**Некоммерческое
акционерное общество**

АЛМАТИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей
математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для специальности 5В074600-Космическая техника и технологии
Часть 2

Алматы 2014

СОСТАВИТЕЛИ: Жуматаева С.А., Жанузакова Д.Т. Математическая обработка информации. Методические указания и задания по выполнению расчетно- графических работ для студентов специальности 5В074600 – Космическая техника и технологии. Часть2. - Алматы: АУЭС, 2014.- стр-16.

Настоящий конспект содержит 8 лекций по основным разделам традиционно изучаемым в курсе теории вероятностей и математической статистики. Конспект лекций для студентов специальности 5В070400 – Вычислительная техника и программное обеспечение, 5В070300 – Информационные системы составлен в соответствии с программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ил. 8, табл. 8, библиогр. – 11 назв.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2014 г.

Введение

Методические указания представляют собой программу и задания к модулю 2 по дисциплине «Математическая обработка информации».

Задание состоит из тридцати вариантов. Вторая цифра номера задания указывает вариант студента.

1.1 Теоретические вопросы

1. Преобразование Лапласа.
2. Оригиналы и изображения.
3. Теории линейности, подобия, смещения, запаздывания.
4. Теоремы дифференцирования и интегрирования оригиналов и изображения.
5. Свертка функции. Теорема умножения. Формула Дюамеля.
6. Нахождение оригинала по известному изображению.
7. Применения преобразования Лапласа при решении дифференциальных уравнении, интегральных уравнении и систем дифференциальных уравнении.

1.2 Расчетные задания

1. Является ли данная функция оригиналом? Ответ обосновать.

№	$f(t)$	$g(t)$	№	$f(t)$	$g(t)$
1	$\frac{1}{t+2}\eta(t)$	$ctg\,2t$	16	$ctgt\,\eta(t)$	$\frac{3}{2t+1}\eta(t)$
2	$sh3\cdot\eta(t)$	$\frac{1}{t-4}\eta(t)$	17	$\frac{5}{t-4}$	$ch\frac{t}{2}\eta(t)$
3	$e^t\cdot\cos 5t$	$\frac{1}{t+3}\eta(t)$	18	$(5t+1)\eta(t)$	$\frac{1}{t^2-1}\eta(t)$
4	$tg\,t\;\;\eta(t)$	$\frac{3}{t+5}\eta(t)$	19	$e^t\cos^3 t$	$\frac{5}{t+1}\eta(t)$
5	$sh2t\,\eta(t)$	$\frac{4}{t-2}$	20	$3t^5\eta(t)$	$\frac{8}{t-7}\eta(t)$
6	$e^{7t}\eta(t)$	$\frac{8}{t-3}\eta(t)$	21	$\sin 4t\,\eta(t)$	$\frac{3t}{t-8}\eta(t)$
7	$\frac{3t}{t-1}\eta(t)$	$ch\frac{t}{2}\eta(t)$	22	$(t+1)^2\eta(t)$	$\frac{2}{2t-6}\eta(t)$
8	$3t^5\eta(t)$	$\frac{2}{4t-2}\eta(t)$	23	$e^{-t}\sin 3t$	$\frac{4t}{t+9}\eta(t)$
9	$\cos^2 t\;\eta(t)$	$\frac{1}{6t-3}\eta(t)$	24	$tg\frac{t}{2}\eta(t)$	$\frac{3}{5t+10}\eta(t)$

№	$f(t)$	$g(t)$	№	$f(t)$	$g(t)$
10	$e^{t}\sin 4t$	$\frac{3}{t+6}\eta(t)$	25	$\sin^{3} t\ \eta(t)$	$\frac{2t}{10-5t}$
11	$e^{-2t}\cos t$	$\frac{1}{t+4}\eta(t)$	26	$\frac{t}{t+4}\eta(t)$	$ctg\,8t\ \ \eta(t)$
12	$t^{3}\eta(t)$	$\frac{8}{t-8}\eta(t)$	27	$sh3t\ \eta(t)$	$\frac{1}{t^{2}-9}\eta(t)$
13	$\frac{4t+1}{t-2}\eta(t)$	$t^{8}\eta(t)$	28	$\frac{1}{t^{2}+1}\eta(t)$	$\cos^{3} 4t$
14	$t^{3}e^{t}\eta(t)$	$\frac{3}{t-9}\eta(t)$	29	$\sin 9t\ \ \eta(t)$	$\frac{4}{t-7}\eta(t)$
15	$\sin 6t$	$\frac{4t}{t+1}\eta(t)$	30	$\frac{2t}{t-4}\eta(t)$	$e^{-2t}\eta(t)$

2. Найти изображения функции, пользуясь теоремами линейности, подобия, смещения, запаздывания.

Таблица 2

№	a)	b)	c)	d)
1	$3-5t^{4}+sh3t$	$e^{3t}\cos 5t$	$(t-7)^{3}$	$\cos 3t\cdot\cos 2t$
2	$7+8t^{3}-\sin 2t$	$e^{-2t}sh5t$	$(t+2)^{2}e^{t+2}$	$ch^{2}5t$
3	$4+3t^{2}+7ch2t$	$2e^{5t}\sin 7t$	$(t+3)^{10}\cdot e^{t+3}$	$sh^{2}3t$
4	$5-2t^{4}+3sh8t$	$-3e^{-2t}\sin 5t$	$(t-\alpha)^{3}e^{t-\alpha}$	$\sin 4t\cdot\sin 7t$
5	$-7+3t^{3}+4ch8t$	$4e^{-10t}\cos 7t$	$(t-3)\sin(t-3)$	$2\sin 11t\sin 2t$
6	$11+2t^{3}-8\cos 7t$	$2e^{-7t}sh8t$	$(t+7)sh(t+7)$	$3\cos 5t\cdot\cos 7t$
7	$-12+4t^{3}-3e^{-2t}$	$-3e^{5t}\cdot ch7t$	$(t-3)\cos(t-3)$	$sh^{3}2t$
8	$-3+8t^{4}+7e^{-7t}$	$2e^{8t}\cdot t^{3}$	$(t+3)ch(t+3)$	$2ch^{3}3t$
9	$-4+3e^{2t}-\cos 5t$	$3e^{-7t}\cdot sh(-7t)$	$e^{(t-7)}\cdot\cos(t-7)$	$3sh^{3}7t$
10	$-2+2e^{3t}-\sin 5t$	$2e^{2t}\cdot ch(-7t)$	$e^{(t+5)}\sin(t+5)$	$-2ch^{2}(-5t)$
11	$4+5t^{4}+sh2t$	$-3e^{4t}\cdot t^{10}$	$e^{(t-3)}\cdot sh(t-3)$	$3ch^{2}(-8t)$
12	$3-2t^{3}+\cos 3t$	$7e^{2t}\cdot t^{2}$	$e^{(t+5)}sh(t+5)$	$2\cos 2t\cdot\cos 11t$
13	$4+3t^{4}+\cos 4t$	$8e^{-3t}\cdot t^{4}$	$-2\cos(t-7)$	$-2sh^{3}(-2t)$
14	$5-2t^{3}-\sin 5t$	$2e^{3t}\cdot\cos(-2t)$	$3\sin(t+5)$	$2\cdot ch^{3}(2t)$
15	$7+7t^{7}+\cos 7t$	$7e^{2t}\cdot\sin(-2t)$	$(t+5)^{3}$	$-2\sin 7t\cdot\cdot\sin 12t$
16	$-7+2t^{5}-\sin 2t$	$-3e^{-3t}\cdot\cos(-7t)$	$(t-7)^{7}$	$3\cos 5t\cdot\cdot\cos 7t$
17	$3+5t^{3}+e^{2t}$	$2e^{4t}\cdot\cos 8t$	$e^{t+7}\cdot sh(t-17)$	$3\cos t\cdot\cdot\cos 15t$
18	$4-7t^{4}-3e^{3t}$	$-4e^{-2t}\sin(-2t)$	$2e^{t+18}\cdot sh(t+18)$	$3\sin 2t\cdot\cdot\sin 7t$
19	$8+4t^{3}+e^{7t}$	$8e^{3t}\cdot sh2t$	$3e^{t-19}ch(t-19)$	$2\cos 2t\cdot\cdot\cos 3t$

20	$-9-3t^3-\cos 3t$	$-20e^{20t}\cdot sh20t$	$(t-20)^{20}$	$-3sh^2 4t$
21	$10+4t-\sin 21t$	$-3e^{2t}ch2t$	$(t+21)^3$	$2ch^2 8t$
22	$22-3t+\cos 22t$	$4e^{-3t}\cdot sh5t$	$e^{(t-22)}sh(t-22)$	$-5sh8t\cdot ch2t$
23	$23+23t+ch23t$	$t\cdot 8e^{2t}\sin 2t$	$(t+3)^4\cdot e^{t+3}$	$3sh2t\cdot sh8t$
24	$24+24t^3+ch24t$	$-3e^{-4t}\cdot sh2t$	$(t+3)\cdot e^{2(t+3)}$	$3sh2t\cdot sh4t$
25	$25+25t^7+sh25t$	$8e^{6t}ch4t$	$\sin 2(t+3)$	$-3sh3t\cdot ch5t$
26	$3+4t^2-e^{-2t}$	$-25e^{7t}sh2t$	$\cos 2(t-7)$	
27	$27+3t^3+sh7t$	$30e^{-30t}sh30t$	$(t-8)^{100}$	$-2sh5t\cdot sh7t$
28	$28-4t^3+e^{-4t}$	$-3e^{-2t}\cdot\cos 5t$	$(t+3)\cdot e^{-2(t+3)}$	$\sin 8t\cdot sh5t$
29	$29+31t^2-3e^{-5t}$	$-4e^{-4t}\cdot\sin 4t$	$(t-29)\cdot sh(t-9)$	$ch8t\cos 3t$
30	$-7+7t^7+7e^{-7t}$	$-2e^{5t}ch5t$	$(t+30)^{31}$	$sh11t\cos 5t$

3. Найти изображения функции, пользуясь теоремами дифференцирования изображения, интегрирования оригинала и изображения.

Таблица 3

№	a)	b)	c)
1	$(t+3)t\sin 5t$	$\int_0^t \sin 3t\cos 3t\,dt$	$\dfrac{\cos 5t-\cos 10t}{t}$
2	$t^2\cdot\cos 6t+te^t$	$\int_0^t (\sin 2t+\cos 2t)dt$	$\dfrac{\sin 7t+\sin 14t}{t}$
3	$t^2(e^{-5t}+7)$	$\int_0^t (\cos^2 7t-\sin^2 7t)dt$	$\dfrac{ch2t+sh2t}{t}$
4	t^3e^{7t}	$\int_0^t tch7t\,dt$	$\dfrac{ch5t-ch4t}{t}$
5	$t^2\cos 7t$	$\int_0^t tsh2t\,dt$	$\dfrac{sh7t+ch3t}{t}$
6	$t^2\sin 6t$	$\int_0^t e^{-t}ch5t\,dt$	$\dfrac{e^{7t}\sin 5t}{t}$
7	$(t-7)\sin^2 3t$	$\int_0^t t(t+3)dt$	$\dfrac{e^{-3t}\cos 5t}{t}$
8	t^2ch5t	$\int_0^t (t-7)(t+7)dt$	$\dfrac{e^{-2t}sh3t}{-5t^t}$
9	t^2sh9t	$\int_0^t sh3t\cdot ch3t\,dt$	$\dfrac{e\ ch4t}{t}$
10	t^2e^{5t}	$\int_0^t \cos^2 5t\,dt$	$\dfrac{e^{4t}-e^{-5t}}{t}$

11	$t^2\cos 5t$	$\int_0^t \sin^2 11t\,dt$	$\frac{e^{-t}+e^{-11t}}{t}$
12	$t^2\sin 12t$	$\int_0^t sh^2 3t\,dt$	$\frac{\sin 2t\cos 4t}{t}$
13	$t^2 sh13t$	$\int_0^t ch^2 4t\,dt$	$\frac{13-e^{-13t}}{t}$
14	$t^2 ch14t$	$\int_0^t t^3 e^{-4t}\,dt$	$\frac{\cos 14t-14}{t}$
15	$t^3 e^{-3t}$	$\int_0^t e^{-5t}\sin 3t\,dt$	$\frac{\sin 10t\cos 4t}{t}$
16	$t(\cos 2t+\sin 3t)$	$\int_0^t e^{-4t}\cos 7t\,dt$	$\frac{\cos 5t-\cos 15t}{t}$
17	$t(sh5t-ch5t)$	$\int_0^t e^{-3t} sh5t\,dt$	$\frac{\sin 5t+\sin 11t}{t}$
18	$t(\sin 3t-sh3t)$	$\int_0^t e^{2t} ch3t\,dt$	$\frac{\sin^2 5t}{t}$
19	$t(\cos 4t+ch4t)$	$\int_0^t t\sin 5t\,dt$	$\frac{\cos^2 5t-\sin^2 5t}{t}$
20	$t(e^{36}-e^{-3t})$	$\int_0^t t\cos 7t\,dt$	$\frac{e^{2t}-1-t}{t}$
21	$t(\sin 5t+e^{5t})$	$\int_0^t t\,ch^2 5t\,dt$	$\frac{e^{5t}-1+t^2}{t}$
22	$t(\cos 22t-e^{22t})$	$\int_0^t t sh^2 3t\,dt$	$\frac{3e^t-3+4t^3}{t}$
23	$t(sh23t+e^{23t})$	$\int_0^t (t+3)e^{-5t}\,dt$	$\frac{2-e^{-4t}}{t}$
24	$t(ch24t-e^{24t})$	$\int_0^t t^3 e^{-7t}\,dt$	$\frac{e^{2t}\cos 8t}{t}$
25	$(t-8)\sin 8t$	$\int_0^t (t^2+t)e^{-2t}\,dt$	$\frac{\sin^2 4t}{t}$
26	$(t+8)\cos 8t$	$\int_0^t (t^2+7)\sin 5t\,dt$	$\frac{\sin 3t\cos 3t}{t}$
27	$(t-27)sh27t$	$\int_0^t (t-27)\cos 7t\,dt$	$\frac{sh5t\,ch5t}{t}$
28	$(t+28)ch28t$	$\int_0^t (t+28)sh5t\,dt$	$\frac{e^{-28t}\sin 5t}{t}$

29	$(t+3)t\cos 2t$	$\int_0^t (t-29)ch7tdt$	$\frac{\cos 4t-\cos 3t}{t}$
30	$(t-3)\cdot t\sin 2t$	$\int_0^t (t-3)t\,e^{5t}\,dt$	$\frac{e^{30t}-1+t^2}{t}$

4. По заданному изображению $F(p)=\dfrac{Ap+B}{(p+a)(p^2+a+c)}$ найти оригинал. Значения коэффициентов $A,\ B,\ a,c$ приведены в таблице 4.

Таблица 4

Номер варианта	A	B	A	c	Номер варианта	A	B	A	C
1	5	1	2	-1	16	-6	7	0	6
2	2	-1	-3	1	17	5	-3	7	-9
3	5	0	-1	2	18	7	2	1	5
4	1	4	2	7	19	1	-1	9	4
5	-1	2	2	4	20	0	1	8	-5
6	1	2	4	2	21	-5	2	1	4
7	0	5	-2	7	22	-5	4	7	-3
8	1	-1	3	1	23	4	-7	2	6
9	4	3	0	4	24	0	8	3	-4
10	2	1	-6	5	25	4	6	1	5
11	0	2	5	-1	26	-4	3	3	4
12	-7	1	8	5	27	4	1	-2	8
13	1	4	2	9	28	7	1	-4	1
14	5	-5	6	-3	29	0	5	2	2
15	2	1	-2	25	30	6	-3	2	10

5. Решить операторным методом линейное дифференциальное уравнение $ay''+by'+cy=f(t),\ y(0)=A,\ y'(0)=B$. Функция $f(t)$ и значение коэффициентов $a,b,c\ \ A,B$ даны в таблице 5.

Таблица 5

Номер варианта	A	B	A	c	Номер варианта	A	B	A	C
1	5	1	2	-1	16	-6	7	0	6
2	2	-1	-3	1	17	5	-3	7	-9
3	5	0	-1	2	18	7	2	1	5

4	1	4	2	7	19	1	-1	9	4
5	-1	2	2	4	20	0	1	8	-5
6	1	2	4	2	21	-5	2	1	4
7	0	5	-2	7	22	-5	4	7	-3
8	1	-1	3	1	23	4	-7	2	6
9	4	3	0	4	24	0	8	3	-4
10	2	1	-6	5	25	4	6	1	5
11	0	2	5	-1	26	-4	3	3	4
12	-7	1	8	5	27	4	1	-2	8
13	1	4	2	9	28	7	1	-4	1
14	5	-5	6	-3	29	0	5	2	2
15	2	1	-2	25	30	6	-3	2	10

6. Решить интегральное уравнение операторным методом $ay(t)+b\int\limits_0^t y(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau = g(t)$. Функции $f(t)$ и $g(t)$, значения коэффициентов даны в таблице 6.

Таблица 6

Вариант	A	b	$f(t)$	$g(t)$	Вариант	A	b	$f(t)$	$g(t)$
1	1	2	$\cos t$	e^{-t}	16	1	1	$sh2t$	e^{3t}
2	0	1	$\sin t$	$\sin^2 t$	17	1	-2	$\sin 2t$	$\cos^2 3t$
3	1	$\frac{8}{3}$	$sh3t$	$\sin 2t$	18	1	1	$\cos 3t$	$t+1$
4	0	1	t	$\sin^2 2t$	19	1	-2	$\sin 2t$	$sh3t$
5	1	-1	$\cos t$	e^{t}	20	1	2	$\cos t$	e^{-2t}
6	0	1	$\sin 2t$	$\sin^2 t$	21	1	-1	$\sin 2t$	$\cos 3t$
7	1	1	cht	$\sin t$	22	1	-3	$sh2t$	$2t+1$
8	1	+3	$\sin t$	$2t-3$	23	1	1	t	e^{2t}
9	1	-1	$\sin 2t$	e^{-2t}	24	0	1	$sh2t$	$\sin^2 2t$
10	0	1	$\cos t$	$\cos^2 t$	25	1	-2	e^{t}	sht
11	1	1	$sh2t$	$\cos t$	26	1	-2	$\cos t$	e^{t}
12	1	2	t	e^{-3t}	27	1	-2	$ch2t$	sht
13	1	1	$sh2t$	cht	28	1	1	$\cos 2t$	e^{-2t}
14	0	1	$\cos 3t$	$\sin^2 t$	29	1	-3	$\cos t$	$2e^{3t}$
15	1	2	$\sin 2t$	t	30	1	2	$\sin t$	e^{-t}

Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} a_1 \dot{x} + b_1 \dot{y} + c_1 x + d_1 y = f_1(t) \\ c_2 \dot{x} + b_2 \dot{y} + c_2 x + d_2 y = f_2(t) \end{cases}$, $x(0) = A$ $y(0) = B$. Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и значения $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ A, B взять из таблицы 7.

Таблица 7

Вариант	A	b	$f(t)$	$g(t)$	Вариант	A	b	$f(t)$	$g(t)$
1	1	2	$\cos t$	e^{-t}	16	1	1	$sh2t$	e^{3t}
2	0	1	$\sin t$	$\sin^2 t$	17	1	-2	$\sin 2t$	$\cos^2 3t$
3	1	$\frac{8}{3}$	$sh3t$	$\sin 2t$	18	1	1	$\cos 3t$	$t+1$
4	0	1	t	$\sin^2 2t$	19	1	-2	$\sin 2t$	$sh3t$
5	1	-1	$\cos t$	e^{t}	20	1	2	$\cos t$	e^{-2t}
6	0	1	$\sin 2t$	$\sin^2 t$	21	1	-1	$\sin 2t$	$\cos 3t$
7	1	1	cht	$\sin t$	22	1	-3	$sh2t$	$2t+1$
8	1	+3	$\sin t$	$2t-3$	23	1	1	t	e^{2t}
9	1	-1	$\sin 2t$	e^{-2t}	24	0	1	$sh2t$	$\sin^2 2t$
10	0	1	$\cos t$	$\cos^2 t$	25	1	-2	e^{t}	sht
11	1	1	$sh2t$	$\cos t$	26	1	-2	$\cos t$	e^{t}
12	1	2	t	e^{-3t}	27	1	-2	$ch2t$	sht
13	1	1	$sh2t$	cht	28	1	1	$\cos 2t$	e^{-2t}
14	0	1	$\cos 3t$	$\sin^2 t$	29	1	-3	$\cos t$	$2e^{3t}$
15	1	2	$\sin 2t$	t	30	1	2	$\sin t$	e^{-t}

1.3 Решение типового варианта

1. Является ли данная функция оригиналом? Ответ обосновать. Функция $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t) = 0,$, при $t < 0$.

2) $f(t)$ - кусочно-непрерывна при $t < 0$ и интегрируема на любом конечном отрезке изменения t.

3) Существуют некоторые вещественные числа $M > 0$ и S' такие, если выполняется неравенство $|f(t)| \le Me^{st}$ при $t \ge 0$, называют оригиналом.

а) $f(t) = \cos 5t \cdot \eta(t)$.

Решение:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, т.к функция Хевисайда $\eta(t)$ «гасит» функцию $\cos 5t$ при $t < 0$.

2) $f(t)$ непрерывна как произведение двух непрерывных функций.

3) $|f(t)| = |\cos 5t \cdot \eta(t)| \le 1$ т.е $M = 1$, $S = 0$. Следовательно $f(t)$ является оригиналом.

б) $g(t) = \dfrac{1}{t-2}\eta(t)$.

Решение:

1) Множитель $\eta(t)$ «гасит» функцию $\dfrac{1}{t-2}$ при $t < 0$.

2) $g(t)$ имеет разрыв второго рода при $t = 2$ Следовательно $g(t)$ не является оригиналом.

2. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, пользуясь свойствами преобразования Лапласа:

$а) 3 + t^3 - ch5t;$ $б)\, 2e^{-4t}\cos 3t;$ $в)\,(t-2)^3;$ $г)\, 3\sin 2t \sin 3t;$

$д)\,(t+4)\cos 3t;$ $е)\int\limits_0^t t^2 \cdot e^{-6t}dt;$ $ж)\ \dfrac{\sin^2 3t}{t}.$

Решение:

а) по таблице соответствия 8 имеем: $3 + t^3 - ch5t \doteqdot \dfrac{3}{p} + \dfrac{3!}{P^4} - \dfrac{P}{P^2 - 25}$;

б) по таблице $\cos 3t \doteqdot \dfrac{P}{P^2 + 9}$ и по теореме смещения имеем:

$2e^{-4t}\cos 3t \doteqdot 2 \cdot \dfrac{p+4}{(p+4)^2 + 9}$;

в) по таблице $t^3 \doteqdot \dfrac{3!}{p^4}$ и по теореме запаздывания имеем $(t-2)^3 \doteqdot \dfrac{3!}{p^4}e^{-2p}$;

г) преобразуем данную функцию по формулам тригонометрии, тогда по таблице соответствия 8 получим: $3\sin 2t \sin 3t \doteqdot \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+25}\right)$.

д) $(t+4)\cos 3t = t\cos 3t + 4\cos 3t \doteqdot \dfrac{p^2 - 9}{\left(p^2+9\right)^2} = \dfrac{4p}{p^2+9}$;

е) $\int\limits_0^t t^2 e^{-6t}dt$. Найдем по таблице соответствия 8 $t^2 \doteqdot \dfrac{2!}{p^3}$ и по теореме смещения

$t^2 e^{-6t} \doteqdot \dfrac{2}{(p+6)^3}$.

По теореме об интегрировании оригинала получим:

$\int\limits_0^t t^2 e^{-6t}dt \doteqdot \dfrac{1}{p}\dfrac{2}{(p+6)^3} = \dfrac{2}{p(p+6)^2}$

ж) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$ - преобразуем данную функцию $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$. $\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\cos 2t}{t}$, тогда по теореме об интегрировании изображения

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{t} \risingdotseq \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\right)dp = \frac{1}{2}\left(\ln p + \frac{1}{2}\ln\left(p^2+4\right)\right)\Big|_p^{\infty} =$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\Bigg|_p^{\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

3. По заданному изображению $F(p) = \dfrac{Ap+B}{(p+a)\left(p^2+c\right)}$.

Найти оригинал.

Пусть $A=5$ $B=-6$ $a=2$ $c=10$.

$$F(p) = \frac{5p-6}{(p+2)\left(p^2+10\right)}.$$

Решение:

а) разложим дробно-рациональную функцию на сумму простейших дробей:

$$F(p) = \frac{5p-6}{(p+2)\left(p^2+10\right)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+10};$$

$A\left(p^2+10\right) + (Bp+C)(p+2) = 5p-6$ при $p=-2,\ 14A=16,\ A=-\dfrac{8}{7}$.

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p.

$$Ap^2 + 10A + Bp^2 + Cp + 2Bp + 2C = 5p - 6$$

при $p^2: A+B=0,\quad B=-A\ \ B=\dfrac{8}{7}$,

при $p: C+2B=5\ \ C=5-2B\ \ C=5-\dfrac{16}{7}\ \ C=\dfrac{19}{7}$

$$\textit{и так},\ F(p) = -\frac{8}{7}\frac{1}{p+2} + \frac{\frac{8}{7}p+\frac{19}{7}}{p^2+10} = -\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{p+2} + \frac{8}{7}\cdot\frac{p}{p^2+10} + \frac{19}{7}\cdot\frac{1}{p^2+10};$$

б) по таблице соответствия 8

$$\frac{1}{p+2} \risingdotseq e^{-2t},\ \frac{p}{p^2+10} \risingdotseq \cos\sqrt{10}t\ \ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}\left(p^2+10\right)} \risingdotseq \sin\sqrt{10}t,$$

таким образом, искомый оригинал: $f(t) = -\dfrac{8}{7}e^{-2t} + \dfrac{8}{7}\cos\sqrt{10}t + \dfrac{19}{7\sqrt{10}}\sin\sqrt{10}t$.

4. Решить операторным методом линейное дифференциальное уравнение

$$ay'' + by' + cy = f(t),\quad y(0) = A,\ y'(0) = B.$$

Пусть $a = 1\ b = -2\ c = 0.\ f(t) = -e^{t}\quad y(0) = 1\, y''(0) = 2.$
$y'' - 2y' = -e^{t},\ y(0) = 1\ y'(0) = 2.$

Решение:

Пусть $y(t) \doteqdot y(p)$ тогда по теореме дифференцирования оригинала получим: $y'(t) \doteqdot py(p) - y(0)$ и $y''(t) \doteqdot p^{2}y(p) - py(0) - y'(0)$.

По таблице 8 $e^{t} \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$.

Операторное уравнение данного дифференциального уравнения примет вид:

$$p^{2}y(p) - p - 2 - 2(py(y) - 1) = -\frac{1}{p-1};$$

$$p^{2}y(p) - 2py(p) = -\frac{1}{p-1} + p; \qquad p(p-2)y(p) = \frac{p^{2} - p - 1}{p-1}; \quad y(p) = \frac{p^{2} - p - 1}{p(p-1)(p-2)}.$$

Разлагая на сумму простейших дробей, получим

$$y(p) = -\frac{1}{2p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)}.$$

Применяя таблицу соответствия, получим $y(t) = -\dfrac{1}{2} + e^{t} + \dfrac{1}{2}e^{2t}$.

5. Решить интегральное уравнение

$$ay(t) + b\int_{0}^{\tau} y(\tau) f(t-\tau)\,d\tau = g(t),$$

где $a = 1,\ b = 2 \quad f(t) = \sin t \quad g(t) = e^{-t}, \quad y(t) + 2\int_{0}^{t} y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = e^{-t}.$

Запишем операторное уравнение. Пусть $y(t) \doteqdot y(p)$. По таблице соответствия 8: $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^{2}+1},\ e^{-t} \doteqdot \dfrac{1}{p+1}.$ Ясно, что $\int_{0}^{t} y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$ есть свертка двух функции, т.е $\int_{0}^{t} y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = y(t)\sin(t).$

По теореме умножения изображений получим: $y(t)\sin t \doteqdot y(p)\cdot\dfrac{1}{p^{2}+1}$.

Итак, операторное уравнение примет вид: $y(p) + \dfrac{2}{p^{2}+1}\cdot y(p) = \dfrac{1}{p+1}$;

$$y(p) = \frac{p^{2}+1}{(p+1)(p^{2}+3)} = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^{2}+3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P^{2}+3}.$$

По таблице соответствия 8 получим: $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}\cos\sqrt{3}t - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$.

6. Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} a_1\dot{x}+b_1\dot{y}+c_1x+d_1y=f_1(t) \\ a_2\dot{x}+b_2\dot{y}+c_2x+d_2y=f_2(t) \end{cases}$ $\quad x(0)=A,\quad y(0)=B$.

Функции $f_1(t),\ f_2(t)$ и значения $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2,\ A, B$ взять из таблицы 7 $\begin{cases} \dot{x}-2x=-3 \\ 2\dot{y}-x-y=1 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=6$.

Решение:

Пусть $x(t)\doteqdot X(p),\ y(t)\doteqdot y(p)$ тогда $\dot{x}(t)pX(p)$ $\quad \dot{y}(t)\doteqdot p\,y(p)-6,\ -3\doteqdot\dfrac{-3}{p}\quad 1\doteqdot\dfrac{1}{p}$.

Система операторных уравнений будет: $\begin{cases} (p-2)X(p)=-\dfrac{3}{p} \\ -X(p)(2p-1)Y(p)=\dfrac{2p+1}{p}. \end{cases}$

Решая полученную систему и применяя таблицу соответствия 8, получим:

$$X(p)=\frac{3}{p(p-2)}=\frac{3}{2p}-\frac{3}{2(p-2)}\doteqdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{2t}$$

$$Y(p)=\frac{12p^2-23p-5}{p(p-2)(2p-1)}=-\frac{5}{2p}-\frac{1}{2(p-2)}+\frac{9}{p-\frac{1}{2}}\doteqdot-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2t}+9e^{\frac{1}{2}t}.$$

1.4 Справочный материал

1.4.1 Свойства преобразования Лапласа.

Пусть $f(t)\doteqdot F(p), g(t)\doteqdot G(p)$.

1. $A\ f(t)+B\ g(t)\doteqdot A\ F(p)+B\ G(p)$ – теорема линейности.
2. $f(\lambda t)\doteqdot\dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$ – теорема подобия.
3. $e^{\alpha t}f(t)\doteqdot F(p-\alpha)$ – теорема смещения.
4. $f(t-\tau)\doteqdot e^{-pr}F(p)$ где $r>0$ – теорема запаздывания.

5.
$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),\ f''(t) \doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0),\quad f'''(t) \doteqdot p^3 F(p) - p^2 f(0) - p\, f'(0) - f''(0), \ldots$
$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}[0)$
– теорема дифференцирования оригинала.

6. $\int_0^t f(t)dr \doteqdot \frac{1}{p} \cdot F(p)$ – теорема интегрирования оригинала.

7. $-t\ f(t) \doteqdot F'(p),\ t^2 f(t) \doteqdot F''(p), \ldots, (-1)^n t^n\ f(t) \doteqdot F^{(n)}(p)$ – теорема дифференцирования изображения.

8. $\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(z)dz$ – теорема интегрирования изображения.

9. $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-r)dr \doteqdot F(p) \cdot G(p)$ – теорема умножения изображений.

10. $p\,F(p)G(p) \doteqdot f'(t) + g(t) + f(0\,)g(t) = g'(t) * f(t) + g(0)f(t)$ – интеграл Дюамеля.

1.4.2 Таблица соответствия.

Таблица 8

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$e^{\alpha e} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{\left((p-a)^2 + \omega^2\right)}$
2	$e^{\alpha e}$	$\frac{1}{p-a}$	8	$e^{\alpha e} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{\left((p-a)^2 + \omega^2\right)}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	10	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$
6	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$

1.4.3 Вспомогательный материал.

1. $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

2. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

3. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$.

4. $\sin^2\alpha \cdot = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

5. $\cos^2\alpha \cdot = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.

6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + c,\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,\quad \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a^2| + C$.

Список литературы

1. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 4. - Минск. 2007.

2. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: Учебники для вузов.-Изд.: Лань. 2005.-128 с.

3. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами).-М.: Айрис пресс, 2005. 1,2-курсы.

4. Ким Л.Н. Математика 3. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы дл студентов всех специальностей, часть 4.- Алматы, АИЭС. 2010.

Содержание

Сводный план 2014 г., поз. 228

Жуматаева Светлана Абановна
Жанузакова Динара Таупиховна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для специальности 5В074600-Космическая техника и технологии
Часть 2

Редактор Н.М.Голева
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать_______ Формат 6084 1/16
Тираж 250 экз. Бумага типографская №1
Объем 1.1 уч.-из.л. Заказ______ цена 550 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи» 050013, Алматы,
ул.Байтурсынова, 126