модуль 1 Операционное исчисление	3
Лекция 1. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа.....	3
Свойства преобразования Лапласа (теоремы)	3
Лекция 2. Обратное преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений (ДУ) методами операционного исчисления (ОИ)	6
Лекция 3. Применение интегралов Дюамеля к решению задачи Коши для ЛНДУ	8
Модуль 2. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля.....	10
Лекция 4. Криволинейные интегралы.....	10
Лекция 5. Поверхностные интегралы.	14
Лекция 6. Элементы теории поля. Скалярное и векторное поля. Основные характеристики.....	18
Лекция 7. Линейный интеграл векторного поля. Потенциальное поле.....	23
Список литературы.....	28

Киров Мустахишевич Мустахишев,
Бегимбет Жумабайулы Атабай

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать _____
Тираж 100 экз.
Объем 1,9 уч. изд. лист

Формат 60x84 1/16
Бумага типографическая
Заказ _____ Цена 950 тг

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126