Коммерциялық емес
акционерлік қоғам

**АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ**

Жоғары математика
кафедрасы

# ЕСЕПТІК ӘДІС ЖӘНЕ ОЛАРДЫ КОМПЬЮТЕРМЕН ІСКЕ АСЫРУ

5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Алматы 2016

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: А.Қ.Искакова, А.М.Бексултанова. Сандық есептеулер және олардың компьютерлік шешулері: 5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар.- Алматы: АЭжБУ, 2016.- 26б.

---

Әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар 5В071800 – Электр энергетикасы мамандығының студенттері үшін «Сандық есептеулер және олардың компьютерлік шешулері» пәнінің №1, №2 есептеу-сызба жұмыстарын орындауға арналған.

---

Бұл материал осы мамандықтың «Сандық есептеулер және олардың компьютерлік шешулері» пәнінің бағдарламасына негізделіп жасалған. Тапсырмалар берілген және қажетті теориялық мәліметтер келтірілген. Типтік нұсқаның шешуі және есептеулермен көрсетілген.

Кестелер 12, әдеб.көрсеткіші – 7 атау.

Пікір беруші: тех.ғыл.канд., профессор Л.К.Ибраева

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2016ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2016ж.

## Введение

Значительную роль в профессиональной подготовке инженера отводится алгоритмической линии, которая предполагает решение задач на построение и конструирование определенных алгоритмов; доведение методов решения определенных типов задач до алгоритмов, рассмотрение основных этапов решения задач, целенаправленное формирование обобщенных умений решать задачи, эффективно использовать межпредметные связи, более полно реализовать принцип системности обучения.

Цель данной работы – приобретение практических навыков решения дифференциальных уравнений для их применения при решении различных прикладных задач в рамках специальности и смежных областях.

Расчетно-графические работы составлены в соответствии с программой вновь введенного специального курса «Численные методы и их компьютерная реализация». Задания составлены по модулям численные методы решения дифференциальных уравнений, решение дифференциальных уравнений операционными методами, элементы теории поля, их применениям к решению линейных дифференциальных уравнений. Изучаемый материал направлен на формирование у студентов практических навыков по использованию современных математических методов, с целью научить применять теоретические математические знания в разных направлениях профессиональной деятельности.

Компьютерная реализация программного материала предусмотрена в лабораторных работах с помощью системы компьютерной математики Mathcad – программного средства для осуществления численных, аналитических и графических методов решения математических задач на компьютере.

Программа дисциплины «Численные методы и их компьютерная реализация» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС в виде модулей (разделов математики) – укрупненных дидактических единиц с завершающим рубежным контролем в контрольной работы. Все студенты изучают 2 модуля, что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах.

В расчетно-графической работе решение задач должно быть кратким и, в то же время, достаточно объяснено ссылками на теорию. Примером для оформления может служить решение типового варианта.

РГР выполняются в отдельной тонкой тетради, в номере каждого задания вторая цифра указывает на вариант.

## Кіріспе

Кәсіби инженер дайындауда - есептің алгоритімі және есептің құрылуы мен құрамын құрастыру; есепті шешу әдістерінің алгоритімін таңдау; пәнаралық байланысты ұғыну; пәннің теориялық бөлімдерін оқуы және практикалық дағдыларды игеруі мамандық аясында және осы мамандыққа іргелес аймағында әртүрлі қолданбалы есептерді шешу үшін қолдануы жүйелік оқытуда үлкен рөл атқарады.

Жұмыстың мақсаты – оқытылып жатқан материалдың негізінде амалдық есептеулердің негізгі әдістемелік идеясының түсінігін қалыптастыру және дифференциалдық теңдеулерді шешудегі жаңа әдістер үшін мүмкіндіктерін алу, физикалық құбылыстардың математикалық үлгілерін құрастыру (скаляр және векторлық өрістер).

Жаңадан енгізілген арнайы курс "Сандық әдістер және олардың компьютерлік қолданулары" бағдарламасына сәйкес есептеу-сызбалық жұмыс жасалды. Тапсырмалар дифференциалдық теңдеулер шешудің сандық әдістері, дифференциалдық теңдеулерді амалдық есептеу арқылы шешу тәсілдері, өрістер теориясының элементтері, олардың сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолдану модульдері бойынша құрастырылған. Қарастырылып отырған материал студенттердің машықтану шеберлігін қалыптастыруға, теориялық математикалық білімдерін түрлі кәсіби бағыттарда қолдана алуға бағытталған.

Бұл пәннін компьютерлік іске асырылуы зертханалық жұмыстар арқылы Mathcad компьютерлік математика жүйесінің көмегімен жоспарланған. Mathcad – сандық, аналитикалық және графикалық тәсілдермен математикалық есептерді компьютерде шығаруға арналған ең тиімді жүйе.

«Сандық әдістер және олардың компьютерлік іске асырылуы» пәнінің бағдарламасы модуль түрінде (математика бөлімдері) АЭжБУ-ң ағымдағы оқу жоспарымен сәйкес құрылымдалған – қорытынды бақылау мен тест түріндегі аралық бақылаумен аяқталатын дидактикалық бірліктердің үлкеюі. Оқу жоспарында бөлінгендей кредиттердің жалпы санына сәйкес барлық студенттер 2 модульді де оқиды. Әр модульдің мазмұны мен көлемі тыңдаушылардың психологиялық-педагогикалық жасына сәйкес ерекшеліктерімен анықталған және АЭжБУ-дегі студенттерді аттестаттау кестесіне сәйкес анықталған. Оқылатын материал тізбегі пәнаралық материалмен сәйкес келеді.

Есептеу-сызбалық жұмысты орындағанда теорияға сілтеме жасай отырып - жауабын түсінікті, сонымен қатар қысқа етіп жазу керек.

ЕСЖ жұқа дәптерге өз нұсқасына сәйкес орындалады.

**ЕГЖ №1. 1-Модуль. Амалдық есептеулер. Дифференциалдық теңдеулерді амалдық әдістермен шешу**

*Теориялық сұрақтар:*

1) Лаплас түрлендірулері. Түпнұсқа және бейне.

2) Сызықтық, ұқсастық, ығысу, кешігу теоремалары.

3) Тұпнұсқа мен бейнені дифференциалдау және интегралдау теоремалары.

4) Функцияның үйірткісі. Бейнені көбейту теоремасы. Дюамель формуласы.

5) Бейне арқылы түпнұсқаны табу.

6) Дифференциалдық теңдеулер мен дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін Лаплас түрлендірулерін қолдану.

*Есептік тапсырма*

1-тапсырма. Сызықтық, ұқсастық, ығысу, кешігу теоремалары арқылы функцияның бейнесін табыңыз.

| № | а) $f(t)$ | б) $f(t)$ | в) $f(t)$ | г) $f(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | $t-3e^{2t}-\sin 3t$ | $e^{-3t}\cos t$ | $(t-1)ch(t-1)$ | $\sin t\cdot\sin 3t$ |
| 1.2 | $2+3t^3-5\cos 2t$ | $e^{2t}\sin 5t$ | $(t-2)e^{(t-2)}$ | $\cos t\cdot\cos 2t$ |
| 1.3 | $t^3+4e^{-3t}-ch\sqrt{5}t$ | $3e^{4t}sh3t$ | $\cos^2(t-1)$ | $\sin t\cdot\cos 3t$ |
| 1.4 | $3+2t^5+\cos\sqrt{2}t$ | $e^{-3t}ch2t$ | $\sin^2(t-1)$ | $sht\cdot cht$ |
| 1.5 | $t^3-\sin\sqrt{2}t+e^{4t}$ | $2e^{4t}\cos 3t$ | $(t-1)e^{(t-1)}$ | $e^{3t}\cdot\sin^2 t$ |
| 1.6 | $3+ch3t-4\sin 4t$ | $3e^{-t}\sin 2t$ | $(t-2)ch(t-2)$ | $e^{-t}\cdot\cos^2 t$ |
| 1.7 | $t-sh\sqrt{3}t-2e^{-4t}$ | $e^{7t}sht$ | $(t-5)^7$ | $\sin t\cdot ch3t$ |
| 1.8 | $t^2-e^{-2t}-\sin 2t$ | $e^{-4t}ch5t$ | $(t-3)\sin 2(t-3)$ | $\cos t\cdot sh2t$ |
| 1.9 | $7-e^{4t}+\sqrt{6}\cdot t^5$ | $e^{-3t}t^7$ | $(t-2)e^{3(t-2)}$ | $ch2t\cdot sh3t$ |
| 1.10 | $t^2-\sin 3t-e^{-5t}$ | $e^{2t}\cos 4t$ | $(t-2)\cos 2(t-2)$ | $\sin 2t\cdot\sin 5t$ |
| 1.11 | $1+4t^7-\sin 7t$ | $2e^{-3t}\sin\sqrt{2}t$ | $(t-3)sh(t-3)$ | $\cos 2t\cdot\cos 3t$ |
| 1.12 | $t^7+2\cos\sqrt{5}t+2e^{6t}$ | $e^{-2t}sh3t$ | $(t-1)^6$ | $\sin 4t\cdot\cos 2t$ |
| 1.13 | $5+2sh7t-\cos 4t$ | $2e^{-3t}ch2t$ | $(t-3)ch(t-3)$ | $sh2t\cdot ch3t$ |
| 1.14 | $t^2+3ch\sqrt{3}t+4e^{-2t}$ | $e^{-3t}t^7$ | $(t-1)e^{2(t-1)}$ | $e^{-2t}\cdot\sin^2 t$ |
| 1.15 | $6+e^{-7t}+4\sin 5t$ | $3e^{-4t}\cos 2t$ | $(t-3)\cos 3(t-3)$ | $e^{-3t}\cdot\cos^2 t$ |
| 1.16 | $\cos 9t-4e^{-t}+3$ | $e^{4t}\sin 3t$ | $(t-1)\sin 2(t-1)$ | $\sin 2t\cdot cht$ |
| 1.17 | $\sin 9t-t-\cos 3t$ | $-e^{-t}sh2t$ | $(t-7)sh(t-7)$ | $\cos 2t\cdot sh3t$ |
| 1.18 | $2-cht-3\sin 3t$ | $3e^{4t}cht$ | $(t-5)^4$ | $\sin 4t\cdot\sin 6t$ |
| 1.19 | $e^{6t}+5-4t^7$ | $4e^{2t}t^6$ | $(t-6)ch(t-6)$ | $\cos t\cdot\cos 6t$ |
| 1.20 | $8t^3+5e^{-6t}+sh3t$ | $e^{6t}\cos 3t$ | $(t-5)e^{3(t-5)}$ | $\sin 3t\cdot\cos 5t$ |
| 1.21 | $t-sh\sqrt{3}t-2e^{-4t}$ | $e^{-2t}\sin 4t$ | $(t-6)\cos(t-6)$ | $sh3t\cdot ch4t$ |
| 1.22 | $7+\sin\sqrt{2}t-2\cos\sqrt{2}t$ | $3e^{2t}sh4t$ | $(t-4)\sin 3(t-4)$ | $e^{3t}\cdot\sin^2 t$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.23 | $t^7+2\sin\sqrt{3}t-e^{3t}$ | $e^{-t}ch5t$ | $\cos^2(t-3)$ | $e^{4t}\cdot\cos^2 t$ |
| 1.24 | $\cos\sqrt{5}t+t^2+7$ | $3e^{-2t}t^3$ | $\sin^2(t-3)$ | $\sin 3t\cdot ch2t$ |
| 1.25 | $sh\sqrt{2}t+e^{5t}-\cos 7t$ | $e^{-3t}\sin 4t$ | $(t-1)sh2(t-1)$ | $\cos 4t\cdot sh5t$ |
| 1.26 | $3-e^{-4t}+\sin 9t$ | $2e^{5t}\cos 3t$ | $(t-8)^7$ | $\sin 8t\cdot\sin 2t$ |
| 1.27 | $\sin 5t+\cos 2t-t^{11}$ | $3e^{-2t}sh3t$ | $(t-2)ch4(t-2)$ | $\cos 4t\cdot\cos 3t$ |
| 1.28 | $ch5t+e^{-3t}-5t^4$ | $e^{-t}ch4t$ | $(t-9)e^{2(t-9)}$ | $\sin 5t\cdot\cos 2t$ |
| 1.29 | $\sin\sqrt{7}t+\cos t-e^{-2t}$ | $5e^{6t}t^2$ | $(t-2)\cos 3(t-2)$ | $sh4t\cdot ch6t$ |
| 1.30 | $3-\sin 2t+3t^5$ | $7e^{-8t}\cos 4t$ | $(t-8)\sin(t-8)$ | $ch^2 2t$ |

2-тапсырма. $F(p)$ функциясының $f(t)$ түпнұсқасын табыңыз.

| № | $F(p)$ | № | $F(p)$ | № | $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | $\frac{1}{(p+1)(p-2)}$ | 2.2 | $\frac{2}{p^2(p^2+1)}$ | 2.3 | $\frac{1}{p(p^2+3)}$ |
| 2.4 | $\frac{2}{p^2-4}$ | 2.5 | $\frac{1}{p(p+2)}$ | 2.6 | $\frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$ |
| 2.7 | $\frac{3p}{(p^2+1)(p+9)}$ | 2.8 | $\frac{1}{(p+3)(p+4)}$ | 2.9 | $\frac{p^2}{(p^2+4)^2}$ |
| 2.10 | $\frac{2}{(p-1)(p-2)}$ | 2.11 | $\frac{1}{(p+1)(p^2-4)}$ | 2.12 | $\frac{1}{p^2-9}$ |
| 2.13 | $\frac{2}{p(p^2+3)}$ | 2.14 | $\frac{p}{p^2(p^2+4)}$ | 2.15 | $\frac{1}{(p+5)(p+7)}$ |
| 2.16 | $\frac{1}{p^2(p-1)}$ | 2.17 | $\frac{2p}{(p+1)(p^2+25)}$ | 2.18 | $\frac{1}{p(p^2+16)}$ |
| 2.19 | $\frac{5}{(p+4)(p-5)}$ | 2.20 | $\frac{p^2}{(p^2+9)^2}$ | 2.21 | $\frac{1}{(p+2)(p-6)}$ |
| 2.22 | $\frac{1}{p^4(p-1)}$ | 2.23 | $\frac{1}{(p+1)(p+2)}$ | 2.24 | $\frac{1}{(p-3)(p-2)}$ |
| 2.25 | $\frac{1}{p^3(p+5)}$ | 2.26 | $\frac{2}{p^2(p^2+4)}$ | 2.27 | $\frac{1}{p(p^2+36)}$ |
| 2.28 | $\frac{1}{p(p+6)}$ | 2.29 | $\frac{1}{(p+3)(p+7)}$ | 2.30 | $\frac{1}{(p-3)(p-1)}$ |

3-тапсырма. Берілген бейне бойынша түпнұсқасын табыңыз.

| № | $F(p)$ | № | $F(p)$ |
|---|---|---|---|
| 3.1 | $\frac{p+1}{(p-3)(p^2+3p+4)}$ | 3.2 | $\frac{2p+1}{p^2(p^2-2p+1)}$ |
| 3.3 | $\frac{1}{p^3(p+2p+1)}$ | 3.4 | $\frac{3p+1}{p^2(p^2+1)}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.5 | $\frac{p+1}{(p-1)(p^2+4p+4)}$ | 3.6 | $\frac{2p+1}{p(p+1)(p^2+3)}$ |
| 3.7 | $\frac{p-1}{p(p+1)(p+2)}$ | 3.8 | $\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+3p+1)}$ |
| 3.9 | $\frac{p+1}{(p-1)(p+2)^2}$ | 3.10 | $\frac{p+3}{(p+1)^2(p+2)^2}$ |
| 3.11 | $\frac{p^2+2}{p(p+4)(p+6)}$ | 3.12 | $\frac{p-1}{(p-2)(p^2+4)}$ |
| 3.13 | $\frac{p+1}{(p^2+2)^2 p}$ | 3.14 | $\frac{2p-1}{p(p^2+1)}$ |
| 3.15 | $\frac{p-1}{(2p+1)(2p+2)}$ | 3.16 | $\frac{p-1}{p^2(p^2-4)}$ |
| 3.17 | $\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$ | 3.18 | $\frac{3p+1}{p^2(p^2+1)}$ |
| 3.19 | $\frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$ | 3.20 | $\frac{2-3p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$ |
| 3.21 | $\frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$ | 3.22 | $\frac{2p}{(p^2+1)(p^2+9)}$ |
| 3.23 | $\frac{2p+1}{(p^2+2)(p^2+1)}$ | 3.24 | $\frac{3}{(p+1)(p^2+2p+2)}$ |
| 3.25 | $\frac{1}{p^3+2p^2+2p}$ | 3.26 | $\frac{4p+1}{p^2(p^2+3)}$ |
| 3.27 | $\frac{3p}{p^3-8}$ | 3.28 | $\frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$ |
| 3.29 | $\frac{3p-1}{(p^2+4)(p^2+9)}$ | 3.30 | $\frac{3p}{(p+1)^2(p+3)}$ |

4-тапсырма. Амалдық есептеулер әдісімен Коши есебін шешіңіз.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.1 | $y''+y=2\cos t,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=-1$ | 4.2 | $y''-2y'+5y=1-t,\ \ y(0)=y'(0)=0$ |
| 4.3 | $y''-y'=te^t,\ \ y(0)=y'(0)=0$ | 4.4 | $y''+2y'+y=t^2,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0$ |
| 4.5 | $y''+4y=t,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0$ | 4.6 | $y''+3y'=20e^{2t},\ \ y(0)=1,\ y'(0)=7$ |
| 4.7 | $y''+y'=sht,\ \ y(0)=2,\ y'(0)=1$ | 4.8 | $y''+2y'=2+e^t,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=2$ |
| 4.9 | $y''-2y'-y=e^{3t},\ \ y(0)=y'(0)=0$ | 4.10 | $y''+2y'=t\sin t,\ \ y(0)=y'(0)=0$ |
| 4.11 | $y''+y'=\cos t,\ \ y(0)=2,\ y'(0)=0$ | 4.12 | $y''+y=2\sin t,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=-1$ |
| 4.13 | $y''+y=e^t,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=2$ | 4.14 | $y''+y'+y=t^2+t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-3$ |
| 4.15 | $y''+6y'+9y=9e^{3t},\ \ y(0)=y'(0)=0$ | 4.16 | $y''-y'+y=e^{-t},\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1$ |
| 4.17 | $y''+y=\sin t+\cos 2t, y(0)=y'(0)=1$ | 4.18 | $y''+y=0,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=-1$ |
| 4.19 | $y''-2y'+2y=1,\ \ y(0)=y'(0)=0$ | 4.20 | $y''-2y'+y=t-\sin t,\ y(0)=y'(0)=0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.21 | $y''-9y=2-t,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1$ | 4.22 | $y''+5y'+4y=e^{-t},\ y(0)=0,\ y'(0)=2$ |
| 4.23 | $2y''-y=\sin 3t,\ \ y(0)=-2,\ y'(0)=1$ | 4.24 | $y''+4y'+4y=t^3e^{2t}, y(0)=1, y'(0)=2$ |
| 4.25 | $y''-2y'-3y=2t,\ \ y(0)=y'(0)=1$ | 4.26 | $y''+y=6e^{-t},\ \ y(0)=3,\ y'(0)=1$ |
| 4.27 | $y''-y'-6y=e^{-t},$ <br> $y(0)=1,\ y'(0)=0$ | 4.28 | $y''+4y=(8t+4)e^{2t},$ <br> $y(0)=4, y'(0)=-1$ |
| 4.29 | $y''-2y'=e^t(t^2+t-3),$ <br> $y(0)=y'(0)=2$ | 4.30 | $y''-y=4\sin t+5\cos 2t,$ <br> $y(0)=-1, y'(0)=-2$ |

5-тапсырма. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін амалдық әдіспен шешіңіз.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.1 | $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+2,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=3x,\ y(0)=0\end{cases}$ | 5.2 | $\begin{cases}\dot{x}=y-1,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=-x-2y,\ \ y(0)=-1\end{cases}$ |
| 5.3 | $\begin{cases}\dot{x}=3x+4y,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=4x-3y,\ y(0)=1\end{cases}$ | 5.4 | $\begin{cases}\dot{x}=y+3,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=x+2,\ \ y(0)=0\end{cases}$ |
| 5.5 | $\begin{cases}\dot{x}=y-1,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=-x+2,\ y(0)=0\end{cases}$ | 5.6 | $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=3x,\ y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.7 | $\begin{cases}\dot{x}=3y,\ \ x(0)=2\\ \dot{y}=3x+1,\ y(0)=0\end{cases}$ | 5.8 | $\begin{cases}\dot{x}=x+2y+1,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=4x-y,\ \ y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.9 | $\begin{cases}\dot{x}=3x+5y+2,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=3x+y+1,\ \ y(0)=2\end{cases}$ | 5.10 | $\begin{cases}\dot{x}=3y+2,\ \ x(0)=-1\\ \dot{y}=x+2y,\ y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.11 | $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+1,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=x+y,\ \ y(0)=2\end{cases}$ | 5.12 | $\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=x-y,\ y(0)=0\end{cases}$ |
| 5.13 | $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=4y+1,\ y(0)=1\end{cases}$ | 5.14 | $\begin{cases}\dot{x}=x+4y,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=2x-y+9,\ y(0)=0\end{cases}$ |
| 5.15 | $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=4x+y+1,\ y(0)=0\end{cases}$ | 5.16 | $\begin{cases}\dot{x}=2y,\ \ x(0)=2\\ \dot{y}=2x,\ y(0)=2\end{cases}$ |
| 5.17 | $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y,\ \ x(0)=3\\ \dot{y}=-4x,\ y(0)=1\end{cases}$ | 5.18 | $\begin{cases}\dot{x}=2y+1,\ \ x(0)=-1\\ \dot{y}=2x+3,\ y(0)=0\end{cases}$ |
| 5.19 | $\begin{cases}\dot{x}=x+4y+1,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=2x+3y,\ y(0)=1\end{cases}$ | 5.20 | $\begin{cases}\dot{x}=-3x-4y+1,\ \ x(0)=-1\\ \dot{y}=4x-2y,\ y(0)=0\end{cases}$ |
| 5.21 | $\begin{cases}\dot{x}=x+y+1,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=4x-y,\ y(0)=1\end{cases}$ | 5.22 | $\begin{cases}\dot{x}=-y,\ \ x(0)=1\\ \dot{y}=2x+2y,\ y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.23 | $\begin{cases}\dot{x}=x+2y,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=2x+y+1,\ y(0)=5\end{cases}$ | 5.24 | $\begin{cases}\dot{x}=-2x+6y+1,\ \ x(0)=0\\ \dot{y}=2x+2,\ \ y(0)=1\end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.25 | $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y, & x(0)=0\\ \dot{y}=3x, & y(0)=1\end{cases}$ | 5.26 | $\begin{cases}\dot{x}=-2x-2y, & x(0)=3\\ \dot{y}=-4x, & y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.27 | $\begin{cases}\dot{x}=x+2y, & x(0)=0\\ \dot{y}=x-y+1, & y(0)=1\end{cases}$ | 5.28 | $\begin{cases}\dot{x}=3x+2y, & x(0)=0\\ \dot{y}=x-y, & y(0)=1\end{cases}$ |
| 5.29 | $\begin{cases}\dot{x}=2y, & x(0)=2\\ \dot{y}=2x+3y+1, & y(0)=1\end{cases}$ | 5.30 | $\begin{cases}\dot{x}=2x+8y+1, & x(0)=2\\ \dot{y}=3x+4y, & y(0)=1\end{cases}$ |

*Типтік нұсқаның шешуі*

1-тапсырма. Сызықтық, ұқсастық, ығысу, кешігу теоремалары арқылы функцияның бейнесін табыңыз.

а) $3+6e^{5t}+t^7$, б) $e^{5t}\cos 3t$, в) $(t-4)^5$, г) $\sin 7t\cdot\sin 5t$,

Шешімі:

а) 1-кесте мен сызықтық теореманы қолданып:

$$f(t)=3+6e^{5t}+t^7 \div \frac{3}{p}+\frac{6}{p-5}+\frac{7!}{p^8}=F(p);$$

б) сәйкестік кестесі бойынша: $\cos 3t \div \dfrac{p}{p^2+9}$ және ықысу теоремасы бойынша:

$$e^{5t}\cos 3t \div \frac{p-5}{(p-5)^2+9};$$

в) кесте бойынша $t^5 \div \dfrac{5!}{p^6}$ және кешігу теоремасы арқылы:

$$(t-4)^5 \div \frac{5!}{p^6}\cdot e^{-5p};$$

г) берілген функцияны түрлендіріп: $\sin 7t\cdot\sin 5t=\dfrac{1}{2}(\cos 2t-\cos 12t)$ аламыз. Енді 1-кестені және сызықтық теореманы қолданып:

$$\sin 7t\cdot\sin 5t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 12t)\div\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+144};$$

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{72}{p(p^2+144)}.$$

2-тапсырма. $F(p)$ функциясының $f(t)$ түпнұсқасын табыңыз:

$$F(p)=\frac{1}{(p-2)(p+5)}.$$

Шешуі: рационал-бөлшекті функцияны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейік:

$$\frac{1}{(p-2)(p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+5};$$

$A(p+5)+B(p-2)=1$.

Егер $p=2$ болса: $1=7A \ \to A=\frac{1}{7}$;

егер $p=-5$ болса: $1=-7B \ \to B=-\frac{1}{7}$, осыдан

$$\frac{1}{(p-2)(p+5)}=\frac{1}{7}\frac{1}{p-2}-\frac{1}{7}\frac{1}{p+5}\div\frac{1}{7}e^{2t}-\frac{1}{7}e^{-5t}=\frac{1}{7}e^{2t}\left(1-e^{-7t}\right).$$

3-тапсырма. Берілген бейне бойынша түпнұсқасын табыңыз:

а) $F(p)=\frac{p^2}{(p-2)(p^2+p+1)}$, б) $F(p)=\frac{1}{p(p^2+36)}$.

Шешуі:

а) рационал-бөлшекті функцияны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеп:

$$F(p)=\frac{p^2}{(p-2)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1};$$

$$p^2=A(p^2+p+1)+(Bp+C)(p-2).$$

Егер $p=2$ болса $4=7A \ \to A=\frac{4}{7}$;

$p^2$ бойынша: $1=A+B \ \to B=\frac{3}{7}$;

$p^0$ бойынша: $0=A-2C \ \to C=\frac{2}{7}$.

Осыдан,

$$F(p)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3p+2}{p^2+p+1}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{p+\frac{2}{3}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Демек, ізделініп отырған тұпнұсқа $f(t)=\frac{4}{7}e^{2t}+\frac{3}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{7\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

б) рационал-бөлшекті функцияны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеп:

$$\frac{1}{p(p^2+36)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+36};$$

$$A(p^2+36)+Bp^2+Cp=1;$$

$$p^0: \ 36A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{36};$$

$$p^1: \ C=0;$$

$$p^2: \quad A+B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{36}.$$

Сонда

$$\frac{1}{p(p^2+36)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2+36}.$$

Функцияның тұпнұсқасы:

$$\frac{1}{p\left(p^2+36\right)}=\frac{1}{36}\frac{1}{p}-\frac{1}{36}\frac{p}{p^2+36}\div\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\cos 6t.$$

4-тапсырма. Амалдық есептеулер әдісімен Коши есебін шешіңіз:

$$y''+4y=\sin 2t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

Шешуі:

$y(t)\div Y(p)$;

$y''(t)=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-1$;

$\sin 2t\div\dfrac{2}{p^2+4}$ деп алайық.

Сонда амалдық теңдеу мына түрге келеді:

$$p^2Y(p)-1+4Y(p)=\frac{2}{p^2+4}.$$

Осыдан

$$Y(p)\left(p^2+4\right)=\frac{2}{p^2+4}+1,$$

$$Y(p)=\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}+\frac{1}{p^2+4}.$$

$\dfrac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$ - түпнұсқасын бейнені көбейту теоремасынан табамыз:

$$\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}=\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\div\sin 2t*\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t\sin 2\tau\sin 2(t-\tau)d\tau=$$

$$=2\left(\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{t}{8}\cos 2t\right).$$

Осыдан, ізделініп отырған шешім төмендегі түрде болады:

$$y(t)=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t.$$

5-тапсырма. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін амалдық әдіспен шешіңіз:

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t,\\ \dot{y}=2x-y-2\cos t.\end{cases} \quad x(0)=-1, \quad y(0)=0.$$

Шешуі: $x(t)\div X(p)$, $y(t)\div Y(p)$ болсын делік. Онда Лаплас түрлендірулерімен, 1- кесте және бастапқы берілген $x(0)=-1$, $y(0)=0$ шарттарды қолдана отырып, амалдық теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} pX(p)+1=4X(p)-3Y(p)+\dfrac{1}{p^2+1} \\ pY(p)=2X(p)-Y(p)-\dfrac{2p}{p^2+1} \end{cases} \to \begin{cases} (p-4)X(p)+3Y(p)=\dfrac{-p^2}{p^2+1} \\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=-\dfrac{2p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Теңдеуді шешуде Крамер ережесін қолданамыз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-4 & 3 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}=p^2-3p+2=(p-1)(p-2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{-p^2}{p^2+1} & 3 \\ -\dfrac{2p}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{-p^3-p^2+6p}{p^2+1},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} p-4 & \dfrac{-p^2}{p^2+1} \\ -2 & -\dfrac{2p}{p^2+1} \end{vmatrix}=\frac{-4p^2+8p}{p^2+1}.$$

Сонда

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}, \qquad Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)};$$

$$X(p)=\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{B_1}{p-2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+1};$$

$$Y(p)=\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A_2}{p-1}+\frac{B_2}{p-2}+\frac{C_2p+D_2}{p^2+1}.$$

Белгісіз коэффициенттерді табу әдісі бойынша:

$$A_1=-1,\ B_1=0,\ C_1=1,\ D_1=-1,\ A_2=-2,\ B_2=0,\ C_2=2,\ D_2=-2.$$

Осыдан,

$$X(p)=\frac{-1}{p-1}+\frac{p-1}{p^2+1}\div -e^t+\cos t-\sin t,$$

$$Y(p)=-\frac{2}{p-1}+2\cdot\frac{p-1}{p^2+1}\div -2e^t+2\cos t-2\sin t.$$

Жауабы: $x(t)=-e^t+\cos t-\sin t, \qquad y(t)=2\left(-e^t+\cos t-\sin t\right).$

**Анықтама материалдары**

Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері. $f(t)\div F(p),\ \ g(t)\div G(p)$:

а) сызықтық теоремасы $Af(t)+Bg(t)\div AF(p)+BG(p)$;

ә) ұқсастық теоремасы $f(\lambda t)\div\dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$;

б) ығысу теоремасы $e^{at} f(t) \div F(p-a)$;

в) $\tau > 0$ кешігу теоремасы $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p))$;

г) түпнұсқаны дифференциалдау теоремасы

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \ldots$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0);$$

ғ) түпнұсқаны интегралдау теоремасы $\int_0^t f(z)dz \div \frac{F(p)}{p}$;

д) бейнені дифференциалдау теоремасы $(-1)^n t^n f(t) \div F^{(n)}(p)$;

е) бейнені интегралдау теоремасы $\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(z)dz$;

ж) бейнені көбейту теоремасы

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \div F(p) \cdot G(p);$$

к) Дюамель интегралы

$$F(p) \cdot G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) = g'(t) * f(t) + g(0) \cdot f(t).$$

1кесте - Түпнұсқа – бейне сәйкестік кестесі

| № | $f(t)$ | $F(p)$ | № | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{p}$ | 8 | $e^{at}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$ |
| 2 | $e^{at}$ | $\frac{1}{p-a}$ | 9 | $e^{at}\cos\omega t$ | $\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$ |
| 3 | $t^n$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | 10 | $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ |
| 4 | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ | 11 | $t\sin\omega t$ | $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 5 | $\cos\omega t$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ | 10 | $t\cos\omega t$ | $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 6 | $sh\omega t$ | $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ | 11 | $tsh\omega t$ | $\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$ |
| 7 | $ch\omega t$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ | 12 | $tch\omega t$ | $\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$ |

**ЕСЖ № 2. 2 Модуль. Дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістері. Өрістер теориясының элементтері**

*Теориялық сұрақтар:*

1) Коши есебінің құрылымы.
2) Ломаная Эйлера.

3) Жуық мән есептеуде Эйлера формуласы.
4) Функцияның мәнін жуық есептеуде екі реттік есептелуі.
5) Төртінші ретті дәлдікте Рунге-Кутта әдісі.
6) Скалярлық өріс: бағыт бойынша туында, градиент.
7) Векторлық өріс: дивергенция, циркуляция, ротор, ағым.
8) Остроградский-Гаусса және Стокс формулалары.
9) Соленоидты, потенциалды и гармониялық өрістер.

*Есептік тапсырма*

1- тапсырма. Коши есебін сандық әдіспен шешу:

1) Эйлер әдісін қолданып, дифференциалдық теңдеулердің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын, $h$ қадамы бойынша $[a, b]$ кесіндісінде сандық шешімдерін табыңыз.

2) Рунге-Кутта әдісі бойынша дифференциалдық теңдеулердің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын, $h$ қадамы бойынша $[a, b]$ кесіндісінде сандық шешімдерін табыңыз.

| Нұсқа | Теңдеу | $x_0$ | $y_0$ | $h$ | $[a; b]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | $y' = x + y$ | 0 | 0,8 | 0,1 | $[0; 1]$ |
| 1.2 | $y' = x + \cos y$ | 1,8 | 2 | 0,1 | $[1{,}8; 2{,}8]$ |
| 1.3 | $y' = e^x + y$ | 0 | 1,2 | 0,1 | $[0; 1]$ |
| 1.4 | $y' = xy + \sin x$ | 0 | 2 | 0,1 | $[0; 1]$ |
| 1.5 | $y' = x + 3\sin y/3$ | 1,6 | 2 | 0,1 | $[1{,}6; 2{,}6]$ |
| 1.6 | $y' = e^{x+y}$ | 0 | –1 | 0,1 | $[0; 1]$ |
| 1.7 | $y' = xy + e^x$ | –1 | 0,5 | 0,1 | $[-1; 0]$ |
| 1.8 | $y' = x + y^2$ | –2 | 0 | 0,1 | $[-2; -1]$ |
| 1.9 | $y' = \sin(x - y)$ | 1 | 3 | 0,1 | $[1; 2]$ |
| 1.10 | $y' = \cos(x + y)$ | 2 | 0 | 0,1 | $[2; 3]$ |
| 1.11 | $y' = y + \cos x$ | 2 | 0 | 0,1 | $[2; 3]$ |
| 1.12 | $y' = x^2 + y$ | 1 | 0 | 0,1 | $[1; 2]$ |
| 1.13 | $y' = x + e^y$ | 1 | –1 | 0,1 | $[1; 2]$ |
| 1.14 | $y' = x + \sin y$ | 1,5 | 3 | 0,1 | $[1{,}5; 2{,}5]$ |
| 1.15 | $y' = x^2 + y^2$ | 0 | 0 | 0,1 | $[0; 1]$ |
| 1.16 | $y' = y - x$ | 0 | 1,5 | 0,2 | $[0; 1]$ |
| 1.17 | $y' = y/x - y^2$ | 1 | 1 | 0,2 | $[1; 2]$ |
| 1.18 | $y' = 0{,}25y^2 + x^2$ | 0 | 1 | 0,1 | $[0; 0{,}5]$ |
| 1.19 | $y' = x + \cos y$ | 1,8 | 2 | 0,2 | $[1{,}8; 2{,}8]$ |
| 1.20 | $y' = x + y$ | 0 | 1 | 0,5 | $[0; 2]$ |
| 1.21 | $y' = x^2 + y$ | 0 | 1 | 0,2 | $[0; 1]$ |
| 1.22 | $y' = 2y - 3$ | 0 | 1 | 0,4 | $[0, 2]$ |
| 1.23 | $y' = xy^3 - y$ | 0 | 1 | 0,1 | $[0; 0{,}5]$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.24 | $y' = xy + e^x$ | –1 | 0,5 | 0,2 | $[-1;\ 0]$ |
| 1.25 | $y' = 2x + y$ | 0 | 1 | 0,2 | $[0;\ 1]$ |
| 1.26 | $y' = y^2 e^x - 2y$ | 0 | 1 | 0,2 | $[0;\ 1]$ |
| 1.27 | $y' = 1/(y^2 - x)$ | 1 | 0 | 0,2 | $[1;\ 2]$ |
| 1.28 | $y' = y + \cos x$ | 2 | 0 | 0,2 | $[2;\ 3]$ |
| 1.29 | $y' = 1 + xy^2$ | 0 | 0 | 0,1 | $[0;\ 1]$ |
| 1.30 | $y' = y - 2x/y$ | 0 | 1 | 0,2 | $[0;\ 1]$ |

2-тапсырма. $u(M) = u(x, y, z)$ функциясы және $M_1, M_2$ нүктелері берілсін. Осы функцияның $M_1$ нүктесінде $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойынша туындысын табыңыз.

| № | Тапсырма | | |
|---|---|---|---|
| | $u(M)$ | $M_1$ | $M_2$ |
| 2.1 | $x^2y + y^2z + z^2x$ | (1,-1,2) | (3,4,-1) |
| 2.2 | $5xy^3z^2$ | (2,1,-1) | (4,-3,0) |
| 2.3 | $\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ | (-1,2,1) | (3,1,-1) |
| 2.4 | $z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$ | (0,0,0) | (3,-4,2) |
| 2.5 | $\ln(xy + yz + xz)$ | (-2,3,-1) | (2,1,-3) |
| 2.6 | $\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ | (1,1,1) | (3,2,1) |
| 2.7 | $x^2y + xz^2 - 2$ | (1,1,1) | (2,-1,3) |
| 2.8 | $xe^y + ye^x - z^2$ | (3,0,-2) | (4,1,3) |
| 2.9 | $3xy^2 + z^2 - xyz$ | (1,2,2) | (3,-1,4) |
| 2.10 | $5x^2yz + xy^2z + yz^2$ | (1,1,1) | (9,-3,9) |
| 2.11 | $\dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ | (1,2,2) | (-3,2,-1) |
| 2.12 | $y^2z - 2xyz + z^2$ | (3,1,-1) | (-2,1,4) |
| 2.13 | $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ | (1,-1,2) | (5,-1,4) |
| 2.14 | $\ln(1 + x + y^2 + z^2)$ | (1,1,1) | (3,-5,1) |
| 2.15 | $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$ | (1,2,1) | (-3,-2,6) |
| 2.16 | $\ln(x^3 + y^3 + z + 1)$ | (1,3,0) | (-4,1,3) |
| 2.17 | $x - 2y + e^x$ | (-4,-5,0) | (2,3,4) |
| 2.18 | $x^4 - 3xyz$ | (2,2,-4) | (1,0,-3) |
| 2.19 | $3x^2y^3z$ | (-2,-3,1) | (5,-2,0) |
| 2.20 | $e^{xy+z^2}$ | (-5,0,2) | (2,4,-3) |
| 2.21 | $x^{yz}$ | (3,1,4) | (1,-1,-1) |
| 2.22 | $(x^2 + y^2 + z^2)^3$ | (1,2,-1) | (0,-1,3) |
| 2.23 | $(x + y)^z$ | (1,5,0) | (3,7,-2) |
| 2.24 | $x^2y + y^2z - 3z$ | (0,-2,-1) | (12,-5,0) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.25 | $\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ | (-1,2,-2) | (2,0,1) |

3-тапсырма. Берілген $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ векторлық өріс соленоидальді, потенциалды немесе гармоникалық болатындығын анықтаңыз.

| № | $\vec{a}(M)$ |
|---|---|
| 3.1 | $(\alpha-\beta)x\bar{i}+(\gamma-\alpha)y\bar{j}+(\beta-\gamma)z\bar{k}$ |
| 3.2 | $x^2y\bar{i}-2xy^2\bar{j}+2xyz\bar{k}$ |
| 3.3 | $(yz-2x)\bar{i}+(xz+2y)\bar{j}+xy\bar{k}$ |
| 3.4 | $(x^2-z^2)\bar{i}-3xy\bar{j}+(y^2+z^2)\bar{k}$ |
| 3.5 | $2xyz\bar{i}-y(yz+1)\bar{j}+z\bar{k}$ |
| 3.6 | $(2x-3y)\bar{i}+2xy\bar{j}-z^2k$ |
| 3.7 | $(x^2-y^2)\bar{i}+(y^2-z^2)\bar{j}+(z^2-x^2)\bar{k}$ |
| 3.8 | $yz\bar{i}+(x-y)\bar{j}+z^2\bar{k}$ |
| 3.9 | $(y+z)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(x+y)\bar{k}$ |
| 3.10 | $3x^2y\bar{i}-2xy^2\bar{j}-2xyz\bar{k}$ |
| 3.11 | $(x+y)\bar{i}-2(y+z)\bar{j}+(z-x)\bar{k}$ |
| 3.12 | $(yz-2x)\bar{i}+(xz+zy)\bar{j}+xy\bar{k}$ |
| 3.13 | $yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$ |
| 3.14 | $6xy\bar{i}+(3x^2-2y)\bar{j}+z\bar{k}$ |
| 3.15 | $(2x-yz)\bar{i}+(2x-xy)\bar{j}+yz\bar{k}$ |
| 3.16 | $(y-z)\bar{i}+3xyz\bar{j}+(z-x)\bar{k}$ |
| 3.17 | $(y-z)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(x^2-y^2)\bar{k}$ |
| 3.18 | $(x+y)\bar{i}-2xz\bar{j}-3(y+z)\bar{k}$ |
| 3.19 | $z^2\bar{i}+(xz+y)\bar{j}+x^2y\bar{k}$ |
| 3.20 | $xy(3x-4y)\bar{i}+x^2(x-4y)\bar{j}+3z^2\bar{k}$ |
| 3.21 | $6x^2i+3\cos(3x+2z)\bar{j}+\cos(3y+2z)\bar{k}$ |
| 3.22 | $(x+y)\bar{i}+(z-y)\bar{j}+2(x+z)\bar{k}$ |
| 3.23 | $3(x-z)\bar{i}+(x^2-y^2)\bar{j}+3z\bar{k}$ |
| 3.24 | $(2x-yz)\bar{i}+(xz-2y)\bar{j}+2xyz\bar{k}$ |
| 3.25 | $3x^2\bar{i}+4(x-y)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$ |

4-тапсырма. $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ векторлы өрістің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктеде жоғарғы циркулярлы тығыздығын табыңыз.

| № | $\vec{a}(M)$ | $M_0(x_0,y_0,z_0)$ |
|---|---|---|
| 4.1 | $x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ | (0,1,-2) |

| | | |
|---|---|---|
| 4.2 | $xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{j}+xz\vec{k}$ | (2,0,3) |
| 4.3 | $xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$ | (1,-2,0) |
| 4.4 | $xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k}$ | (3,0,1) |
| 4.5 | $xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$ | (-1,0,3) |
| 4.6 | $yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$ | (2,1,-1) |
| 4.7 | $y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k}$ | (-2,1,1) |
| 4.8 | $xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2z\vec{k}$ | (0,1,1) |
| 4.9 | $xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k}$ | (0,-2,1) |
| 4.10 | $xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k}$ | (0,1,2) |
| 4.11 | $y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ | (-1,2,1) |
| 4.12 | $xy\vec{i}-xy^2\vec{j}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ | (1,-1,1) |
| 4.13 | $(x+y)\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ | (2,1,0) |
| 4.14 | $xy\vec{i}-(y+z)\vec{j}+xz\vec{k}$ | (4,0,1) |
| 4.15 | $x\vec{i}-zy\vec{j}+x^2z\vec{k}$ | (-3,0,2) |
| 4.16 | $(x+y^2)\vec{i}+yz\vec{j}-x^2\vec{k}$ | (1,0,4) |
| 4.17 | $xz\vec{i}-y\vec{j}+yz\vec{k}$ | (0,-1,4) |
| 4.18 | $xy\vec{i}-x\vec{j}+yz\vec{k}$ | (2,2,2) |
| 4.19 | $(x+y)\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$ | (4,1,-3) |
| 4.20 | $(x-y)\vec{i}+yz\vec{j}-y\vec{k}$ | (-4,1,0) |
| 4.21 | $(y-z)\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$ | (3,0,1) |
| 4.22 | $yz\vec{i}-z^2\vec{j}+(x+y)z\vec{k}$ | (1,3,0) |
| 4.23 | $z^2\vec{i}-xz\vec{j}+z^2\vec{k}$ | (1,-2,1) |
| 4.24 | $xy\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$ | (0,0,1) |
| 4.25 | $xz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+x^2z\vec{k}$ | (1,1,-2) |

5-тапсырма. Бірінші октантта орналасқан (р) жазықтығының бір бөлігі бойынша $\vec{a}(M)$ векторлық өрісінің ағымын табыңыз (нормаль жазықтық Oz осімен тік бұрыш жасайды).

| № | $\vec{a}(M)$ | $(p)$ |
|---|---|---|
| 5.1 | $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ | $x+y+z=1$ |
| 5.2 | $y\vec{j}+z\vec{k}$ | $x+y+z=1$ |
| 5.3 | $2x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ | $x+y+z=1$ |
| 5.4 | $x\vec{i}+3y\vec{j}+2z\vec{k}$ | $x+y+z=1$ |
| 5.5 | $2x\vec{i}+3y\vec{j}$ | $x+y+z=1$ |
| 5.6 | $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ | $x+2y+2z=2$ |
| 5.7 | $x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k}$ | $x+2y+2z=2$ |
| 5.8 | $y\vec{j}+3z\vec{k}$ | $x+2y+2z=2$ |
| 5.9 | $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ | $6x+3y+2z=6$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5.10 | $2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ | $6x+3y+2z=6$ |
| 5.11 | $3x\bar{i}+2z\bar{k}$ | $6x+3y+2z=6$ |
| 5.12 | $2x\bar{i}+3y\bar{j}+z\bar{k}$ | $2x+6y+3z=6$ |
| 5.13 | $x\bar{i}+3y\bar{j}-z\bar{k}$ | $2x+6y+3z=6$ |
| 5.14 | $-2x\bar{i}+y\bar{j}+4z\bar{k}$ | $2x+6y+3z=6$ |
| 5.15 | $x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$ | $3x+2y+6z=6$ |
| 5.16 | $2x\bar{i}+5y\bar{j}+5z\bar{k}$ | $3x+2y+6z=6$ |
| 5.17 | $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ | $4x+y+2z=2$ |
| 5.18 | $2x\bar{i}+y\bar{j}-2z\bar{k}$ | $4x+y+2z=2$ |
| 5.19 | $x\bar{i}+y\bar{j}+2z\bar{k}$ | $4x+y+2z=2$ |
| 5.20 | $-x\bar{i}+y\bar{j}+12z\bar{k}$ | $4x+y+2z=2$ |
| 5.21 | $x\bar{i}+3y\bar{j}+8z\bar{k}$ | $2x+4y+z=2$ |
| 5.22 | $x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$ | $2x+4y+z=2$ |
| 5.23 | $x\bar{i}+2y\bar{j}+5z\bar{k}$ | $2x+4y+z=2$ |
| 5.24 | $x\bar{i}+4y\bar{j}+5z\bar{k}$ | $2x+4y+z=2$ |
| 5.25 | $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ | $2x+3y+z=1$ |

6-тапсырма. ($p$) жазықтығы мен координаттық жазықтықтардан құралған пирамиданың сырткы жағы бойынша $\vec{a}(M)$ векторлық өрістің ағымын есептеңіз. Остроградский-Гаусс формуласын қолданыңыз.

| № | $\vec{a}(M)$ | (p) |
|---|---|---|
| 6.1 | $(x+\cos zy)\bar{i}+2y\bar{j}+(3z-e^{x})\bar{k}$ | $x+y+2z=4$ |
| 6.2 | $(2x+e^{y})\bar{i}-(y+x^{z})\bar{j}+(4z+xy)\bar{k}$ | $x+2y+z=6$ |
| 6.3 | $(x-e^{zy})\bar{i}+(x^{z+1}+2y)\bar{j}-(z+x)\bar{k}$ | $2x+3y+z=6$ |
| 6.4 | $(3x-\sin y^{2})\bar{i}+(2y-z^{x})\bar{j}+(z-tgx)\bar{k}$ | $-x+2y+3z=6$ |
| 6.5 | $(2x+\cos yz)\bar{i}-(y-tgz)\bar{j}+2z\bar{k}$ | $x+2y+2z=4$ |
| 6.6 | $(x-\arcsin y)\bar{i}+(2y+\sin z)\bar{j}-(z+e^{x})\bar{k}$ | $x+y+z=1$ |
| 6.7 | $(4x+\sin y^{z})\bar{i}-(2y-ctgxz)\bar{j}-(z+xy)\bar{k}$ | $-x+y+3z=3$ |
| 6.8 | $(2x-\ln yz)\bar{i}+(y+\cos x)\bar{j}-(2z+x^{y})\bar{k}$ | $3x+y+z=6$ |
| 6.9 | $(x+tgy)\bar{i}+(2y+e^{x})\bar{j}-(z-\ln x)\bar{k}$ | $2x+y+z=4$ |
| 6.10 | $(3x-e^{yz})\bar{i}-(2y+\cos z)\bar{j}+(z-\sin y)\bar{k}$ | $x-y+2z=4$ |
| 6.11 | $(2x+\ln(y+1))\bar{i}+(2y-\cos z^{x})\bar{j}+(3-2z)\bar{k}$ | $-2x+3y+z=6$ |
| 6.12 | $(thz+x)\bar{i}-(\sin x+y)\bar{j}+(2z-y)\bar{k}$ | $x+y-z=1$ |
| 6.13 | $(\ln yz+2x)\bar{i}+(\cos z+y)\bar{j}+(y^{x}-z)\bar{k}$ | $x+2y-3z=6$ |
| 6.14 | $(3x-\ln y)\bar{i}+(e^{x}-2y)\bar{j}+(z-x\ln y)\bar{k}$ | $2x-y-z=4$ |
| 6.15 | $(tgz-x)\bar{i}+(e^{xz}+3y)\bar{j}+(\sin x-z)\bar{k}$ | $x+y-2z=2$ |
| 6.16 | $(x+ye^{z})\bar{i}+(x\ln x-y)\bar{j}+(2z+e^{x})\bar{k}$ | $-x+y+2z=3$ |
| 6.17 | $(\arcsin y-2x)\bar{i}+(3y+\sin z)\bar{j}+(z+1)\bar{k}$ | $x+y+3z=6$ |

| | | |
|---|---|---|
| 6.18 | $\left(e^{yz}+3x\right)\bar{i}-\left(2y+\cos zx\right)\bar{j}+\left(tgx+z\right)\bar{k}$ | $3x-2y+z=6$ |
| 6.19 | $\left(x-y\ln z\right)\bar{i}-\left(3\sin x-2y\right)\bar{j}+\left(e^{x}-z\right)\bar{k}$ | $2x+2y-z=4$ |
| 6.20 | $\left(ye^{z}-2x\right)\bar{i}+\left(3y-\sin z\right)\bar{j}+\left(tgxy+z\right)\bar{k}$ | $-3x+2y-z=6$ |
| 6.21 | $\left(e^{z}+x\right)\bar{i}-\left(x\ln z-2y\right)\bar{j}+\left(z-\sin x\right)\bar{k}$ | $2x-2y+z=4$ |
| 6.22 | $\left(\ln z+2x\right)\bar{i}+\left(e^{x}-y\right)\bar{j}+\left(tgy+z\right)\bar{k}$ | $x-y+3z=3$ |
| 6.23 | $\left(e^{y}+2x\right)\bar{i}-\left(x\ln z+2y\right)\bar{j}+\left(z+x\cos y\right)\bar{k}$ | $-2x+y+3z=6$ |
| 6.24 | $\left(arctgy+3x\right)\bar{i}-\left(2y+e^{x}\right)\bar{j}+\left(z-tgx\right)\bar{k}$ | $x+2y+z=4$ |
| 6.25 | $\left(2x-y\ln z\right)\bar{i}+\left(2y-e^{x}\right)\bar{j}+\left(z-\cos x\right)\bar{k}$ | $x-2y+3z=6$ |

7- тапсырма. $\vec{a}\left(M\right)$ векторлы өрісі потенциалды екенін көрсетіңіз, осы өрістің потенциалын табыңыз.

| № | $\vec{a}\left(M\right)$ |
|---|---|
| 7.1 | $3x^{2}e^{y}\bar{i}+\left(x^{3}e^{y}-1\right)\bar{j}$ |
| 7.2 | $\left(3x^{2}-2xy+y\right)\bar{i}+\left(x-x^{2}-3y^{2}-4y\right)\bar{j}$ |
| 7.3 | $\left(3x^{2}-2xy+y^{2}\right)\bar{i}+\left(2xy-x^{2}-3y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.4 | $\left(2xe^{x^{2}-y^{2}}-\sin x\right)\bar{i}+\left(\sin y-2ye^{x^{2}-y^{2}}\right)\bar{j}$ |
| 7.5 | $\left(20x^{2}-21x^{2}y+2y\right)\bar{i}+\left(3+2x-7x^{3}\right)\bar{j}$ |
| 7.6 | $\left(y-\sin x\right)\bar{i}+\left(x-2y\cos y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.7 | $\left(5y+\cos x+6xy^{2}\right)\bar{i}+\left(5x+6x^{2}y\right)\bar{j}$ |
| 7.8 | $\left(e^{x+y}-\cos x\right)\bar{i}+\left(e^{x+y}+\sin y\right)\bar{j}$ |
| 7.9 | $\left(2x-3y^{2}+1\right)\bar{i}+\left(2-6xy\right)\bar{j}$ |
| 7.10 | $\left(x^{2}-2y\right)\bar{i}+\left(y^{2}-2x\right)\bar{j}$ |
| 7.11 | $\left(3x^{2}+6x^{2}y+3xy^{2}\right)\bar{i}+\left(2x^{3}+3x^{2}y\right)\bar{j}$ |
| 7.12 | $xy^{2}\bar{i}+y\left(x^{2}+y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.13 | $2\left(3xy^{2}+2x^{3}\right)\bar{i}+3\left(2x^{2}y+y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.14 | $\left(x^{2}-4xy-2y^{2}\right)\bar{i}+\left(y^{2}-4xy-2x^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.15 | $\left(\cos\left(x^{2}+y^{2}\right)+\sin x\right)\bar{i}+2y\cos\left(x+y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.16 | $\left(5xy^{2}-x^{3}\right)\bar{i}+\left(5x^{2}y-y\right)\bar{j}$ |
| 7.17 | $xe^{y^{2}}\bar{i}+\left(x^{2}ye^{y^{2}}+tg^{2}y\right)\bar{j}$ |
| 7.18 | $\left(y^{3}+\cos x\right)\bar{i}+\left(3xy^{2}+e^{y}\right)\bar{j}$ |
| 7.19 | $e^{y}\bar{i}+\left(\cos y+xe^{y}\right)\bar{j}$ |
| 7.20 | $\left(3x^{2}+4y^{2}\right)\bar{i}+\left(8xy+e^{y}\right)\bar{j}$ |
| 7.21 | $\left(y^{2}+y\sec^{2}x\right)\bar{i}+\left(2xy+tgx\right)\bar{j}$ |
| 7.22 | $\left(3x^{2}y+2y+3\right)\bar{i}+\left(x^{3}+2x+3y^{2}\right)\bar{j}$ |
| 7.23 | $\left(\sin 2x-2\cos\left(x+y\right)\right)\bar{i}-2\cos\left(x+y\right)\bar{j}$ |
| 7.24 | $\left(2x-1-\frac{y}{x^{2}}\right)\bar{i}-\left(2y-\frac{1}{x}\right)\bar{j}$ |
| 7.25 | $\left(\frac{1}{x^{2}}+\frac{3y^{2}}{x^{4}}\right)\bar{i}-\frac{2y}{x^{3}}\bar{j}$ |

*Типтік нұсқаның шешуі*

1- тапсырма. Коши есебін сандық әдіспен шешу:

1) Эйлер әдісін қолданып, қадамы $h = 0{,}1$ болатын $y$ функциясының $y' = x + y$ дифференциалдық теңдеуі үшін $y(0) = 1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын 4 мәнін табыңыз.

2) Рунге-Кутта әдісі бойынша $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ дифференциалдық теңдеулердің $y(0)=1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын, $h=0{,}2$ қадамы бойынша [0,1] кесіндісінде сандық шешімдерін табыңыз.

Шешуі:

1) Эйлер әдісін қолданып, қадамы $h = 0{,}1$ болатын $y$ функциясының $y' = x + y$ дифференциалдық теңдеуі үшін $y(0) = 1$ бастапқы шартты қанағаттандыратын 4 мәнін табыңыз.

Бастапқы берілген шарт бойынша $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$ аргументтің келесі мәндерін табамыз:

$$x_0 = 0;$$
$$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0{,}1;$$
$$x_2 = x_0 + 2 \cdot h = 0{,}2;$$
$$x_3 = x_0 + 3 \cdot h = 0{,}3.$$

Сонда $y$ функциясының мәнін төмендегі формула арқылы табамыз:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 1{,}1$$
$$y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1{,}22$$
$$y_3 = y_2 + h(x_2 + y_2) = 1{,}36$$
$$y_4 = y_3 + h(x_3 + y_3) = 1{,}52$$

Жауабы:

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1,1 | 1,22 | 1,36 | 1,52 |

2) Рунге-Кутта әдісі. Бұл әдіс бойынша $x_{i+1} = x_i + k$ нүктесінде $y_{i+1}$ -нің жуық есептеулері төмендегі формула бойынша алынады.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \dfrac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \end{cases}$$

мұндағы

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),$$
$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

Есептің шарты бойынша $x_0 = 0,\ y_0 = 1$

Егер $i = 0$: $K_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}\right) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2$,

$$K_2^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} - \frac{2 \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}2 \cdot \left[1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right] = 0{,}1836,$$

$$K_3^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} - \frac{2 \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}1817\ ,$$

$$K_4^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + K_3^{(0)} - \frac{2 \cdot (x_0 + h)}{y_0 + K_3^{(0)}}\right] = 0{,}1686\ .$$

Онда

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832 \qquad x_1 = 0{,}2.$$

Егер $i = 1$: $x_1 = 0{,}2;\ y_1 = 1{,}1832$ .

$$K_1^{(1)} = 0{,}2 \cdot \left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}\right) = 0{,}1690,$$

$$K_2^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)}{y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}}\right] = 0{,}1589\ ,$$

$$K_3^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)}{y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}}\right] = 0{,}1575\ ,$$

$$K_4^{(1)} = 0{,}2\left[y_1 + K_3^{(1)} - \frac{2(x_1 + h)}{x_1 + K_3^{(1)}}\right] = 0{,}1488.$$

Осыдан

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0{,}1690 + 2 \cdot 0{,}1589 + 2 \cdot 0{,}1575 + 0{,}1488) = 0{,}1584,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1832 + 0{,}1584 = 1{,}3416 \qquad x_2 = 0{,}4.$$

Осы жолмен $x_{3,}\, x_4,\, x_5$ мәндерін және оларға сәйкес $y_{3,}\, y_4,\, y_5$ функциясының мәндерін табамыз.

2- тапсырма. $u(M)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциясы және $M_1$(-2; 3; 6), $M_2$(-1; 1; 4) нүктелері берілсін. Осы функцияның $M_1$ нүктесінде $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойынша туындысын табыңыз.

Шешуі:

$\vec{a}$ векторының бағыты бойынша *u(M)* функциясының туындысы төмендегі формула бойынша табылады. Мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - бірлік векторының координаталары болатын $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыттаушы косинустары

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}.$$

Жазылған формуланың компоненттерін табайық:

$$u'_x(M_1)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{-2}{\sqrt{4+9+36}}=-\frac{2}{7}\ ;$$

$$u'_y(M_1)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{3}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{3}{7};$$

$$u'_z(M_1)=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{6}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{6}{7};$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1-(-2);1-3;4-6\}=\{1;-2;-2\}\ ;\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+4+4}=3;$$

$$\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{-2}{3}\right\}.$$

Осыдан $u'_{\vec{a}}(M_1)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)=-\frac{20}{21}$ аламыз.

Жауабы: $-\frac{20}{21}$.

3-тапсырма. $\vec{a}(M)=(2xy+z)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$ векторлық өрісі соленоидальді, потенциалды немесе гармоникалық болатындығын анықтаңыз.

Шешуі:

$\vec{a}(M)$ векторлық өрісі *соленоидальді* деп аталады, егер оның әрбір нүктесінде $div\,\vec{a}(M)=0$ болса. $\vec{a}(M)$ өрісі *потенциалды* деп аталады, егер

оның әрбір нүктесінде $rot\,\vec{a}(M)=0$ болса. Өріс бір уақытта соленоидальді және потенциалды болса, онда *гармоникалық* деп аталыды.

$div\,\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2y-2+0=2y-2\neq 0$, демек, $\vec{a}(M)$ өріс соленоидальді емес.

$$rot\vec{a}(M)=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(x)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2-2y}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x^2-2y)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+z}{\partial y}\right)\vec{k}=(0-0)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0.$$

Демек, өріс потенциалды.

Жауабы: $\vec{a}(M)$ өрісі потенциалды болғанымен соленоидальді емес. Сондықтан гармоникалық деп айта алмаймыз.

4- тапсырма. $\vec{a}(M)=xy^2z^2\vec{i}+x^2yz^2\vec{j}+xyz\vec{k}$ векторлық өрістің $M_0(1;2;1)$ нүктеде жоғарғы циркулярлы тығыздығын табыңыз.

Шешуі:

Векторлық өрістің $M_0$ нүктесінде жоғары циркулярлы тығыздыққа ротордың бағытында жетеді және саны оның модуліне тең.

$$rot\,\vec{a}(M)=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x}-\frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y}\right)\vec{k}=(xz-2x^2yz)\vec{i}-$$

$$-(yz-2xy^2z)\vec{j}+(2xyz^2-2xyz^2)\vec{k}=(xz-2x^2yz)\vec{i}+(2xy^2z-yz)\vec{j}.$$

$$rot\,\vec{a}(M_0)=-3\vec{i}+6\vec{j}\ ,$$

$$\left|rot\,\vec{a}(M_0)\right|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}\ .$$

Жауабы: жоғары циркулярлы тығыздыққа $rot\,\vec{a}(M_0)=-3\vec{i}+6\vec{j}$ бағытында жетеді және $3\sqrt{5}$ тең.

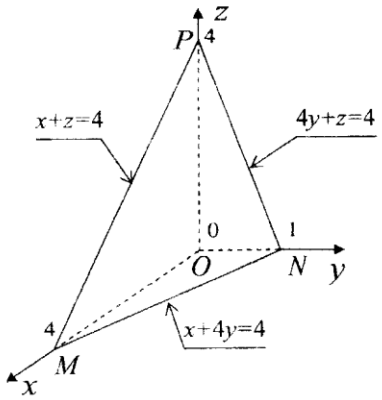
5- тапсырма. Бірінші октантта орналасқан $x+4y+z=4$ теңдеуімен берілген (р) жазықтығының бір бөлігі бойынша

$\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k}$ векторлық өрісінің ағымын табыңыз (нормаль жазықтық Oz осімен тік бұрыш жасайды).

Шешімі:

($p$) жазықтығының теңдеуін кесіндідегі теңдеу түріне келтірейік: $\frac{x}{4}+y+\frac{z}{4}=1$.

Сызбасын томенде көрсетілген.




$S$ – $\Delta MNP$

$S_{yz}$ – $\Delta NOP$

$S_{xz}$ – $\Delta POM$

$S_{xy}$ – $\Delta MON$

- $S$ координаттар жазықтығында проекциясы. Өрістің ағымы есептелетін жазықтықтың бір бөлігі $S$ арқылы берілген ($\Delta$MNP), $M(4;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;4)$ - үшбұрыштың төбелерінің координаталары.

1 сурет

$x+4y+z=4$ жазықтығына нормаль болатын $\vec{n}$ бірлік векторының координаталары $\vec{n}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)=\vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{17}};\frac{4}{\sqrt{17}};\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{17}}>0$, $\gamma$ – $Oz$ осімен сүйір бұрыш жасайды, сондықтан ағым $\Delta MNP$ –нің сырт жағынан өтеді.

Ағымның анықтамасынан:

$$\Pi=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint_S (2z-x)dydz+(x+2z)dxdz+3zdxdy=$$

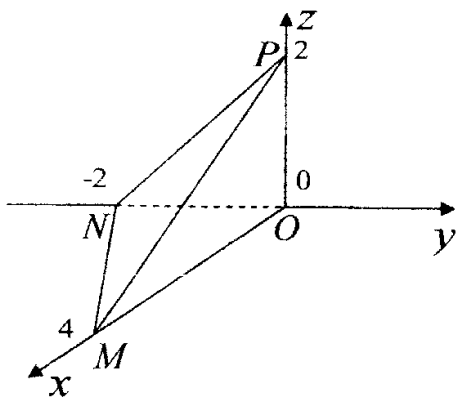
$$\iint_S (2z-(4-4y-z))dydz+(x+2z)dxdz+3(4-x-4y)dxdy=$$

$$\iint_{S_{yz}} (3z+4y-4)dydz+\iint_{S_{xz}} (x+2z)dxdz+3\iint_{S_{xy}} (4-x-4y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{4-4y}(3z+4y-4)dz+\int_0^4 dz\int_0^{4-z}(x+2z)dx+3\int_0^4 dx\int_0^{4-z}(4-x-4y)dy=42\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $\Pi=42\frac{2}{3}$.

6-тапсырма. $p$): $x-2y+2z=4$ жазықтығы мен координаттық жазықтықтардан құралған пирамиданың сырткы жағы бойынша $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+z\vec{k}$ векторлық өрістің ағымын есептеңіз. Остроградский-Гаусс формуласын қолданыңыз.




2 сурет

Шешуі:

$(p)$: $x-2y+2z=4$ $\rightarrow$ $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ ,

пирамиданың төбелерінің координаталары:

$M(4;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;2)$.

Пирамиданың толық бетінің тұйық болғандықтан Остроградский-Гаусс формуласын қолданамыз:

$$\Pi=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdydz.$$

Мұндағы
$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(x+z)}{\partial x}=1;$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(2y-x)}{\partial y}=2;$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial(z)}{\partial x}=1.$$

Осыдан, $\Pi=\iiint\limits_V(1+2+1)dxdydz=4\iiint\limits_V dxdydz.$

*MNPO* тік бұрышты пирамиданың көлемі $\iiint\limits_V dxdydz$ интегралы арқылы есептеледі.

$$\Pi=4\iiint\limits_V dxdydz=4\cdot\frac{1}{6}\cdot2\cdot2\cdot4=\frac{32}{3}.$$

Жауабы: $\Pi=\frac{32}{3}$.

7-тапсырма.

$$\vec{a}=\left(2xy+3y^2+9y\right)\vec{i}+\left(x^2+6xy+9x\right)\vec{j}.$$

Векторлы өрісі потенциалды екенін және оның потенциалын есептеңіз.

Шешуі:

Потенциальды өрісте ротор нөлге тең болу керек. Тексерейік:

$$rot\,\vec{a}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+3y^2+9y & x^2+6xy+9x & 0\end{pmatrix}=(0-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+$$

$$=\left(2x+6y-(2x+6y)\right)\vec{k}=0.$$

Осыдан, $\vec{a}$ өрісі потенциальды. $u = u(x;y)$ потенциалы төмендегі формула бойынша есептеледі:

$$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)dy + C.$$

$(x_0;\mathrm{y}_0)$ бастапқы нүкте ретінде $(0;0)$ аламыз.

$$u(x;y) = \int_{0}^{x} (2x \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot 0)dx + \int_{0}^{y} \left(x^2 + 6xy + 9x\right)dy + C = x^2 y + 3xy^2 + 9xy + \mathrm{C}.$$

Жауабы: $u(x;y) = x^2 y + 3xy^2 + 9xy + \mathrm{C}$.

## Әдебиеттер тізімі

1 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч. II. - М: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. - 416 с.

2 Ким Р.Е. Математика 2. Элементы теории поля. Методические указания и задания к расчетно-графической работе (для студентов очной формы обучения специальности 050718 – Электроэнергетика). – Алматы: АИЭС, 2005. – 31 с.

3 Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (полный курс). –Алматы: NSN-Company, 2009. -429 с.

4 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 4 частях. /А.П. Рябушко, В.В. Бархатов и др. /Под ред. А.П. Рябушко. –Минск: Вышэйшая школа, 2007. Ч.3, Ч.4. -356 с.

5 Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Учебники для вузов. -Изд.: Лань., 2005, -128 с.

6 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). –М.: Айрис пресс, 2005, 1,2 – курсы.

2016 ж. жиынтық жоспары, реті 137

Искакова Акжолтай Курмантаевна
Бексултанова Алтынай Молыбаевна

ЕСЕПТІК ӘДІС ЖӘНЕ ОЛАРДЫ КОМПЬЮТЕРМЕН ІСКЕ АСЫРУ

5В071800 – Электрэнергетика мамандығының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Редактор Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.К.Молдабекова

Басуға «___» _____ қол қойылды Пішімі 60х84 1/16
Таралымы 15 дана Баспаханалық қағаз №2
Көлемі 1,5 баспа табақ Тапсырыс Бағасы 250тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірмелі-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126