Коммерциялық емес акционерлік қоғам

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

АМАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРДІ ҚОЛДАНЫП ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

5B071800 - Электр энергетикасы мамандығы студенттері үшін дәрістер жинағы

Алматы 2014

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Мұстахишев К.М., Атабай Б.Ж. Амалдық есептеулерді қолданып дифференциалдық теңдеулерді шешу. 5В071800 - Электр энергетикасы мамандығы студенттері үшін дәрістер жинағы.– Алматы: АЭжБУ, 2014. -29 б.

Дәрістер жинағында амалдық есептеулерді қолданып дифференциалдық теңдеулерді шешу курсы бойынша 7 дәріс конспектісі және 12 есеп пен мысалдардың әртүрлі әдістермен шығарылулары келтірілген.

Ил. - 11, әдеб. көрсеткіші – 10 атау.

Пікір беруші: тех.ғылым.канд., доцент К.А. Бакенов

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2014 жылғы жоспары бойынша басылады.

1 модуль. Операторлық есептеу

1-дәріс. Түпнұсқа мен бейне. Лаплас түрлендіруі

Дәрістің мақсаты: студенттерді Лаплас түрлендіруімен (операторымен) және оның қасиеттерімен таныстыру.

Аргументі уақыт $t \geq 0$ болатын $f(t)$ функциясын қарастыралық. Егер ол:

1) $t < 0$ болғанда $f(t) = 0$ және $f(0) = f(0+0)$;

2) кез келген $[0,T]$ кесіндісінде $f(t)$ үзіліссіз функция немесе оның саны шекті бірінші текті үзіліс нүктелері бар;

3) $f(t)$ экспонентамен шектелген, яғни

$$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}, \ t > 0 \tag{1.1}$$

болатындай $\sigma_0 > 0$, $M > 0$ тұрақтылары бар шарттарына қанағаттандырса, оны түпнұсқа дейміз.

Бірінші шарт орындалуы үшін түпнұсқаның құрамында Хэвисайд функциясы деп аталатын

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

көбейткіші бар деп есептелінеді. Ал, 3) шартты $t \to \infty$-да түпнұсқа модулінің өсуі экспонентаның өсуінен тез емес деп түсінеміз; $\sigma_0 = \inf \sigma$ саны $f(t)$ функциясының өсу көрсеткіші деп аталады.

Аталған шарттар орындалса, онда $f(t)$ функциясының бейнесі деп аталатын меншіксіз интеграл

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = L[f;p] \tag{1.3}$$

$\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ жарты жазықтығында абсолют және бірқалыпты жинақты. Бұл аймақта $F(p)$ аналитикалық функция, ол $f(t)$ түпнұсқасының Лаплас операторы (1.3) көмегімен түрлендірілген бейнесі. Бұл дерек шартты түрде

$$f(t) \doteq F(p) \quad \vee \quad f(t) \doteq L[f;p] \tag{1.4}$$

деп жазылады.

Лаплас интегралы (1.3) жалпы жағдайда комплекс параметрден $p = \sigma + ir$ тәуелді. Ондағы интегралданушы функция $\sigma > \sigma_0$ болып, $t \to +\infty$-да өшуші экспонентадан тезірек кемиді:

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| = \left|e^{-\sigma t} f(t)(\cos rt - i\sin rt)\right| \leq Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}.$$

Лаплас түрлендіруінің қасиеттері (теоремалар).

Лаплас түрлендіруінің қасиеттері құрамында параметр бар меншіксіз интегралдың қасиеттерінен [1] туындайды. Олардың негізгілерін атап өтелік.

1. Сызықтық қасиет:

$$f_j(t) \div F_j(p), \quad j = \overline{1,k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} C_j f_j(t) \div \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(p), \tag{1.5}$$

$$\forall C_j = const \in R, \quad \mathrm{Re}\, p > \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad \forall k \in N .$$

Әрі қарай (1.4) сәйкестігі орындалады деп есептейміз.

2. Ұқсастық теоремасы:

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\, p > \alpha\sigma_0 . \qquad (1.6)$$

3. Ығысу теоремасы:

$$e^{\alpha t} f(t) \div F(p - \alpha), \qquad \forall \alpha \in R, \quad \mathrm{Re}(p - \alpha) > \sigma_0 . \qquad (1.7)$$

4. Кешігу теоремасы:

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p), \quad \forall \tau > 0, \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma . \qquad (1.8)$$

5. Түпнұсқаны дифференциалдау. Түпнұсқаның туындылары да $f^{(k)}(t), \ k = \overline{1,n}$ түпнұсқа болса, онда:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0), \quad f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \dots ;$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0); \qquad (1.9)$$

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0 + 0), \quad \forall n \in \mathrm{N}, \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0 .$$

6. Бейнені дифференциалдау:

$$t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p), \quad \forall n \in \mathrm{N} . \qquad (1.10)$$

7. Түпнұсқаны интегралдау:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0 . \qquad (1.11)$$

8. Бейнені интегралдау. Егер $\dfrac{f(t)}{t}$ түпнұсқа болса, онда

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q) dq . \qquad (1.12)$$

Егер $f_1(t), \ f_2(t)$ түпнұсқалар болса, онда

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_2 * f_1 \qquad (1.13)$$

өрнегі олардың шиыршығы (орамасы) деп аталады.

9. Бейнелерді көбейту теоремасы:

$$f_j(t) \div F_j(p), \quad j = 1; 2 \quad \Rightarrow \quad f_1 * f_2 \div F_1(p) \cdot F_2(p) . \qquad (1.14)$$

10. Параметр бойынша дифференциалдау және интегралдау. Егер $f(t,q) \div F(p,q)$ және t айнымалысының функциялары $\dfrac{\partial}{\partial q} f(t,q)$, $\displaystyle\int_{q_1}^{q_2} f(t,q) dq$ түпнұсқалар болса, онда:

$$\frac{\partial}{\partial q} f(t,q) \div \frac{\partial}{\partial q} F(p,q), \quad \int_{q_1}^{q_2} f(t,q) dq \div \int_{q_1}^{q_2} F(p,q) dq . \qquad (1.15)$$

Операторлық есептеуде екі (тура және кері) есеп қарастырылады; 1) берілген түпнұсқаның $f(t)$ бейнесін $F(p)$ табу, 2) белгілі бейне $F(p)$ бойынша оның түпнұсқасын $f(t)$ қалпына келтіру. Бірінші есепті бейненің анықтамасының көмегімен, яғни (1.3) I-текті меншіксіз интегралын тура есептеу арқылы шеше аламыз.

Мысал. $f(t)=t$ функциясының бейнесін табыңыз.

Шешу:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\lim_{в\to\infty}\int_0^{в} te^{-pt}dt=\left|\begin{matrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{в\to\infty}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{в}+\frac{1}{p}\int_0^{в} e^{-pt}dt\right)=\lim_{в\to\infty}\left(-\frac{в}{p}e^{-pв}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{в}\right)=$$

$$=\lim_{в\to\infty}\left(-\frac{в}{p}e^{-pв}-\frac{1}{p^2}e^{-pв}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2},$$

өйткені $в\to+\infty$ -да алғашқы екі қосылғыш нөлге ұмтылады. Сонымен, Лаплас интегралы жинақты және

$$t\div\frac{1}{p^2}.$$

Үзбе-сызықтық (полигондық-көпбұрыштық) функцияның

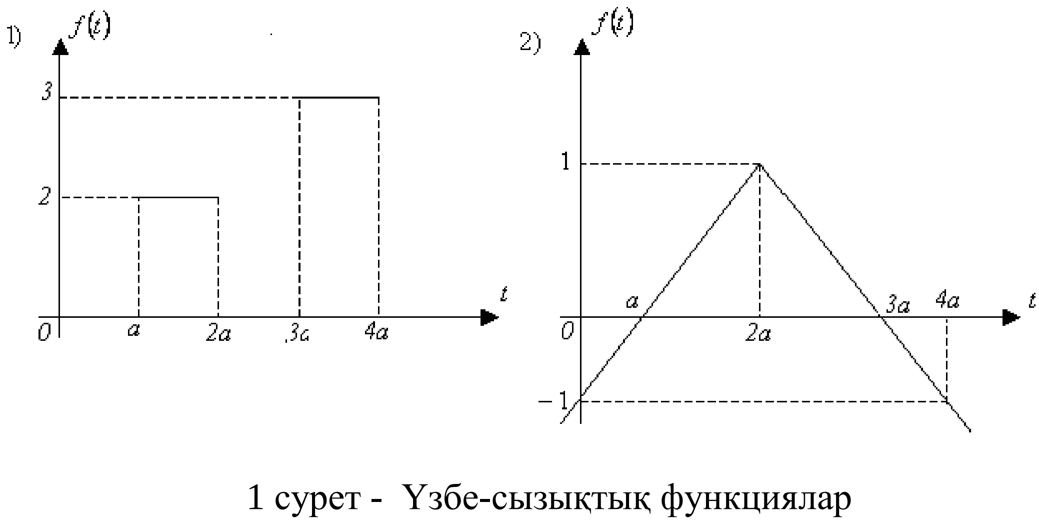
$$f(t)=f(t_k+0)+\frac{f(t_k-0)-f(t_k+0)}{t_{k+1}-t_k}(t-t_k),\quad t_k\le t\le t_{k+1},\quad k=\overline{1,n}.$$

бейнесін

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}e^{-pt_k}\left(f(t_k+0)-f(t_k-0)+\frac{1}{p}\left(f'(t_k+0)-f'(t_k-0)\right)\right)\frac{1}{p}$$

табудың өзіндік ерекшеліктері бар.

Есеп. Сызба түрінде (1 сурет) берілген түпнұсқалардың бейнелерін табыңыз.



1 сурет - Үзбе-сызықтық функциялар

Шешу: берілген түпнұсқалар $f(t)$ түріндегі үзбе-сызықтық функциялар. Бейнелері $F(p)$ түрінде табылады:

1) $t_k=ka,\quad k=\overline{1,4},\quad f(t_1-0)=f(t_2+0)=f(t_3-0)=f(t_4+0)=0,$

$$f(t_1+0)=f(t_2-0)=2,\qquad f(t_3+0)=f(t_4-0)=3,\qquad \forall f'(t_k\pm 0)=0;$$

$$F(p)=\frac{1}{p}\left(2e^{-ap}-2e^{-2ap}+3e^{-3ap}-3e^{-4ap}\right)=\frac{1}{p}e^{-ap}\left(1-e^{-ap}\right)\left(2+3e^{-2ap}\right).$$

2) $k=1;2,\quad t_1=0,\quad t_2=2a;\quad f(t_1-0)=f'(t_1-0)=0,\quad f(t_1+0)=-1,$

$$f'(t_1+0)=f'(t_2-0)=\frac{1}{a},\qquad f'(t_2+0)=-\frac{1}{a};$$

$$F(p)=\left(-1+\frac{1}{ap}-\frac{2}{ap}e^{-2ap}\right)\frac{1}{p}=\frac{1}{ap^2}\left(1-2e^{-2ap}\right)-\frac{1}{p}.$$

Осындай әдістермен және Лаплас түрлендіруі қасиеттерінің көмегімен негізгі элементар функциялардың бейнелерін тапсақ, «Түпнұсқа-бейне» кестесін құра аламыз:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	8	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	9	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	10	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	11	$tsh\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
7	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	12	$tch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$

2-дәріс. Лапластың кері түрлендіруі. Дифференциалдық теңдеулерді (ДТ) операторлық есептеу (ОЕ) әдістерімен шешу

Дәрістің мақсаты: ОЕ-дің кері есебін және коэффициенттері тұрақты сызықтық біртексіз ДТ-ді (СБзДТ) ОЕ әдістерімен шешу жолдарын баяндау.

Лаплас түрлендіруі үшін

$$f(t)\div\int_0^{+\infty}F(s)e^{st}ds$$

қайырылу формуласы орын алады. Оның көмегімен берілген бейнесі бойынша түпнұсқаны қалпына келтіруге болады. Бірақ, іс жүзінде қолдануға қайырылу формуласының жіктеу теоремасы деп аталатын салдары және «Түпнұсқа-бейне» кестесі ыңғайлылырақ.

Теорема: $\frac{1}{p}$-дің дәрежелері бойынша (шексіз алыстағы нүктенің маңында) қатарға жіктелетін бейненің түпнұсқасы t-ның дәрежелері бойынша қатар болады:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n} \div \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\frac{t^n}{n!}, \quad \forall c_n = const \in \mathrm{R} .$$

Операторлық есептеу әдістерімен коэффициенттері тұрақты сызықтық дифференциалдық теңдеулер мен олардың системалары үшін Коши есебін шешуге болады. Ол үшін берілген дифференциалдық теңдеулердің құрамындағы барлық белгілі және белгісіз функциялар мен олардың туындылары өздерінің Лаплас бойынша бейнелерімен алмастырылады. Пайда болған алгебралық теңдеуден не теңдеулер системасынан белгісіз функциялардың бейнелері табылады. Олар бойынша қалпына келтірілген түпнұсқалар Коши есебінің шешуін береді. Мысалдар қарастыралық;

1-есеп. Коши есебінің шешуін табыңыз:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos\frac{t}{2}, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(t) = 0 .$$

Шешу: ізделініп отырған шешу $x(t) \doteqdot F(p)$ болсын десек, онда (1.9) бойынша

$$\dot{x}(t) \div pF(p) - 1, \quad \ddot{x}(t) \div p^2F(p) - p .$$

Кестеден бос мүшенің бейнесін анықтап, берілген теңдеуде мүшелеп бейнелерге көшейік:

$$p^2F(p) - p - 3pF(p) + 3 + 2F(p) = 2\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}};$$

$$F(p) = \frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p-1)(p-2)\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{(p-1)^2+\frac{1}{4}} =$$

$$= \left| A = 2,\ B = \frac{3}{53},\ C = -\frac{56}{53},\ D = -\frac{18}{53} \right|;$$

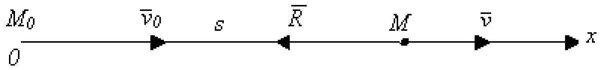
$$F(p) = \frac{2}{p-1} + \frac{3}{53}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{56}{53}\cdot\frac{(p-1)+\frac{37}{14}\cdot\frac{1}{2}}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}.$$

Коши есебінің шешуі

$$x(t) = 2e^t + \frac{3}{53}e^{2t} - \frac{56}{53}\left(e^t\cos\frac{t}{2} - \frac{37}{14}e^t\sin\frac{t}{2}\right).$$

2-есеп. Массасы m материялық нүктеге жылдамдыққа v пропорционал $R = 10mv$ кедергі күші әсер етеді. Бастапқы жылдамдығы $v_0 = 1\ м/с$ нүктенің шектеусіз уақыт аралығында өтетін жолын s табыңыз.

Шешу: нүктенің бастапқы ($t=0$ болғандағы) орнын қашықтықтарды өлшеудің бас нүктесі (2 сурет) ретінде қабылдап, Коши есебіне келеміз



2 сурет – Нүктенің M түзу сызықты қозғалысы

$$m\ddot{x}=-10m\dot{x}\Rightarrow \ddot{x}+10\dot{x}=0, \qquad x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=1.$$

Мұнда $x(t)\doteq F(p)$ десек, (1.9)-дан:

$$\dot{x}(t)\doteq pF(p), \qquad \doteq p^2F(p)-1.$$

Құрылған ДТ-да бейнелерге көшсек:

$$F(p)=\frac{1}{p(p+10)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+10}=\left|A=-B=0{,}1\right|;$$

$$x(t)=0{,}1-0{,}1e^{-10t}\Rightarrow s=\lim_{t\to\infty}x(t)=0{,}1м.$$

3-есеп. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y,\\ \dot{y}=3x; \qquad x(0)=0, \qquad y(0)=1.\end{cases}$$

Шешу: системаның болжалды шешуін: $x(t)\doteq X(p), \quad y(t)\doteq Y(p)$ десек, онда (1.9)-дан:

$$\dot{x}(t)\doteq pX(p), \qquad \dot{y}(t)\doteq pY(p)-1.$$

Бұл бейнелерді берілген системаға қойып, алгебралық теңдеулер системасына келеміз:

$$\begin{cases}pX(p)=-2X(p)+Y(p),\\ pY(p)-1=3X(p)\end{cases}\Rightarrow X=\frac{1}{(p+3)(p-1)}, \qquad Y=(p+2)X;$$

$$X=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+3}\right), \qquad Y=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{p-1}+\frac{1}{p+3}\right).$$

Система үшін Коши есебінің шешуі:

$$x(t)=\frac{1}{4}\left(e^{t}-e^{-3t}\right), \qquad y(t)=\frac{1}{4}\left(3e^{t}+e^{-3t}\right).$$

3-дәріс. СБзДТ үшін Коши есебін шешуде Дюамель интегралының қолданылуы

Дәрістің мақсаты: Дюамель интегралдары туралы түсінік беріп, оларды оң жақтары түпнұсқа емес коэффициенттері тұрақты СБзДТ-ді шешуде қолдану әдістерін көрсету.

Дифференциалданатын және түпнұсқа болатын $f_j(t)$ функциялары үшін $f_j(t)\div F_j(p), \quad j=1;2$ болсын. Олардың кез келген біреуі мен екіншісінің туындысының орамасы түпнұсқа болса, онда Дюамель интегралдары деп аталатын

$$f_1(0)f_2(t)+(f_1'*f_2)(t)=f_2(0)f_1(t)+(f_2'*f_1)(t)\div pF_1(p)F_2(p) \qquad (1.16)$$

қатынастары орын алады. Қолданылып жүрген [1] белгілеуді пайдаланып, берілген ДТ-ны қысқаша

$$L_n[x(t)] = f(t) \tag{1.17}$$

деп жазалық.

Белгісіз функцияны $x(t)$ алмастыру арқылы есептің бастапқы шарттарын нөлдік түрге:

$$x(0) = \dot{x}(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0 \tag{1.18}$$

келтіруге болады. Берілген (1.17) теңдеуімен сол жағы бірдей

$$L_n[x(t)] = 1$$

дифференциалдық теңдеуінің (1.18) шарттарына қанағаттандыратын шешуі $x_1(t)$ табылған делік. Онда Дюамель интегралдарының (1.16) көмегімен (1.17-18) есебінің шешуін

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(\tau) f(t-\tau)d\tau, \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(t-\tau) f(\tau)d\tau,$$
$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau, \; x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau. \tag{1.19}$$

функцияларының бірі арқылы өрнектеуге болады. Мысалдар қарастыралық.

1. Коши есебінің шешуін табыңыз:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Шешу: $L_2[x(t)] = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 1$ теңдеуінің шешуін $x_1(t) \doteq F(p), x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ табайық. Ол үшін (1.9)-дан: $\dot{x}_1(t) = pF(p)$, $\ddot{x}_1(t) = p^2F(p)$ деп алып, $L_2[x_1(t)] = 1$ тепе-теңдігінде бейнелерге көшеміз:

$$F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2} = \left| A = -B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2} \right|.$$

Кестеден:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1+2t}{4}e^{-2t}; \qquad \dot{x}_1 = te^{-2t}, \qquad f(t) = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$$

функцияларын (1.19) –дың екіншісіне қойып, ізделінуші шешуді табамыз:

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2} = -\frac{1}{4}e^{-2t}\left((2t+1)\int_0^t \frac{-2d\tau}{(2\tau+1)^2} + \int_0^t \frac{d(2\tau+1)}{2\tau+1}\right);$$

$$x(t) = \frac{2t - \ln(2t+1)}{4}e^{-2t}.$$

2. Коши есебінің шешуін табыңыз:

$$\ddot{x} + x = \frac{3}{1+\sin t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Шешу: алдымен $x_1(t) \div F(p)$ деп, берілген есепке сай $\ddot{x} + x = 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ Коши есебінің шешуін табалық; $p^2F(p) + F(p) = \dfrac{1}{p}$ операторлық теңдеуінен:

$$F(p)=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+1}=\left|\ A=1,\ B=-1,\ C=0\right|.$$

Демек, $x_1(t)=1-\cos t,\ \dot{x}_1(t)=\sin t$, ал, берілуінде $f(t)=\dfrac{3}{1+\sin t}$.

Енді (1.19) теңдіктерінің екіншісін пайдалайық:

$$x(t)=3\int_0^t \sin(t-\tau)\frac{d\tau}{1+\sin\tau}=3\left(\sin t\int_0^t\frac{\cos\tau}{1+\sin\tau}d\tau-\cos t\int_0^t\frac{\sin\tau}{1+\sin\tau}d\tau\right);$$

$$x(t)=3\left(\sin t\cdot\ln(1+\sin\tau)\Big|_0^t\right)-\cos t\cdot\left(t-2\int_0^t\frac{1}{\left(1+tg\frac{\tau}{2}\right)^2}\cdot\frac{d\tau}{2\cos^2\frac{\tau}{2}}\right);$$

$$x(t)=3\left(\sin t\cdot\ln(1+\sin t)-\left(t+\frac{2}{1+tg\frac{\tau}{2}}\right)\Bigg|_0^t\right)\cos t.$$

Ақырында Коши есебінің шешуі

$$x(t)=3\left(\sin t\cdot\ln(1+\sin t)-\left(t+\frac{2}{1+tg\frac{t}{2}}-2\right)\cos t\right).$$

2 модуль. Қисықсызықты және беттік интегралдар. Өріс теориясының элементтері

4-дәріс. Қисықсызықты интегралдар

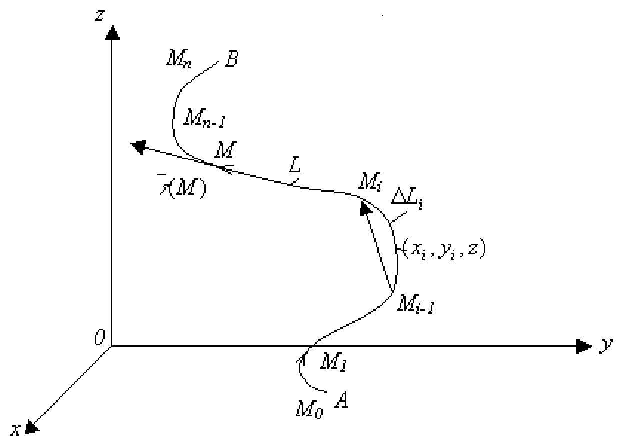
Дәрістің мақсаты: I- және II- текті қисықсызықты интегралдардың негізгі түсініктерін, қасиеттерін және есептеу әдістерін баяндау.

1. Доғаның ұзындығы бойынша қисықсызықты интеграл.

Кеңістіктегі өзі мен өзі қиылыспайтын $L=\breve{AB}\in R_3$ (3 сурет) қисығының нүктелерінде анықталған $f(M)=f(x,y,z)$ функциясын қарайық. Қисықты $A=M_0,M_1,...,M_n=B$ нүктелерімен қалауымызша өзара айқаспайтын n бөлікке ΔL_i бөлейік: $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta L_i=L.$ Әрбір бөліктен қалауымызша $(x_i,y_i,z_i)\in\Delta L_i$ нүктесін алып, функцияның сол нүктелердегі мәндерін тауып, оларды сәйкес бөліктер доғаларының ұзындықтарына көбейтіп, қосалық. Пайда болған өрнек

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta L_i \qquad (2.1)$$

$f(x,y,z)$ функциясы үшін L қисығы доғасының ұзындығы бойынша құрылған



3 сурет – Қисықсызықты интегралдар

интегралдық қосынды деп аталады. Құраушы доғалар ұзындықтарының ең үлкені:

$$\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \{\Delta L_i\}, \ \lambda \to 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \Delta L_i \to 0, \ n \to +\infty$$

қисықты бөлшектеу қадамы деп аталады.

Анықтама. Егер $\lambda \to 0$- да (2.1) интегралдық қосындысының қисықты бөлшектеу және бөліктерден (x_i, y_i, z_i) нүктелерін таңдау әдістерінен тәуелсіз нақты шегі бар болса, онда сол сан $f(x,y,z)$ функциясынан L қисығы доғасының ұзындығы бойынша (І-текті) қисықсызықты интеграл деп аталып, $\int_L f dL$ деп белгіленеді.

Мұнда $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ - интегралдау қисығы L доғасы ұзындығының элементі [1]. Анықтама бойынша

$$\int_L f(x,y,z) dL = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i \ . \tag{2.2}$$

Теңдіктің оң жағындағы шек бар (нақты санға тең) болса, онда $f(x,y,z)$-ді L қисығы доғасының ұзындығы бойынша интегралданатын функция дейді.

Теорема. Егер $f(x,y,z)$ функциясы L қисығының нүктелерінде үзіліссіз болса, онда сол қисық доғасының ұзындығы бойынша функция интегралданады.

Есептеу барысында І-текті қисықсызықты интеграл анықталған интегралға келтіріледі. Сондықтан интегралдың негізгі қасиеттері қисық доғасының ұзындығы бойынша алынған интегралға да тән. І-текті қисықсызықты интегралдың мәні интегралдау айнымалыларының белгілеулерінен және интегралдау қисығы бойымен доға ұзындықтарын есептеу бағытынан тәуелсіз. Қисық $L = L_1 + L_2$ доғасы ұзындығы бойынша интегралданатын $f_i(M), i = \overline{1,k}$ функциялары үшін аддитивтік және біртектілік қасиеттер орындалады:

$$\int_L \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(M) dL = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_L f_i(M) dL, \ \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} .$$

Тұзақ тәрізді қисықтарды өздері мен өздері қиылыспайтын бөліктерге бөліп қарауға болады.

Интегралданушы функция $f(M)=1$ $\forall M \in L$ болса, онда І-текті қисықсызықты интеграл интегралдау қисығы доғасының ұзындығын анықтайды:

$$\int_L dL = L .$$

І-текті қисықсызықты интеграл теңсіздіктер арқылы өрнектелетін қасиеттерге де ие.

Интегралдау қисығы материялық дене (мысалы, шынжыр) болып, интегралданушы функция $f=\mu(x,y,z)$ дене массасының доға бойынша таралу тығыздығы болса, І-текті қисықсызықты интеграл интегралдау қисығының массасын анықтайды:

$$M = \int_L \mu(x,y,z)dL .$$

І-текті қисықсызықты интегралдың есептеуі интегралдау қисығының берілу әдісіне байланысты.

1. Кеңістікте интегралдау қисығы өзінің параметрлік теңдеулерімен:

$$L: \quad x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad \alpha \le t \le \beta \tag{2.3}$$

берілсін. Интервалда (α,β) L тегіс қисық, яғни (2.3) дифференциалданатын функциялар болсын:

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt.$$

Сонда І-текті қисықсызықты интеграл анықталған интегралға айналады:

$$\int_L f(x,y,z)dL = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt .$$

2. Интегралдау қисығы жазық: $L \in R_2$ болса, ол параметрлік түрде (2.3) теңдеулерінің алғашқы екеуімен ғана анықталады. Мұндай қисық бойынша I - текті қисықсызықты интегралды есептеу формуласы

$$\int_L f(x,y)dL = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t)\ )\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \tag{2.4}$$

түрінде жазылады.

3. Жазық қисық L (a,b)-да үзіліссіз дифференциалданатын $y=\varphi(x)$ функциясының сызбазы болса, онда тәуелсіз айнымалыны x параметр ретінде қабылдап,

$$x=x, \quad y=\varphi(x), \quad a \le x \le b \tag{2.5}$$

деп жаза аламыз; (2.4) формуласы

$$\int_L f(x,y)dL = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+y_x'^2}\,dx \tag{2.6}$$

түріне енеді.

4. Енді жазық қисық өзінің полярлық координаталардағы теңдеуімен берілсін

$$L: \quad \rho = \rho(\varphi) \quad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Қисық доғасы ұзындығының элементі [1]:

$$dL=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,\quad x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$$

болғандықтан

$$\int_L f(x,y)dL=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

2. Координаталар бойынша қисықсызықты интеграл.

Қисық бойымен қозғалыстың - қашықтықты есептеудің оң бағыты көрсетілсе, онда қисық кеңістікте бағдарланған делінеді. Бағдарланған $L\in R_3$ (3 сурет) қисығының нүктелерінде анықталған $P(M),Q(M),R(M)$ функцияларын қарастыралық. Баяндалған әдіспен

$$\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i,\qquad \sum_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i,\qquad \sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i \tag{2.6}$$

интегралдық қосындыларын құрайық. Әрине: $\lambda\to 0\Leftrightarrow\forall\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i\to 0, n\to+\infty.$

Анықтама. Егер $\lambda\to 0$-да (2.6) интегралдық қосындыларының қисықты бөлшектеу және бөліктерден (x_i,y_i,z_i) нүктелерін таңдау әдістерінен тәуелсіз нақты шектері бар болса, онда сол сандар P,Q,R функцияларынан кеңістікте бағдарланған L қисығы және сәйкес x,y,z айнымалылары бойынша алынған (II-текті) қисықсызықты интегралдар деп аталып, $\int_L Pdx, \int_L Qdy, \int_L Rdz$ рәміздерімен белгіленеді.

Сонымен:

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i;\\ &\int_L Q(x,y,z)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i;\\ &\int_L R(x,y,z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Осылайша анықталған интегралдардың қосындысы:

$$\int_L P(M)dx+\int_L Q(M)dy+\int_L R(M)dz=\int_L Pdx+Qdy+Rdz \tag{2.8}$$

жалпы түрдегі II-текті қисықсызықты интеграл деп аталады. Олардың бәрі анықталған интегралдарға келтіру арқылы есептелінеді.

Координаталар бойынша қисықсызықты интегралдар үшін де сызықтық және аддитивтік қасиеттер орындалады. Интегралдау қисығы L оған жүргізілген жанаманың бірлік векторының $\bar{\tau}(M)$ көмегімен бағдарланады. Бағдарды қарсы бағытқа ауыстырғаннан II-текті қисықсызықты интеграл таңбасын өзгертеді. Бұл қасиеттерді шартты түрде:

$$L=L_1+L_2\Rightarrow\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2},\qquad \int_L=-\int_{L-}$$

деп жазуға болады.

Егер $P(M),Q(M),R(M)$ функциялары кеңістікте бағдарланған тегіс L қисығының нүктелерінде үзіліссіз болса, онда II-текті қисықсызықты интегралдар (2.7,8) бар және интегралдау қисығы (2.3) параметрлік теңдеулерімен берілген жағдайда:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_\alpha^\beta \big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\big)dt. \tag{2.9}$$

Теңдіктің екі жағындағы сәйкес қосылғыштарды теңестіріп, жеке координаталар бойынша ІІ-текті қисықсызықты интегралдардың есептеу формулаларын жазуға болады. Интегралдау қисығы жазық: $L \in xy$ болса, онда (2.9)-ға үшінші қосылғыштар және z айнымалысы қатыспайды. Жазық интегралдау қисығының теңдеулері (2.5) түрінде берілсе, онда ІІ-текті қисықсызықты интегралды есептеу формуласы

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \big(P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi''(x)\big)dx$$

түрінде жазылады.

Бағыты айнымалы $\bar{\tau}(M) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ векторының бағыттауыш косинустары да тегіс L қисығы нүктелерінің үзіліссіз функциялары болады және

$$dx = dL\cos\alpha, \quad dy = dL\cos\beta, \qquad dz = dL\cos\gamma$$

болғандықтан

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dL.$$

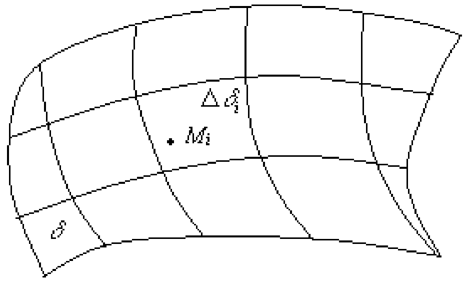
Бұл формула І- және ІІ-текті қисықсызықты интегралдар арасындағы байланысты өрнектейді.

5-дәріс. Беттік интегралдар

Дәрістің мақсаты: І- және ІІ-текті беттік интегралдардың негізгі түсініктерін, қасиеттері мен есептеу әдістерін баяндау.

1. Беттің ауданы бойынша интеграл.

Кеңістікте өзі мен өзі қиылыспайтын $\sigma \in R_3$ (4 сурет) бетінің нүктелерінде анықталған $f(M) = f(x, y, z)$ функциясын алайық. Бетті қалауымызша



4 сурет – Беттік интегралдар

өзара айқаспайтын n бөлікке $\Delta\sigma_i$ бөлейік: $\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\sigma$. Әр бөліктен қалауымызша $M_i(x_i,y_i,z_i)$ нүктесін алып, функцияның сол нүктелердегі мәндерін тауып, оларды сәйкес бөліктердің аудандарына көбейтіп, қосайық. Табылған өрнек

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i \tag{2.10}$$

$f(x,y,z)$ функциясы үшін σ бетінің ауданы бойынша құрылған интегралдық қосынды деп аталады. Қашықтықтарды бет "бойымен" есептей отырып, бетті бөлшектеу қадамын енгізелік:

$$\lambda=\max_{i=\overline{1,n}}\{diam\Delta\sigma_i\}: \quad \lambda\to 0\Leftrightarrow\forall\Delta\sigma_i\to 0, n\to+\infty.$$

Анықтама. Егер $\lambda\to 0$-да (2.10) интегралдық қосындысының бетті бөлшектеу және бөліктерден M_i нүктелерін таңдау әдістерінен тәуелсіз нақты шегі бар болса, онда сол сан $f(x,y,z)$ функциясынан σ бетінің ауданы бойынша алынған (І-текті) беттік интеграл деп аталып, $\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma$ арқылы белгіленеді. Мұнда σ- интегралдау беті, $d\sigma$-оның ауданының элементі.

Анықтама бойынша:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i\,. \tag{2.11}$$

Теңдіктің оң жағындағы шек бар (нақты санға тең) болса, онда $f(M)$ функциясы σ бетінің ауданы бойынша интегралданатын функция деп аталады.

Теорема. Егер $f(x,y,z)$ функциясы σ бетінің нүктелерінде үзіліссіз болса, онда функция беттің ауданы бойынша интегралданады.

Интегралдау бетінің барлық нүктелерінде $f(M)=1$ болса, онда І-текті беттік интеграл беттің ауданын анықтайды:

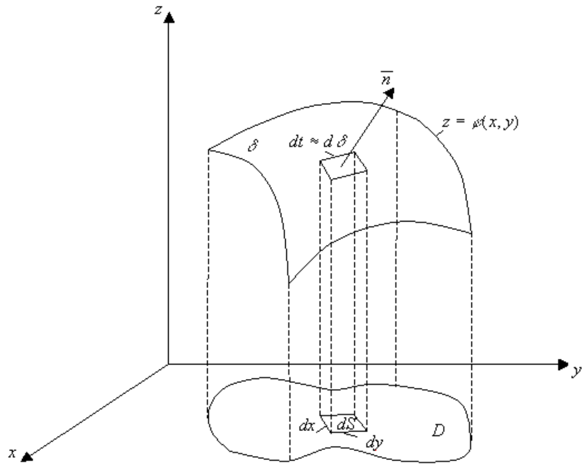
$$\sigma=\iint\limits_{\sigma} d\sigma\,.$$

І-текті беттік интегралдың есептеуі қос интегралды есептеуге келтіріледі. Сондықтан І-текті беттік интеграл үшін сызықтық, бет бойынша аддитивтік қасиеттермен қатар теңсіздіктер арқылы өрнектелетін қасиеттер де орындалады.

Интегралдау беті σ материялық дене, $f=\mu(x,y,z)$ функциясы оның массасының бет бойынша таралу тығыздығы болса, онда І-текті беттік интеграл σ бетінің массасын анықтайды:

$$M=\iint\limits_{\sigma}\mu(x,y,z)d\sigma.$$

Кеңістіктегі тегіс $\sigma: z=\phi(x,y)$ бетінің ауданы қос интегралдың көмегімен анықталатыны белгілі [1]. Мұнда $\varphi(x,y)$ $D=np_{xy}\sigma$ (5сурет) аймағында үзіліссіз дифференциалданатын функция. Аймақ ауданының элементі



5 сурет - І-текті беттік интегралды есептеу

$$ds = np_{xy}d\sigma = dxdy = d\sigma \cdot \cos\gamma \,.$$

Интегралдау бетіне тұрғызылған нормальдің $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ соңғы бағыттауыш косинусын [1]:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}},$$

деп, бет ауданының элементін $d\sigma$ таба аламыз. Сонда І-текті беттік интегралды есептеу формуласы:

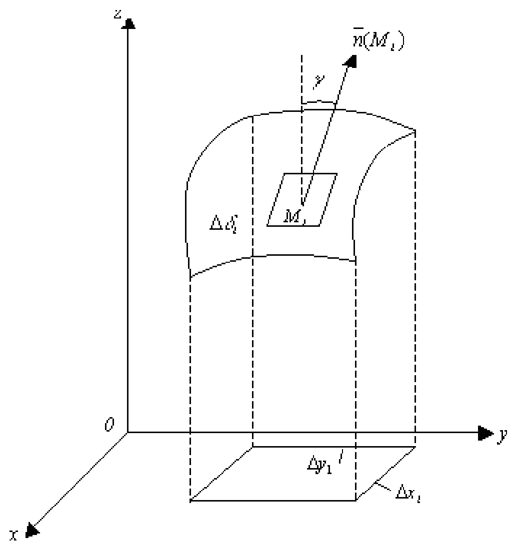
$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}dxdy \qquad (2.12)$$

түрінде жазылады. Теңдіктің оң жағында жазық D аймағы бойынша қос интеграл тұр; (2.12)-де айнымалыларды қума орын ауыстырып: $x \leftarrow y \leftarrow z,$ $\sigma : x = \varphi(y,z)$ $\wedge$ $y = \varphi(z,x)$ беттері бойынша І-текті беттік интегралды есептеудің тағы екі формуласын алуға болады.

2. Координаталар бойынша беттік интеграл.

Беттер басым көпшілігінде екіжақты болып келеді. Олардың оң және теріс жақтары ажыратылады. Беттің оң жағына қарай бағытталған оған тұрғызылған нормальдің бірлік векторының $\bar{n}$ бағыты көрсетілсе, онда бет кеңістікте бағдарланған дейміз. Тұйық беттер үшін сыртқы және ішкі нормальдар ажыратылады. Саны шекті тегіс бөліктерден құралған бет үзбе-тегіс бет деп аталады. Координаталар осьтерінің қай-қайсысына да параллель түзудің бетпен қиылысу нүктелерінің саны 1-ден артық емес делік. Қарсы жағдайда бетті осы талапқа қанағаттандыратын бөліктерге бөлуге болады.

Бағдарланған σ бетінің (5, 6 суреттер) нүктелерінде анықталған $P(M), Q(M), R(M)$ функцияларын алып, жоғарыда баяндалған әдіспен σ беті және қос-қостан алынған айнымалылар бойынша



6 сурет - II-текті беттік интегралды есептеу

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta y_i \Delta z_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\Delta z_i \Delta x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \qquad (2.13)$$

интегралдық қосындыларын құрайық.

Анықтама. Егер $\lambda \to 0$-да (2.13) интегралдық қосындыларының бетті бөлшектеу және бөліктерден M_i нүктелерін таңдау әдістерінен тәуелсіз нақты шектері бар болса, онда сол сандар P, Q, R функцияларынан кеңістікте бағдарланған σ беті және сәйкес $(y,z),(z,x),(x,y)$ координаталары бойынша алынған (II-текті) беттік интегралдар деп аталып, $\iint\limits_{\sigma} Pdydz, \iint\limits_{\sigma} Qdzdx, \iint\limits_{\sigma} Rdxdy$ рәміздерімен белгіленеді.

Сонымен:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i \Delta z_i;$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \Delta x; \qquad (2.14)$$

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i;$$

$$\lambda \to 0 \Leftrightarrow \forall \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Бұлардың қосындысы :

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)dydz + \iint\limits_{D} Q(M)dzdx + \iint\limits_{D} R(M)dxdy = \iint\limits_{D} Pdydz + Qdxdy + Rdxdy \qquad (2.15)$$

жалпы түрдегі II-текті беттік интеграл деп аталады. Есептеу барысында координаталар бойынша беттік интегралдар қос интегралдарға келтіріледі. II-текті беттік интеграл да сызықтық және аддитивтік қасиеттерге ие. Интегралдау бетінің бағдарын қарсыға өзгерткеннен II-текті беттік интегралдың таңбасы өзгереді. Бұл қасиеттерді шартты түрде:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \quad \iint_{\sigma} = \iint_{\sigma_1} + \iint_{\sigma_2}, \quad \iint_{\sigma} = -\iint_{\sigma-}$$

деп жазуға болады.

Бағдарланған тегіс σ бетінің нүктелерінде үзіліссіз $P(M), Q(M), R(M)$ функциялары үшін (2.14,15) II-текті беттік интегралдары бар. Интегралдау беті

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.16}$$

теңдеуімен беріліп, ол σ беті нүктелерінің жиынында айқын емес

$$x = f_1(y, z), \quad y = f_2(z, x), \quad z = f_3(x, y)$$

функцияларын анықтайды делік. Соңғылар сәйкес :

$$\sigma_{yz} = np_{yz}\sigma, \quad \sigma_{zx} = np_{zx}\sigma, \quad \sigma_{xy} = np_{xy}\sigma$$

жазық аймақтарында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда жалпы түрдегі II-текті беттік интегралдың есептеу формуласы

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P(f_1(y, z), y, z)dydz \pm \\ + \iint_{\sigma_{zx}} Q(x, f_2(z, x), z)dzdx \pm \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, f_3(x, y))dxdy \end{aligned} \tag{2.17}$$

түрінде жазылады. Теңдіктің оң жағындағы қос интегралдар $\bar{n}$ векторының сәйкес Ox, Oy, Oz осьтеріне көлбеу бұрыштары сүйір болса – оң таңбамен, доғал болса – теріс таңбамен алынады. Теңдіктің екі жағындағы сәйкес қосылғыштарды теңестіріп, (2.14) интегралдарының есептеу формулаларын алуға болады. Егер (2.16) теңдеуі x, y, z айнымалыларының кейбіреулері арқылы шешілмейтін болса, онда (2.14)-тегі сәйкес интегралдың есептеу формулалары да орындалмайды; (2.15)-тің оң жағына

$$dydz = d\sigma \cos\alpha, \quad dzdx = d\sigma \cos\beta, \quad dxdy = d\sigma \cos\gamma$$

өрнектерін қойсақ, I- және II-текті беттік интегралдардың арасындағы байланысты өрнектейтін

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$$

формуласына келеміз.

6-дәріс. Өріс теориясының элементтері. Скалярлық және векторлық өрістер. Негізгі сипатттамалары

Дәрістің мақсаты: өріс теориясының негізгі түсініктерін, скалярляқ және векторлық өрістердің сипаттамаларын беріп, Остроградский-Гаусс формуласының қолданылуларын көрсету.

1. Скалярлық өріс.

Кез келген функцияның, мысалы, $u(M) = f(x, y, z)$ мәндер жиыны (өзгеру аймағы) басқаша скалярлық өріс деп аталады. Функция берілген $\Omega \subset R_3$

аймағында дифференциалданатын болсын және кеңістікте $\bar{I} = I_x\bar{i} + I_y\bar{j} + I_z\bar{k}$ векторының көмегімен белгілі бір бағыт көрсетілген делік;

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2.18)$$

саны u скалярлық өрісінің $M(x, y, z)$ нүктесіндегі $\bar{I}$ векторының бағыты бойынша туындысы деп аталады. Мұнда

$$\cos\alpha = \frac{I_x}{I}, \qquad \cos\beta = \frac{I_y}{I}, \qquad \cos\gamma = \frac{I_z}{I}, \qquad I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

берілген вектордың (бағыттың) бағыттауыш косинустары. Функцияның градиентін [1]

$$gradu = f_x'(M)\bar{i} + f_y'(M)\bar{j} + f_z'(M)\bar{k}$$

u скалярлық өрісінің M нүктесіндегі градиенті деп атайтын боламыз.

Берілген бағыттың бірлік векторын $\bar{I}^\circ = \frac{\bar{I}}{I}$ пайдаланып, бағыт бойынша туындыны

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \bar{I}^\circ \cdot gradu = np_I \; gradu$$

түрінде жазуға болады. Бұл шаманың $\bar{I} \uparrow\uparrow gradu$ болғанда ең үлкен мән қабылдайтыны белгілі. Демек, нүктеде бағыт бойынша туынды берілген бағыт скалярлық өрістің сол нүктедегі градиентімен дәл келгенде ғана ең үлкен мән қабылдайды.

Қолдануға ыңғайлы болуы үшін (2.18)-ді

$$\frac{\partial u}{\partial I} = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial u}{\partial x}I_x + \frac{\partial u}{\partial y}I_y + \frac{\partial u}{\partial z}I_z\right)$$

деп жазса да болады.

Мысал: $u = x^2 - arctg(y+z)$ скалярлық өрісінің $M_0(2,1,1)$ нүктесіндегі $\bar{I} = 3\bar{j} - 4\bar{k}$ векторының бағыты бойынша туындысын табыңыз.

Шешу. Шарт бойынша: $I_x = 0,\; I_y = 3,\; I_z = -4 \Rightarrow I = 5.$ Функцияның берілген нүктедегі дербес туындылары:

$$u_x'(M_0) = 2x_0 = 4, \qquad u_y'(M_0) = u_z'(M_0) = -\frac{1}{1+(y_0+z_0)^2} = -\frac{1}{5},$$

бағыт бойынша туындысы:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial I} = \frac{1}{5}\left(4\cdot 0 - \frac{1}{5}(3-4)\right) = \frac{1}{25}.$$

2 Векторлық өріс.

Кеңістіктің әрбір нүктесінде $\bar{a}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$ векторы анықталған бөлігі $\Omega \in xyz = R_3$ $\bar{a}$ векторының өрісі (векторлық өріс) деп аталады.

Әрбір нүктесінде өріс векторы $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ оған жанама болатын: $\bar{a} \| \bar{\tau}$ қисық $L \in \Omega$ өрістің векторлық сызығы деп аталады. Басқаша, $\bar{a}$ өрісінің векторлық сызығы L өріс "бойымен" жүреді дейміз. Векторлық сызық жағдайында екеуі де бір ғана $\bar{\tau}$ векторына параллель болғандықтан $d\bar{r}$ және $\bar{a}$

векторлары өзара коллинеар болады. Сондықтан $\overline{a}$ өрісінің векторлық сызықтары

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{2.19}$$

дифференциалдық теңдеулерімен анықталады.

«Жасаушылары» өрістің векторлық сызықтары болып келген, ұзындығы шекті тұйық “цилиндрлік” бет соленоид (түтік, гр.) деп аталады. Аймақта Ω материяның (заттың) көшу құбылысы (тасымалы), мысалы, сұйықтың не газдың ағуы орын алса, онда $\overline{a}=\overline{v}$ жылдамдықтар өрісінің векторлық сызықтары материялық бөлшектердің қозғалыс бағытын көрсетеді. Өрістің барлық векторлық сызықтары тұйық аймақтан сыртқа қарай бағытталған болса, онда аймақта өну көзі (бастау) бар дейді. Қарсы жағдайда аймақта іркіліс (қақ жиналу) орын алғаны.

Вектор - функция $\overline{a}(x,y,z)$ Ω аймағында үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Векторлық талдауда набла – оператор немесе Гамильтон операторы деп аталатын рәміздік түрдегі

$$\overline{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

векторы кеңінен қолданылады. Бұл векторлық-дифференциалдық оператор, көбейтудің барлық түрлерінде $\overline{\nabla}$- ны әдеттегі векторлар тәрізді қолдана беруге болады. Мысалы:

$$grad u=\overline{\nabla}\cdot u=\left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

вектордың скалярға көбейтіндісі болып саналады.

Аймақта Ω үзіліссіз дифференциалданатын P,Q,R функцияларының сәйкес x,y,z айнымалылары бойынша алынған дербес туындыларының қосындысына тең функция (скалярлық өріс) $\overline{a}(x,y,z)$ векторлық өрісінің (x,y,z) нүктесіндегі дивергенциясы (алшақтығы) деп аталып, $div\overline{a}$ рәмізімен белгіленеді. Гамильтон ораторын пайдаланып,

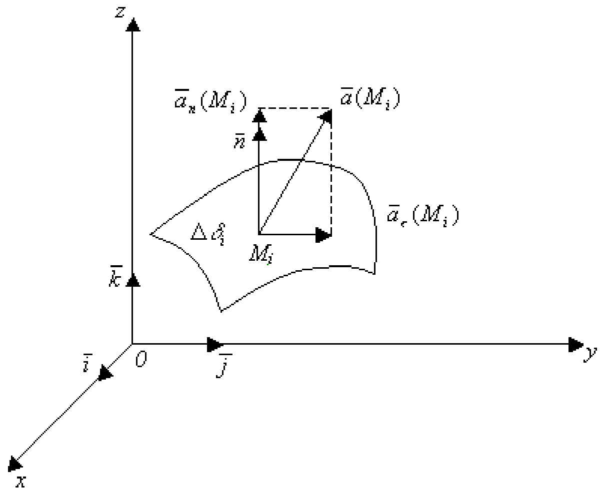
$$div\overline{a}=\overline{\nabla}\cdot\overline{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{2.20}$$

деп жаза аламыз. Әрине, бұл скалярлық көбейтінді орыналмастыру заңына бағынбайды. Егер $div\overline{a}=0$ $\forall(x,y,z)\in\Omega$ болса, онда $\overline{a}$ векторының өрісі соленоидты (түтікшелі) өріс деп аталады. Мұндай өрісте өну көзі де, іркіліс те жоқ.

3. Вектордың бет арқылы ағылысы.

Аймақта $\Omega\subset xyz$ үзіліссіз дифференциалданатын $\overline{a}(x,y,z)$ вектор-функциясын және бағдарланған σ бетін қарастыралық. Беттік интегралдар үшін интегралдық қосындылар құрғандағыдай бет бөлшектенген: $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$

деп, оның кез келген бір бөлігін $\Delta\sigma_i$ (7 сурет) алайық. Өріс векторының $\forall M_i \in \Delta\sigma_i$ нүктесіндегі мәнін



7 сурет – Вектордың бет арқылы ағылысы

$\bar{a}(M_i)$ бетке сол нүктедегі нормаль бойымен және оған перпендикуляр бағытта екі қосылғышқа жіктейік: $\bar{a}(M_i) = \bar{a}_n(M_i) + \bar{a}_\tau(M_i)$. Скаляр шама $a_n(M_i)\Delta\sigma_i = \bar{a}(M_i)\cdot\bar{n}(M_i)\Delta\sigma_i$ $\bar{a}$ векторының $\Delta\sigma_i$ ауданшасы арқылы ағылысы (легі) деп аталады. Бұл шамаларды i индексі бойынша қосындыласақ, $\bar{a}$ векторының σ беті арқылы легінің Λ жуық мәні табылады. Басқа тұрғыдан бұл $\bar{a}(M)$ вектор-функциясының бағдарланған σ беті бойынша жалпы түрдегі II-текті беттік интеграл үшін құрылған интегралдық қосындысы болады. Шекке көшкеннен кейін координаталар бойынша беттік интегралдың физикалық мағынасын өрнектейтін

$$\Lambda = \iint_\sigma \bar{a}\bar{n}d\sigma = \iint_\sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{2.21}$$

формуласына келеміз. Мұнда $\bar{n}d\sigma = \overline{d\sigma} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$ алаңша-вектор делінеді. Сонымен, $\bar{a}$ вектор-функциясынан бағдарланған σ беті бойынша алынған II-текті беттік интеграл, $\bar{a}$ векторының σ беті арқылы ағылысына - $\bar{a}$ өрісінің σ беті арқылы оның $\bar{n}$ нормалі бағытында өтетін векторлық сызықтарының мөлшеріне (санына) тең.

Өріс векторының бетке жанама құраушысы $\bar{a}_\tau(M)$ σ беті арқылы ағылыс бермейді. Ол бет “бойымен” бағытталған. Өріс векторының $\bar{a}$ тек қана өрістің векторлық сызықтарынан құралған σ беті арқылы ағылысы ылғи нөлге тең, өйткені $a_n(M)=0$ $\forall M \in \sigma$. Жеке жағдайда, Ω-да қозғалатын сұйықтың не газдың жылдамдықтар өрісі $\bar{a}=\bar{v}$ үшін ағылыс Λ бір уақыт өлшемі ішінде σ беті арқылы нормальдің оң бағытында өтетін заттың мөлшерін анықтайды.

Сыртқы нормальдің көмегімен бағдарланған тұйық σ бетімен шектелген $V \in \Omega$ денесі берілсін.

Гаусс-Остроградский теоремасы. Векторлық өрістің $\bar{a}$ кеңістікте бағдарланған тұйық σ беті арқылы ағылысы өріс дивергенциясынан σ бетімен шектелген V аймағы арқылы алынған үшқабат интегралға тең:

$$\iiint_V div\bar{a}dV = \oiint_\sigma \bar{a}\cdot\bar{n}d\sigma \qquad (2.22)$$

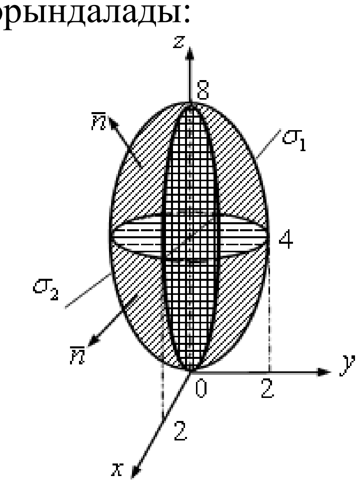
немесе

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_\sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (2.23)$$

Мысал. $\bar{a}=(x+z)\bar{i}+y\bar{k}$ векторы өрісінің тұйық (нормалі сыртқы) $\sigma=\sigma_1+\sigma_2:\ z=8-x^2-y^2,\quad z=x^2+y^2$ беті (8 сурет) арқылы ағылысын тура есептеп және Гаусс – Остроградский формуласының көмегімен табыңыз.

Шешу: шарт бойынша: $P=x+z,\quad Q=0,\quad R=y.$

1. Вектордың бет арқылы ағылысын тура есептеу (2.21), (2.17) формулаларының көмегімен орындалады:



8 сурет – Вектордың тұйық бет арқылы ағылысы

$$\Lambda = \iint_{\sigma_{1yz}}\left(\sqrt{8-z-y^2}+z\right)dydz - \iint_{\sigma_{1yz}}\left(-\sqrt{8-z-y^2}+z\right)dydz + \iint_{\sigma_{1xy}} ydxdy +$$

$$+\iint_{\sigma_{2yz}}\left(\sqrt{z-y^2}+z\right)dydz - \iint_{\sigma_{2yz}}\left(-\sqrt{z-y^2}+z\right)dydz - \iint_{\sigma_{2xy}} ydxdy =$$

$$=2\left(\int_4^8 dz\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\sqrt{8-z-y^2}dy + \int_0^4 dz\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\sqrt{z-y^2}dy\right) = \left|\begin{matrix} 8-z=t & z=4 & t=4 \\ dz=-dt & z=8 & t=0\end{matrix}\right|.$$

Интегралдау айнымалысының бұрынғы белгілеуін сақтап $(t\to z)$, (2.28)-ді пайдаланайық:

$$\Lambda = 8\int_0^4 dz\int_0^{\sqrt{z}}\sqrt{z-y^2}dy = \left|\begin{matrix} y=\sqrt{z}\sin t & y=0 & t=0 \\ dy=\sqrt{z}\cos tdt & y=\sqrt{z} & t=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$=2\int_0^4 zdz\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2t)dt = z^2\Big|_0^4\cdot(2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

2. Дененің V координаталар жазықтықтарына: xOz, yOz қарағанда симметриялы екенін ескеріп, (2.23)-ні қолданайық:

$$div\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \iiint_V dxdydz;$$

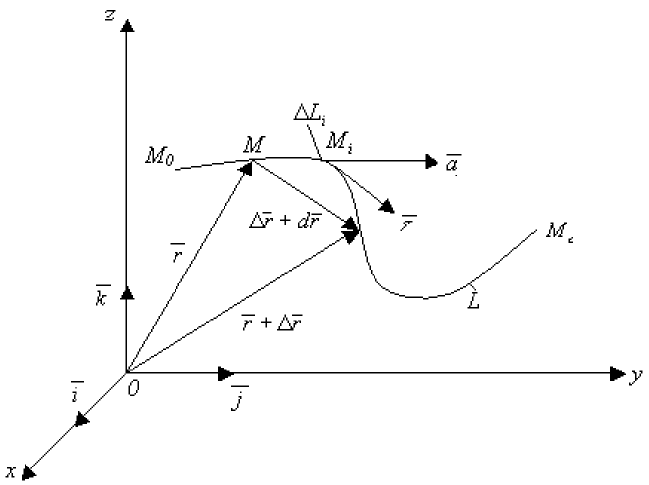
$$\Lambda = 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz = 8\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(4 - x^2 - y^2\right)dy = \frac{16}{3}\int_0^2 \left(4 - x^2\right)\sqrt{4 - x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = 2\sin t & x = 0 & t = 0 \\ dx = 2\cos t dt & x = 2 & t = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2t\right)^2 dt = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + 4\cos 2t + \cos 4t\right)dt = 16\pi.$$

7-дәріс. Векторлық өрістің сызықтық интегралы. Потенциалды өріс

Дәрістің мақсаты: векторлық өріспен байланысты түсініктер мен шамалардың физикалық мағынасын ашу. Курстың электр энергетикасы факультеті студенттерінің мамандану пәндерімен және техникалық практикамен байланысына көңіл бөлу.

Векторлық өрісте $\bar{a}$ бағдарланған $L \in \Omega$ қисығы бойымен M нүктесі $\bar{\tau}$ векторының көмегімен көрсетілген бағытта қозғалыста болсын (9 сурет).



9 сурет – Векторлық өрістің сызықтық интегралы

II-текті қисықсызықты интеграл

$$\int_L \bar{a}d\bar{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz \tag{2.24}$$

векторлық өрістің сызықтық интегралы деп аталады. Интегралдау қисығы L тұйық болса, оны контур (contour- жиектеме, фр.) деп, (2.24)-ті $\bar{a}$ векторының сол контур бойынша циркуляциясы (circulatio – айналыс, лат.) дейді.

Өріс векторының физикалық мағынасы әрқилы болуы мүмкін. Күш өрісінде $\bar{a} = \bar{F}$ - қозғалушы нүктенің $M(x, y, z) \in R_3$ кеңістіктегі орнынан ғана тәуелді күш. Нүктенің L қисығы бойындағы орны оның радиус-векторымен: $\bar{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$ анықталады. Нүктенің элементар орын ауыстыруы:

$d\bar{r} = (dx, dy, dz) \| \bar{\tau}, \ |d\bar{r}| \approx dL;$ (2.24)-те интегралданушы өрнек $\bar{F}d\bar{r}$ күш өрісінің элементар жұмысын, ал, интеграл өрістің M нүктесі L қисығы бойымен өзінің бастапқы M_0 орнынан M_c жағдайына дейін қозғалғандағы “толық” жұмысын A анықтайды. Бұл тұжырым ІІ-текті қисықсызықты интегралдың физикалық мағынасын сипаттайды. Сонымен,

$$A = \int_L \bar{F}d\bar{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Аймақта Ω

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{dy} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R \tag{2.25}$$

болатындай $u(x, y, z)$ функциясы бар болса, онда $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ векторының өрісі потенциалды деп, u өрістің потенциалдық функциясы, қысқаша потенциалы деп аталады; Ω аймағында $u(x, y, z)$ функциясымен анықталатын скалярлық өріс үшін

$$\bar{F} = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k},$$

яғни, потенциалды өріс белгілі бір скалярлық өріс градиенті векторының өрісі. Егер (2.25) шарттары орындалса, онда [1]:

$$\bar{F}d\bar{r} = Pdx + Qdy + Rdz = du(x, y, z). \tag{2.26}$$

Кері тұжырым да дұрыс, яғни (2.25) және (2.26) шарттары тең қуатты. Олардың қайсысы орындалса да:

$$A = \int_L du(M) = \int_{(M_0)}^{(M_c)} du(M) = u(M_c) - u(M_0).$$

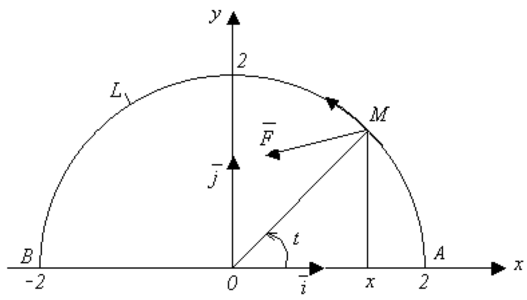
Бұл потенциалды күш өрісінің жұмысы M нүктесі жолының ($\overset{\smile}{M_0M} \in L$ доғасының) түрінен тәуелсіз, өріс потенциалының қозғалушы нүктенің соңғы және бастапқы орындарындағы мәндерінің айырымына тең екенін көрсетеді. Демек, потенциалды өрістің Ω- дағы кез келген тұйық контур бойынша циркуляциясы нөлге тең; (2.25-26) теңдіктері (2.8) ІІ-текті қисықсызықты интегралының бастапқы және соңғы нүктелері дәйектендірілген L интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз болуының қажет және жеткілікті шарттары.

Сонымен, (2.26)-дан күш өрісінің элементарлық жұмысы белгілі бір функцияның толық дифференциалы болғанда ғана өріс потенциалды болатынын көреміз. Жазық күш өрісі $\bar{F} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ үшін бұл шарттарға z айнымалысы және R функциясы қатыспайды.

Мысал: $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + \bar{j}$ күшінің M нүктесі $L: x^2 + y^2 = 4(y \geq 0)$ қисығы бойымен $A(2;0)$-дан $B(-2;0)$-ға дейін қозғалғандағы жұмысын табыңыз (10 сурет).

Шешу: өріс $\bar{F}$ және L қисығы (жоғарғы жарты шеңбер) жазық:

$$P = x - y, \quad Q = 1; \quad y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow dy = -\frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad 2 \ge x \ge -2 .$$



10 сурет – Жазық күш өрісінің жұмысы

Бұл өрнектерді (2.27)-ге қойып, бас нүктеге қарағанда симметриялы аралық бойынша анықталған интегралдың қасиетін:

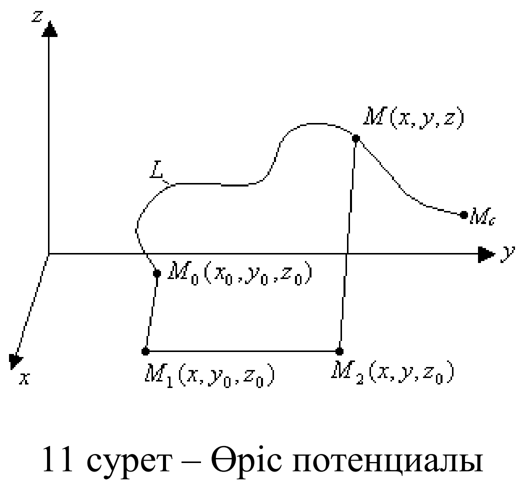
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f - \text{ жұп болса,} \\ 0, & f - \text{ тақ болса} \end{cases} \tag{2.28}$$

ескерсек:

$$A = \int_{2}^{-2} \left(x - \sqrt{4 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx = -2\int_{2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x = 2\cos t & x = 0 & t = \dfrac{\pi}{2} \\ dx = -2\sin t dt & x = 2 & t = 0 \end{vmatrix} = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t)dt = 2\pi.$$

Өріс потенциалын (ол бар болса) тұрақты қосылғышқа $C = u(M_0)$ дейінгі дәлдікпен (2.25) теңдіктерін интегралдау арқылы табуға болады. Потенциалды өрісте L қисығының $\overset{\cup}{M_0 M}$ доғасын (11 сурет) оның шеткі: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ нүктелерін сақтай отырып, кез келген қисықпен, мысалы, буындары координаталар осьтеріне параллель $M_0 M_1 M_2 M$ сынық сызығымен алмастыра аламыз.



11 сурет – Өріс потенциалы

Нәтижесінде өрістің потенциалдық функциясы

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C$$

түрінде табылады. Кез келген тұйық $L\in\Omega$ контуры бойынша өріс циркуляциясының нөлге тең: $\oint_L \bar{a}d\bar{r}=0$ болуы өріс потенциалы бар болуының қажет және жеткілікті шарты.

Мысал: $\bar{a}=\frac{y}{3}\bar{i}-3x\bar{j}+x\bar{k}$ векторы өрісінің

$$\Gamma: x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad z=1-2\cos t-2\sin t$$

контуры бойымен (t параметрінің өсу бағытында, 10-сурет) циркуляциясын табыңыз.

Шешу: шарт бойынша:

$$P=\frac{y}{3}=\frac{2}{3}\sin t,\quad Q=-3x=-6\cos t,\quad R=x=2\cos t;$$

$$dx=-2\sin tdt,\quad dy=2\cos tdt,\quad dz=2(\sin t-\cos t)dt.$$

Бұл өрнектерді (2.24)-ке қойсақ:

$$Ц=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(-2\sin^2 t-24\cos^2 t+6\cos t\sin t\right)dt=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(-13-11\cos 2t+3\sin 2t)dt=-\frac{52\pi}{3}.$$

Берілген өріс потенциалды емес.

Векторлық өрістің роторы. Стокс теоремасы.

Векторлық өріс $\bar{a}$ үшін векторлық көбейтінді $\bar{\nabla}\times\bar{a}$ ротор (құйын) деп аталып, $rot\bar{a}$ арқылы белгіленеді:

$$rot\bar{a}=\bar{\nabla}\times\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}, \qquad (2.29)$$

$$rot\bar{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Аймақтағы Ω кез келген тұйық контурды аймақтан шықпай үзіліссіз деформациялау арқылы бір нүктеге жиыру мүмкін болса, онда аймақ бір байланысты деп аталады.

Теорема. Бір байланысты Ω аймағындағы үзіліссіз дифференциалданатын $\bar{a}(x,y,z)$ векторының өрісі потенциалды болуы үшін $rot\bar{a}=\bar{0}$ немесе

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2.30)$$

болуы қажет және жеткілікті.

Шарттар: (2.25) және (2.30) тең қуаты. Соңғысы көбіне векторлық өрістің потенциалдылығын, яғни II-текті қисықсызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз екенін тексеру үшін қолданылады; $rot\bar{a}=\bar{0}$ болса, $\bar{a}$ векторының өрісі құйынсыз делінеді. Мұндай өрісте айналмалы қозғалыстар, сұйық не газ тәрізді ортада турбуленттік ағыстар (үйірімдер) болмайды.

Рәмізді өрнек

$$\Delta = \overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Лаплас операторы деп аталады. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \vee \quad \left(\overline{\nabla}, \overline{\nabla} u\right) = \overline{\nabla} \cdot grad u = 0$$

математикада Лаплас теңдеуі немесе гармониялық теңдеу деген атпен белгілі. Бұл теңдеудің кез келген шешуі $u(x, y, z)$ Лаплас функциясы немесе гармониялық функция деп аталады. Мұндай функциямен анықталатын скалярлық өріс гармониялық өріс немесе лапластық өріс делінеді.

Гамильтон операторы өрістер сипаттамаларының қасиеттерін толығырақ ашуға көмектеседі.

Бетке тұрғызылған нормальдің оң бағытынан қарағанда бетті шектеп тұрған контур бойымен айналу сағат тіліне қарсы бағытта орындалса (жазық аймақ айналу кезінде сол қолда қалып отырса), онда контур және оған кептелген бет кеңістікте өзара сәйкес бағдарланған делінеді.

Стокс теоремасы. Бір байланысты Ω аймағында $\overline{a}$ векторы өрісінің тұйық L контуры бойынша циркуляциясы өріс роторының $rot\overline{a}$ сол контурға кептеліп, онымен сәйкес бағдарланған σ беті арқылы ағылысына тең:

$$\iint_{\sigma} rot\overline{a} \cdot \overline{n} d\sigma = \oint_{L} \overline{a} d\overline{r} \tag{2.31}$$

немесе

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ = \oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{2.32}$$

Бұл формуладан құйынсыз векторлық өрістің аймақтағы кез келген тұйық контур бойынша циркуляциясы нөлге тең екені, яғни құйынсыз өрістің потенциалды болатыны байқалады.

Стокс формуласын (2.32) жазық векторлық өріс $\overline{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ үшін бұрын Грин қорытқан:

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{L} Pdx + Qdy.$$

Мұнда теңдіктің сол жағында L контурымен шектелген жазық D аймағы бойынша алынған қос интеграл тұр.

Әдебиеттер тізімі

1. Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). –Алматы: NSN-Company, 2009. -429 с.
2. Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Амалдық есептеулерді қолданып дифференциалдық теңдеулерді шешу. Есептеу-сызба жұмыстарға әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар (5В071800 Электр энергетикасы мамандығына арналған). 1 бөлім. – Алматы: АЭжБУ, 2014. -20 б.
3. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. –М.: Наука, 2000.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 2002.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы. Под. ред. А.В. Ефимова. –М.: Наука, 2004, ч.3.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). –М.: Высшая школа, 2003.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). –М.: Айрис пресс, 2004.
8. Рябушко А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. –Минск-Алматы, 2002, ч.3.
9. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). –М: Айрис пресс, 2005, 1,2-курсы.
10. Kazbek Khasseinov Canons of matematics. –Moscow: Nauka, 2007.

Мазмұны

Жиынтық жоспар 2014 ж., бап. 357

Керей Мұстахишевич Мұстахишев
Атабай Бегімбет Жұмабайұлы

АМАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРДІ ҚОЛДАНЫП ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

5В071800 - Электр энергетикасы мамандығы студенттері үшін
дәрістер жинағы

Редакторы Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.К. Молдабекова

Басуға қол қойылды « ___» ____2014 ж.   Формат 60х84 1/16
Таралымы 100 дана.   Баспаханалық қағаз №1
Көлемі 1,9 есептік-баспа табақ   Тапсырма №__ Бағасы 950 тг.

Көшірмелі-көбейткіш бюросы
Коммерциялық емес акционерлік қоғам
«Алматы энергетика және байланыс университеті»
050013, Алматы, Байтұрсынов, 126