Некоммерческое
Акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика

Алматы 2016

СОСТАВИТЕЛИ: А.К.Искакова, А.М.Бексултанова. Численные методы и их компьютерная реализация**.** Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 5В071800 - Электроэнергетика.-Алматы: АУЭС, 2016. – 26с.

Представлены методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ №1 и №1 дисциплины «Численные методы и их компьютерная реализация» для студентов специальности5В071800 «Электроэнергетика». Представленный материал соответствует дисциплине «Численные методы и их компьютерная реализация», предусмотренного учебными планами для студентов указанной специальности.

Приведены основные теоретические вопросы, дано решение типового варианта действующих заданий.

Табл. 12, черт. 2.

Рецензент: канд.тех.наук, профессор Ибраева Л.К.

Печатается по плану издания Некоммерческого акционерного общества «Алматинского университета энергетики и связи» на 2016 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2016 г.

Введение

Значительную роль в профессиональной подготовке инженера отводится алгоритмической линии, которая предполагает решение задач на построение и конструирование определенных алгоритмов; доведение методов решения определенных типов задач до алгоритмов, рассмотрение основных этапов решения задач, целенаправленное формирование обобщенных умений решать задачи, эффективно использовать межпредметные связи, более полно реализовать принцип системности обучения.

Цель данной работы – приобретение практических навыков решения дифференциальных уравнений для их применения при решении различных прикладных задач в рамках специальности и смежных областях.

Расчетно-графические работы составлены в соответствии с программой вновь введенного специального курса «Численные методы и их компьютерная реализация». Задания составлены по модулям численные методы решения дифференциальных уравнений, решение дифференциальных уравнений операционными методами, элементы теории поля, их применениям к решению линейных дифференциальных уравнений. Изучаемый материал направлен на формирование у студентов практических навыков по использованию современных математических методов, с целью научить применять теоретические математические знания в разных направлениях профессиональной деятельности.

Компьютерная реализация программного материала предусмотрена в лабораторных работах с помощью системы компьютерной математики Mathcad – программного средства для осуществления численных, аналитических и графических методов решения математических задач на компьютере.

Программа дисциплины «Численные методы и их компьютерная реализация» структурирована в соответствии с действующими учебными планами АУЭС в виде модулей (разделов математики) – укрупненных дидактических единиц с завершающим рубежным контролем в контрольной работы. Все студенты изучают 2 модуля, что соответствует общему количеству кредитов, выделенных в учебных планах.

В расчетно-графической работе решение задач должно быть кратким и, в то же время, достаточно объяснено ссылками на теорию. Примером для оформления может служить решение типового варианта.

РГР выполняются в отдельной тонкой тетради, в номере каждого задания вторая цифра указывает на вариант.

РГР №1. Модуль 1. Операционное исчисление. Решение дифференциальных уравнений операционными методами

Цель: на основании изучаемого материала студент должен усвоить понятия - оригинала и изображения Лапласа, основные свойства оригиналов и изображений, основные табличные формулы преобразования Лапласа, а также сформировать понимание возможностей для принципиально нового метода решения дифференциальных уравнений и области применения операционного исчисления.

Теоретические вопросы:

1) Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения [1, 3, 5, 6, 10].

2) Теоремы линейности, подобия, смещения, запаздывания [1, 3, 5, 6, 10].

3) Теоремы дифференцирования и интегрирования оригиналов и изображений[1, 3, 5, 6, 10].

4) Свертка функций. Теорема умножения изображений. Формулы Дюамеля [1, 3, 5, 6, 10].

5) Теорема обращения. Нахождение оригинала по известному изображению [1, 3, 5, 6, 10].

6) Применение преобразования Лапласа при решении дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений [1, 3, 5, 6, 10].

Расчетные задания.

Задание 1. Найти изображение функции, пользуясь теоремами линейности, подобия, смещения, запаздывания.

№	а) $f(t)$	б) $f(t)$	в) $f(t)$	г) $f(t)$
1.1	$t-3e^{2t}-\sin 3t$	$e^{-3t}\cos t$	$(t-1)ch(t-1)$	$\sin t\cdot\sin 3t$
1.2	$2+3t^3-5\cos 2t$	$e^{2t}\sin 5t$	$(t-2)e^{(t-2)}$	$\cos t\cdot\cos 2t$
1.3	$t^3+4e^{-3t}-ch\sqrt{5}t$	$3e^{4t}sh3t$	$\cos^2(t-1)$	$\sin t\cdot\cos 3t$
1.4	$3+2t^5+\cos\sqrt{2}t$	$e^{-3t}ch2t$	$\sin^2(t-1)$	$sht\cdot cht$
1.5	$t^3-\sin\sqrt{2}t+e^{4t}$	$2e^{4t}\cos 3t$	$(t-1)e^{(t-1)}$	$e^{3t}\cdot\sin^2 t$
1.6	$3+ch3t-4\sin 4t$	$3e^{-t}\sin 2t$	$(t-2)ch(t-2)$	$e^{-t}\cdot\cos^2 t$
1.7	$t-sh\sqrt{3}t-2e^{-4t}$	$e^{7t}sht$	$(t-5)^7$	$\sin t\cdot ch3t$
1.8	$t^2-e^{-2t}-\sin 2t$	$e^{-4t}ch5t$	$(t-3)\sin 2(t-3)$	$\cos t\cdot sh2t$
1.9	$7-e^{4t}+\sqrt{6}\cdot t^5$	$e^{-3t}t^7$	$(t-2)e^{3(t-2)}$	$ch2t\cdot sh3t$
1.10	$t^2-\sin 3t-e^{-5t}$	$e^{2t}\cos 4t$	$(t-2)\cos 2(t-2)$	$\sin 2t\cdot\sin 5t$
1.11	$1+4t^7-\sin 7t$	$2e^{-3t}\sin\sqrt{2}t$	$(t-3)sh(t-3)$	$\cos 2t\cdot\cos 3t$
1.12	$t^7+2\cos\sqrt{5}t+2e^{6t}$	$e^{-2t}sh3t$	$(t-1)^6$	$\sin 4t\cdot\cos 2t$
1.13	$5+2sh7t-\cos 4t$	$2e^{-3t}ch2t$	$(t-3)ch(t-3)$	$sh2t\cdot ch3t$

1.14	$t^2+3ch\sqrt{3}t+4e^{-2t}$	$e^{-3t}t^7$	$(t-1)e^{2(t-1)}$	$e^{-2t}\cdot\sin^2 t$
1.15	$6+e^{-7t}+4\sin 5t$	$3e^{-4t}\cos 2t$	$(t-3)\cos 3(t-3)$	$e^{-3t}\cdot\cos^2 t$
1.16	$\cos 9t-4e^{-t}+3$	$e^{4t}\sin 3t$	$(t-1)\sin 2(t-1)$	$\sin 2t\cdot cht$
1.17	$\sin 9t-t-\cos 3t$	$-e^{-t}sh2t$	$(t-7)sh(t-7)$	$\cos 2t\cdot sh3t$
1.18	$2-cht-3\sin 3t$	$3e^{4t}cht$	$(t-5)^4$	$\sin 4t\cdot\sin 6t$
1.19	$e^{6t}+5-4t^7$	$4e^{2t}t^6$	$(t-6)ch(t-6)$	$\cos t\cdot\cos 6t$
1.20	$8t^3+5e^{-6t}+sh3t$	$e^{6t}\cos 3t$	$(t-5)e^{3(t-5)}$	$\sin 3t\cdot\cos 5t$
1.21	$t-sh\sqrt{3}t-2e^{-4t}$	$e^{-2t}\sin 4t$	$(t-6)\cos(t-6)$	$sh3t\cdot ch4t$
1.22	$7+\sin\sqrt{2}t-2\cos\sqrt{2}t$	$3e^{2t}sh4t$	$(t-4)\sin 3(t-4)$	$e^{3t}\cdot\sin^2 t$
1.23	$t^7+2\sin\sqrt{3}t-e^{3t}$	$e^{-t}ch5t$	$\cos^2(t-3)$	$e^{4t}\cdot\cos^2 t$
1.24	$\cos\sqrt{5}t+t^2+7$	$3e^{-2t}t^3$	$\sin^2(t-3)$	$\sin 3t\cdot ch2t$
1.25	$sh\sqrt{2}t+e^{5t}-\cos 7t$	$e^{-3t}\sin 4t$	$(t-1)sh2(t-1)$	$\cos 4t\cdot sh5t$
1.26	$3-e^{-4t}+\sin 9t$	$2e^{5t}\cos 3t$	$(t-8)^7$	$\sin 8t\cdot\sin 2t$
1.27	$\sin 5t+\cos 2t-t^{11}$	$3e^{-2t}sh3t$	$(t-2)ch4(t-2)$	$\cos 4t\cdot\cos 3t$
1.28	$ch5t+e^{-3t}-5t^4$	$e^{-t}ch4t$	$(t-9)e^{2(t-9)}$	$\sin 5t\cdot\cos 2t$
1.29	$\sin\sqrt{7}t+\cos t-e^{-2t}$	$5e^{6t}t^2$	$(t-2)\cos 3(t-2)$	$sh4t\cdot ch6t$
1.30	$3-\sin 2t+3t^5$	$7e^{-8t}\cos 4t$	$(t-8)\sin(t-8)$	$ch^2 2t$

Задание 2. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)$

№	$F(p)$	№	$F(p)$	№	$F(p)$
2.1	$\frac{1}{(p+1)(p-2)}$	2.2	$\frac{2}{p(p-1)}$	2.3	$\frac{1}{p(p^2-4)}$
2.4	$\frac{2}{p^2-4}$	2.5	$\frac{1}{p(p+2)}$	2.6	$\frac{p}{(p+1)(p^2-9)}$
2.7	$\frac{3p}{(p+1)(p+9)}$	2.8	$\frac{1}{(p+3)(p+4)}$	2.9	$\frac{p}{(p+1)(p^2-16)}$
2.10	$\frac{2}{(p-1)(p-2)}$	2.11	$\frac{1}{(p+1)(p^2-4)}$	2.12	$\frac{1}{p^2-9}$
2.13	$\frac{2}{p(p^2+3)}$	2.14	$\frac{p}{(p+2)(p^2+4)}$	2.15	$\frac{1}{(p+5)(p+7)}$
2.16	$\frac{1}{p(p-1)}$	2.17	$\frac{2p}{(p+1)(p^2+25)}$	2.18	$\frac{1}{p(p^2+16)}$
2.19	$\frac{5}{(p+4)(p-5)}$	2.20	$\frac{p^2}{(p^2+9)^2}$	2.21	$\frac{1}{(p+2)(p-6)}$
2.22	$\frac{1}{p(p-1)}$	2.23	$\frac{1}{(p+1)(p+2)}$	2.24	$\frac{1}{(p-3)(p-2)}$
2.25	$\frac{1}{p(p+5)}$	2.26	$\frac{2}{p(p^2+4)}$	2.27	$\frac{1}{p(p^2+36)}$

2.28	$\frac{1}{p(p+6)}$	2.29	$\frac{1}{(p+3)(p+7)}$	2.30	$\frac{1}{(p-3)(p-1)}$

Задание 3. Найти оригинал по заданному изображению.

№	$F(p)$	№	$F(p)$
3.1	$\frac{p+1}{p^3(p^2+3p+4)}$	3.2	$\frac{2p+1}{p^2(p^2-2p+1)}$
3.3	$\frac{1}{p^3(p+2p+1)}$	3.4	$\frac{3p+1}{p^2(p^2+1)}$
3.5	$\frac{p+1}{p^3(p^2+4p+4)}$	3.6	$\frac{2p+1}{p^2(p^2+3)}$
3.7	$\frac{p-1}{p^3(p+2)}$	3.8	$\frac{3p+2}{p^2(p^2+3p+1)}$
3.9	$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)^2}$	3.10	$\frac{p+3}{(p+1)^2(p+2)^2}$
3.11	$\frac{p^2+2}{(p+4)^2(p+6)}$	3.12	$\frac{p-1}{p^2(p-2)}$
3.13	$\frac{p+1}{(p^2+2)^2 p}$	3.14	$\frac{2p-1}{p(p^2+1)}$
3.15	$\frac{p-1}{p^2(2p+2)}$	3.16	$\frac{p-1}{p^2(p^2-4)}$
3.17	$\frac{p+5}{p^2(p^2-2p+5)}$	3.18	$\frac{3p+1}{p^2(p^2+1)}$
3.19	$\frac{1-p}{p^2(p^2+3p+3)}$	3.20	$\frac{2-3p}{p^2(p^2-4p+5)}$
3.21	$\frac{2p+3}{p^2(p^2-p+1)}$	3.22	$\frac{2p}{(p+1)^2(p^2+9)}$
3.23	$\frac{2p+1}{p^2(p^2+1)}$	3.24	$\frac{3}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}$
3.25	$\frac{1}{p(p^3+2p^2+2p)}$	3.26	$\frac{4p+1}{p^2(p^2+3)}$
3.27	$\frac{3p}{p^3-8}$	3.28	$\frac{p+1}{p^2(p-2)(p-3)}$
3.29	$\frac{3p-1}{p^2(p^2+9)}$	3.30	$\frac{3p}{(p+1)^2(p+3)}$

Задание 4. Методом операционного исчисления решить задачу Коши.

4.1	$y''+y=2\cos t,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=-1$	4.2	$y''-2y'+5y=1-t,\ \ y(0)=y'(0)=0$
4.3	$y''-y'=te^t,\ \ y(0)=y'(0)=0$	4.4	$y''+2y'+y=t^2,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0$

4.5	$y''+4y=t,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$	4.6	$y''+3y'=20e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=7$
4.7	$y''+y'=sht,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$	4.8	$y''+2y'=2+e^{t},\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$
4.9	$y''-2y'-y=e^{3t},\quad y(0)=y'(0)=0$	4.10	$y''+2y'=t\sin t,\ y(0)=y'(0)=0$
4.11	$y''+y'=\cos t,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$	4.12	$y''+y=2\sin t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$
4.13	$y''+y=e^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=2$	4.14	$y''+y'+y=t^2+t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-3$
4.15	$y''+6y'+9y=9e^{3t},\ y(0)=y'(0)=0$	4.16	$y''-y'+y=e^{-t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
4.17	$y''+y=\sin t+\cos 2t, y(0)=y'(0)=1$	4.18	$y''+y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1$
4.19	$y''-2y'+2y=1,\quad y(0)=y'(0)=0$	4.20	$y''-2y'+y=t-\sin t,\ y(0)=y'(0)=0$
4.21	$y''-9y=2-t,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$	4.22	$y''+5y'+4y=e^{-t},\ y(0)=0,\ y'(0)=2$
4.23	$2y''-y=\sin 3t,\ y(0)=-2,\ y'(0)=1$	4.24	$y''+4y'+4y=t^3e^{2t}, y(0)=1, y'(0)=2$
4.25	$y''-2y'-3y=2t,\ y(0)=y'(0)=1$	4.26	$y''+y=6e^{-t},\ y(0)=3,\ y'(0)=1$
4.27	$y''-y'-6y=e^{-t}, y(0)=1,\ y'(0)=0$	4.28	$y''+4y=(8t+4)e^{2t}, y(0)=4, y'(0)=-1$
4.29	$y''-2y'=e^{t}(t^2+t-3),$ $y(0)=y'(0)=2$	4.30	$y''-y=4\sin t+5\cos 2t,$ $y(0)=-1, y'(0)=-2$

Задание 5. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом.

5.1	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+2,\ x(0)=1\\ \dot{y}=3x,\ y(0)=0\end{cases}$	5.2	$\begin{cases}\dot{x}=y-1,\ x(0)=1\\ \dot{y}=-x-2y,\ y(0)=-1\end{cases}$
5.3	$\begin{cases}\dot{x}=3x+4y,\ x(0)=1\\ \dot{y}=4x-3y,\ y(0)=1\end{cases}$	5.4	$\begin{cases}\dot{x}=y+3,\ x(0)=1\\ \dot{y}=x+2,\ y(0)=0\end{cases}$
5.5	$\begin{cases}\dot{x}=y-1,\ x(0)=1\\ \dot{y}=-x+2,\ y(0)=0\end{cases}$	5.6	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y,\ x(0)=0\\ \dot{y}=3x,\ y(0)=1\end{cases}$
5.7	$\begin{cases}\dot{x}=3y,\ x(0)=2\\ \dot{y}=3x+1,\ y(0)=0\end{cases}$	5.8	$\begin{cases}\dot{x}=x+2y+1,\ x(0)=0\\ \dot{y}=4x-y,\ y(0)=1\end{cases}$
5.9	$\begin{cases}\dot{x}=3x+5y+2,\ x(0)=0\\ \dot{y}=3x+y+1,\ y(0)=2\end{cases}$	5.10	$\begin{cases}\dot{x}=3y+2,\ x(0)=-1\\ \dot{y}=x+2y,\ y(0)=1\end{cases}$
5.11	$\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+1,\ x(0)=1\\ \dot{y}=x+y,\ y(0)=2\end{cases}$	5.12	$\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\ x(0)=1\\ \dot{y}=x-y,\ y(0)=0\end{cases}$
5.13	$\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2,\ x(0)=0\\ \dot{y}=4y+1,\ y(0)=1\end{cases}$	5.14	$\begin{cases}\dot{x}=x+4y,\ x(0)=1\\ \dot{y}=2x-y+9,\ y(0)=0\end{cases}$
5.15	$\begin{cases}\dot{x}=x+y,\ x(0)=1\\ \dot{y}=4x+y+1,\ y(0)=0\end{cases}$	5.16	$\begin{cases}\dot{x}=2y,\ x(0)=2\\ \dot{y}=2x,\ y(0)=2\end{cases}$
5.17	$\begin{cases}\dot{x}=2x+2y,\ x(0)=3\\ \dot{y}=-4x,\ y(0)=1\end{cases}$	5.18	$\begin{cases}\dot{x}=2y+1,\ x(0)=-1\\ \dot{y}=2x+3,\ y(0)=0\end{cases}$

5.19	$\begin{cases}\dot{x}=x+4y+1, & x(0)=0\\ \dot{y}=2x+3y, & y(0)=1\end{cases}$	5.20	$\begin{cases}\dot{x}=-3x-4y+1, & x(0)=-1\\ \dot{y}=4x-2y, & y(0)=0\end{cases}$
5.21	$\begin{cases}\dot{x}=x+y+1, & x(0)=0\\ \dot{y}=4x-y, & y(0)=1\end{cases}$	5.22	$\begin{cases}\dot{x}=-y, & x(0)=1\\ \dot{y}=2x+2y, & y(0)=1\end{cases}$
5.23	$\begin{cases}\dot{x}=x+2y, & x(0)=0\\ \dot{y}=2x+y+1, & y(0)=5\end{cases}$	5.24	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+6y+1, & x(0)=0\\ \dot{y}=2x+2, & y(0)=1\end{cases}$
5.25	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y, & x(0)=0\\ \dot{y}=3x, & y(0)=1\end{cases}$	5.26	$\begin{cases}\dot{x}=-2x-2y, & x(0)=3\\ \dot{y}=-4x, & y(0)=1\end{cases}$
5.27	$\begin{cases}\dot{x}=x+2y, & x(0)=0\\ \dot{y}=x-y+1, & y(0)=1\end{cases}$	5.28	$\begin{cases}\dot{x}=3x+2y, & x(0)=0\\ \dot{y}=x-y, & y(0)=1\end{cases}$
5.29	$\begin{cases}\dot{x}=2y, & x(0)=2\\ \dot{y}=2x+3y+1, & y(0)=1\end{cases}$	5.30	$\begin{cases}\dot{x}=2x+8y+1, & x(0)=2\\ \dot{y}=3x+4y, & y(0)=1\end{cases}$

Решение типового варианта.

Задание 1. Найти изображение функции, пользуясь теоремами линейности, подобия, смещения, запаздывания:

а) $3+6e^{5t}+t^7$, б) $e^{5t}\cos 3t$, в) $(t-4)^5$, г) $\sin 7t\cdot\sin 5t$.

Решение:

а) используя таблицу 1 и теорему линейности, имеем:

$$f(t)=3+6e^{5t}+t^7 \div \frac{3}{p}+\frac{6}{p-5}+\frac{7!}{p^8}=F(p);$$

б) по таблице соответствия: $\cos 3t \div \dfrac{p}{p^2+9}$ и по теореме смещения:

$$e^{5t}\cos 3t \div \frac{p-5}{(p-5)^2+9};$$

в) по таблице $t^5 \div \dfrac{5!}{p^6}$ и по теореме запаздывания имеем:

$$(t-4)^5 \div \frac{5!}{p^6}\cdot e^{-5p};$$

г) преобразуем данную функцию: $\sin 7t\cdot\sin 5t=\dfrac{1}{2}(\cos 2t-\cos 12t)$. Теперь, используя таблицу 1 и теорему линейности, имеем:

$$\sin 7t\cdot\sin 5t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 12t)\div\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+144};$$

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{72}{p(p^2+144)}.$$

Задание 2. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p+5)}$.

Решение: разложим дробно-рациональную функцию на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{(p-2)(p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+5};$$

$$A(p+5)+B(p-2)=1.$$

При $p=2$ получим $1=7A \;\to A=\dfrac{1}{7}$;

при $p=-5$ получим $1=-7B \;\to B=-\dfrac{1}{7}$, отсюда

$$\frac{1}{(p-2)(p+5)}=\frac{1}{7}\frac{1}{p-2}-\frac{1}{7}\frac{1}{p+5}\div\frac{1}{7}e^{2t}-\frac{1}{7}e^{-5t}=\frac{1}{7}e^{2t}\left(1-e^{-7t}\right).$$

Задание 3. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-2)(p^2+p+1)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+36)}$.

Решение:

а) разложим дробно-рациональную функцию на сумму простых дробей:

$$F(p)=\frac{p^2}{(p-2)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1};$$

$$p^2=A(p^2+p+1)+(Bp+C)(p-2).$$

При $p=2$ имеем $4=7A \;\to A=\dfrac{4}{7}$;

при p^2 имеем: $1=A+B \;\to B=\dfrac{3}{7}$;

при p^0 имеем: $0=A-2C \;\to C=\dfrac{2}{7}$.

Таким образом,

$$F(p)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3p+2}{p^2+p+1}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{p+\frac{2}{3}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Итак, искомый оригинал $f(t)=\frac{4}{7}e^{2t}+\frac{3}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{7\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$;

б) разложим дробно-рациональную функцию на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{p(p^2+36)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+36}.$$

$A(p^2+36)+Bp^2+Cp=1$.

$p^0:\ \ 36A=1\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{36}$;

$p^1:\ \ C=0$;

$p^2:\ \ A+B=0\ \Rightarrow\ B=-\frac{1}{36}$.

Тогда

$$\frac{1}{p(p^2+36)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2+36}.$$

Оригинал функции имеет вид:

$$\frac{1}{p\left(p^2+36\right)}=\frac{1}{36}\frac{1}{p}-\frac{1}{36}\frac{p}{p^2+36}\div\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\cos 6t.$$

Задание 4. Методом операционного исчисления решить задачу Коши:

$$y''+4y=\sin 2t,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Решение: пусть

$y(t)\div Y(p)$,

$y''(t)=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-1$,

$\sin 2t\div\frac{2}{p^2+4}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид:

$$p^2Y(p)-1+4Y(p)=\frac{2}{p^2+4}.$$

Откуда

$$Y(p)\left(p^2+4\right)=\frac{2}{p^2+4}+1,$$

$$Y(p)=\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}+\frac{1}{p^2+4}.$$

Оригинал $\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}$ можно найти по теореме умножения изображений:

$$\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}=\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\div\sin 2t*\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t\sin 2\tau\sin 2(t-\tau)d\tau=$$

$$=2\left(\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{t}{8}\cos 2t\right).$$

Таким образом, искомое решение

$$y(t)=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t\ .$$

Задание 5. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t,\\ \dot{y}=2x-y-2\cos t.\end{cases}\quad x(0)=-1,\ \ y(0)=0.$$

Решение: пусть $x(t)\div X(p),\ \ y(t)\div Y(p)$. Составим систему операторных уравнений, используя свойства преобразования Лапласа, таблицу 1 и начальные условия $x(0)=-1,\ \ y(0)=0$:

$$\begin{cases}pX(p)+1=4X(p)-3Y(p)+\dfrac{1}{p^2+1}\\ pY(p)=2X(p)-Y(p)-\dfrac{2p}{p^2+1}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(p-4)X(p)+3Y(p)=\dfrac{-p^2}{p^2+1}\\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=-\dfrac{2p}{p^2+1}.\end{cases}$$

При решении используем правило Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-4 & 3\\ -2 & p+1\end{vmatrix}=p^2-3p+2=(p-1)(p-2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\dfrac{-p^2}{p^2+1} & 3\\ -\dfrac{2p}{p^2+1} & p+1\end{vmatrix}=\frac{-p^3-p^2+6p}{p^2+1},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}p-4 & \dfrac{-p^2}{p^2+1}\\ -2 & -\dfrac{2p}{p^2+1}\end{vmatrix}=\frac{-4p^2+8p}{p^2+1}.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)},\qquad Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)};$$

$$X(p)=\frac{-p^3-p^2+6p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{B_1}{p-2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+1};$$

$$Y(p)=\frac{-4p^2+8p}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=\frac{A_2}{p-1}+\frac{B_2}{p-2}+\frac{C_2p+D_2}{p^2+1}.$$

Методом неопределенных коэффициентов найдем:

$$A_1=-1,\ \ B_1=0,\ \ C_1=1,\ \ D_1=-1,\ \ A_2=-2,\ \ B_2=0,\ \ C_2=2,\ \ D_2=-2\,.$$

Таким образом,

$$X(p)=\frac{-1}{p-1}+\frac{p-1}{p^2+1}\div -e^t+\cos t-\sin t,$$

$$Y(p)=-\frac{2}{p-1}+2\cdot\frac{p-1}{p^2+1}\div -2e^t+2\cos t-2\sin t.$$

Ответ: $x(t)=-e^t+\cos t-\sin t,\qquad y(t)=2\left(-e^t+\cos t-\sin t\right).$

Справочный материал.

Свойства преобразования Лапласа. Пусть $f(t)\div F(p),\quad g(t)\div G(p)$:

а) теорема линейности $Af(t)+Bg(t)\div AF(p)+BG(p)$;

б) теорема подобия $f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$;

в) теорема смещения $e^{at}f(t)\div F(p-a)$;

г) $\tau>0$ теорема запаздывания $f(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)$);

д) теорема дифференциорования оригинала

$f'(t)\div pF(p)-f(0)$,

$f''(t)\div p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$, ...

$f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$;

е) теорема интегрирования оригинала $\int\limits_0^t f(z)dz\div\frac{F(p)}{p}$;

ж) теорема дифференцирования изображения $(-1)^n t^n f(t)\div F^{(n)}(p)$;

к) теорема интегрирования изображения $\frac{f(t)}{t}\div\int\limits_p^\infty F(z)dz$;

л) теорема умножения изображений

$$f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\div F(p)\cdot G(p);$$

м) интегралы Дюамеля

$$F(p)\cdot G(p)\div f'(t)*g(t)+f(0)\cdot g(t)=g'(t)*f(t)+g(0)\cdot f(t).$$

Таблица 1- Таблица соответствия оригинал – изображение

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	8	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	9	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	10	t^ne^{at}	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	10	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	11	$tsh\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
7	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	12	$tch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$

РГР № 2. Модуль 2. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Элементы теории поля

Цель: ознакомить студентов с численными методами решения дифференциальных уравнений и элементами теории поля, сформировать основные принципы выбора методов численного решения дифференциальных уравнений, решать задачи электротехники с применением численных методов.

Теоретические вопросы:

1) Постановка задачи Коши [1, 2, 5, 7, 9, 11].
2) Ломаная Эйлера [1, 2, 5, 7, 9, 11].
3) Формулы Эйлера нахождения приближенных значений [1, 2, 5, 7, 9, 11].
4) Двойной просчет при нахождении приближенных значений функции [1, 2, 5, 7, 9, 11].
5) Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности [1, 2, 5, 7, 9, 11].
6) Скалярные поля: производная по направлению, градиент [1, 2, 3, 5].
7) Векторные поля: дивергенция, циркуляция, ротор, поток [1, 2, 3, 5].
8) Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса [1, 2, 3, 5].
9) Соленоидальные, потенциальные и гармонические поля [1, 2, 3, 5].

Расчетные задания.

Задание 1. Решить задачу Коши численными методами:

а) используя метод Эйлера, найдите численное решение дифференциального уравнения на отрезке $[a, b]$ с шагом h, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$;

б) методом Рунге-Кутта с шагом h найдите численное решение дифференциального уравнения на указанном отрезке $[a, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Вариант	Уравнение	x_0	y_0	h	$[a; b]$
1.1	$y' = x + y$	0	0,8	0,1	$[0; 1]$
1.2	$y' = x + \cos y$	1,8	2	0,1	$[1{,}8; 2{,}8]$

1.3	$y' = e^x + y$	0	1,2	0,1	$[0;\ 1]$
1.4	$y' = xy + \sin x$	0	2	0,1	$[0;\ 1]$
1.5	$y' = x + 3\sin y/3$	1,6	2	0,1	$[1{,}6;\ 2{,}6]$
1.6	$y' = e^{x+y}$	0	–1	0,1	$[0;\ 1]$
1.7	$y' = xy + e^x$	–1	0,5	0,1	$[-1;\ 0]$
1.8	$y' = x + y^2$	–2	0	0,1	$[-2;\ -1]$
1.9	$y' = \sin(x - y)$	1	3	0,1	$[1;\ 2]$
1.10	$y' = \cos(x + y)$	2	0	0,1	$[2;\ 3]$
1.11	$y' = y + \cos x$	2	0	0,1	$[2;\ 3]$
1.12	$y' = x^2 + y$	1	0	0,1	$[1;\ 2]$
1.13	$y' = x + e^y$	1	–1	0,1	$[1;\ 2]$
1.14	$y' = x + \sin y$	1,5	3	0,1	$[1{,}5; 2{,}5]$
1.15	$y' = x^2 + y^2$	0	0	0,1	$[0;\ 1]$
1.16	$y' = y - x$	0	1,5	0,2	$[0;\ 1]$
1.17	$y' = y/x - y^2$	1	1	0,2	$[1;\ 2]$
1.18	$y' = 0{,}25y^2 + x^2$	0	1	0,1	$[0;\ 0{,}5]$
1.19	$y' = x + \cos y$	1,8	2	0,2	$[1{,}8;\ 2{,}8]$
1.20	$y' = x + y$	0	1	0,5	$[0;\ 2]$
1.21	$y' = x^2 + y$	0	1	0,2	$[0;\ 1]$
1.22	$y' = 2y - 3$	0	1	0,4	$[0,\ 2]$
1.23	$y' = xy^3 - y$	0	1	0,1	$[0;\ 0{,}5]$
1.24	$y' = xy + e^x$	–1	0,5	0,2	$[-1;\ 0]$
1.25	$y' = 2x + y$	0	1	0,2	$[0;\ 1]$
1.26	$y' = y^2e^x - 2y$	0	1	0,2	$[0;\ 1]$
1.27	$y' = 1/(y^2 - x)$	1	0	0,2	$[1;\ 2]$
1.28	$y' = y + \cos x$	2	0	0,2	$[2;\ 3]$
1.29	$y' = 1 + xy^2$	0	0	0,1	$[0;\ 1]$
1.30	$y' = y - 2x/y$	0	1	0,2	$[0;\ 1]$

Задание 2. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1, M_2. Вычислить производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

№	Задания		
	$u(M)$	M_1	M_2
2.1	$x^2y + y^2z + z^2x$	(1,-1,2)	(3,4,-1)
2.2	$5xy^3z^2$	(2,1,-1)	(4,-3,0)
2.3	$\ln(x^2 + y^2 + z^2)$	(-1,2,1)	(3,1,-1)
2.4	$z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$	(0,0,0)	(3,-4,2)
2.5	$\ln(xy + yz + xz)$	(-2,3,-1)	(2,1,-3)
2.6	$\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$	(1,1,1)	(3,2,1)
2.7	$x^2y + xz^2 - 2$	(1,1,1)	(2,-1,3)

2.8	$xe^y + ye^x - z^2$	(3,0,-2)	(4,1,3)
2.9	$3xy^2 + z^2 - xyz$	(1,2,2)	(3,-1,4)
2.10	$5x^2yz + xy^2z + yz^2$	(1,1,1)	(9,-3,9)
2.11	$\dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$	(1,2,2)	(-3,2,-1)
2.12	$y^2z - 2xyz + z^2$	(3,1,-1)	(-2,1,4)
2.13	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$	(1,-1,2)	(5,-1,4)
2.14	$\ln\left(1 + x + y^2 + z^2\right)$	(1,1,1)	(3,-5,1)
2.15	$x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$	(1,2,1)	(-3,-2,6)
2.16	$\ln\left(x^3 + y^3 + z + 1\right)$	(1,3,0)	(-4,1,3)
2.17	$x - 2y + e^x$	(-4,-5,0)	(2,3,4)
2.18	$x^4 - 3xyz$	(2,2,-4)	(1,0,-3)
2.19	$3x^2y^3z$	(-2,-3,1)	(5,-2,0)
2.20	e^{xy+z^2}	(-5,0,2)	(2,4,-3)
2.21	x^{yz}	(3,1,4)	(1,-1,-1)
2.22	$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$	(1,2,-1)	(0,-1,3)
2.23	$(x + y)^z$	(1,5,0)	(3,7,-2)
2.24	$x^2y + y^2z - 3z$	(0,-2,-1)	(12,-5,0)
2.25	$\dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$	(-1,2,-2)	(2,0,1)

Задание 3. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

№	$\vec{a}(M)$
3.1	$(\alpha - \beta)x\bar{i} + (\gamma - \alpha)y\bar{j} + (\beta - \gamma)z\bar{k}$
3.2	$x^2y\bar{i} - 2xy^2\bar{j} + 2xyz\bar{k}$
3.3	$(yz - 2x)\bar{i} + (xz + 2y)\bar{j} + xy\bar{k}$
3.4	$\left(x^2 - z^2\right)\bar{i} - 3xy\bar{j} + \left(y^2 + z^2\right)\bar{k}$
3.5	$2xyz\bar{i} - y(yz + 1)\bar{j} + z\bar{k}$
3.6	$(2x - 3y)\bar{i} + 2xy\bar{j} - z^2k$
3.7	$\left(x^2 - y^2\right)\bar{i} + \left(y^2 - z^2\right)\bar{j} + \left(z^2 - x^2\right)\bar{k}$
3.8	$yz\bar{i} + (x - y)\bar{j} + z^2\bar{k}$
3.9	$(y + z)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$
3.10	$3x^2y\bar{i} - 2xy^2\bar{j} - 2xyz\bar{k}$
3.11	$(x + y)\bar{i} - 2(y + z)\bar{j} + (z - x)\bar{k}$
3.12	$(yz - 2x)\bar{i} + (xz + zy)\bar{j} + xy\bar{k}$
3.13	$yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$

3.14	$6xy\bar{i}+\left(3x^2-2y\right)\bar{j}+z\bar{k}$
3.15	$(2x-yz)\bar{i}+(2x-xy)\bar{j}+yz\bar{k}$
3.16	$(y-z)\bar{i}+3xyz\bar{j}+(z-x)\bar{k}$
3.17	$(y-z)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+\left(x^2-y^2\right)\bar{k}$
3.18	$(x+y)\bar{i}-2xz\bar{j}-3(y+z)\bar{k}$
3.19	$z^2\bar{i}+(xz+y)\bar{j}+x^2y\bar{k}$
3.20	$xy(3x-4y)\bar{i}+x^2(x-4y)\bar{j}+3z^2\bar{k}$
3.21	$6x^2i+3\cos(3x+2z)\bar{j}+\cos(3y+2z)\bar{k}$
3.22	$(x+y)\bar{i}+(z-y)\bar{j}+2(x+z)\bar{k}$
3.23	$3(x-z)\bar{i}+\left(x^2-y^2\right)\bar{j}+3z\bar{k}$
3.24	$(2x-yz)\bar{i}+(xz-2y)\bar{j}+2xyz\bar{k}$
3.25	$3x^2\bar{i}+4(x-y)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$

Задание 4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Варианты заданий.

№	$\vec{a}(M)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$
4.1	$x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(0,1,-2)
4.2	$xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{j}+xz\vec{k}$	(2,0,3)
4.3	$xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$	(1,-2,0)
4.4	$xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k}$	(3,0,1)
4.5	$xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$	(-1,0,3)
4.6	$yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$	(2,1,-1)
4.7	$y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k}$	(-2,1,1)
4.8	$xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2z\vec{k}$	(0,1,1)
4.9	$xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k}$	(0,-2,1)
4.10	$xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k}$	(0,1,2)
4.11	$y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(-1,2,1)
4.12	$xy\vec{i}-xy^2\vec{j}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	(1,-1,1)
4.13	$(x+y)\vec{i}+yz\vec{j}+xz\bar{k}$	(2,1,0)
4.14	$xy\bar{i}-(y+z)\bar{j}+xz\bar{k}$	(4,0,1)
4.15	$x\bar{i}-zy\bar{j}+x^2z\bar{k}$	(-3,0,2)
4.16	$\left(x+y^2\right)\bar{i}+yz\bar{j}-x^2\bar{k}$	(1,0,4)
4.17	$xz\bar{i}-y\bar{j}+yz\bar{k}$	(0,-1,4)
4.18	$xy\bar{i}-x\bar{j}+yz\bar{k}$	(2,2,2)
4.19	$(x+y)\bar{i}+xyz\bar{j}-x\bar{k}$	(4,1,-3)
4.20	$(x-y)\bar{i}+yz\bar{j}-y\bar{k}$	(-4,1,0)

4.21	$(y-z)\bar{i}-z^2\bar{j}+xyz\bar{k}$	(3,0,1)
4.22	$yz\bar{i}-z^2\bar{j}+(x+y)z\bar{k}$	(1,3,0)
4.23	$z^2\bar{i}-xz\bar{j}+z^2\bar{k}$	(1,-2,1)
4.24	$xy\bar{i}+(x-z)\bar{j}+(y-x)\bar{k}$	(0,0,1)
4.25	$xz\bar{i}+(x-y)\bar{j}+x^2z\bar{k}$	(1,1,-2)

Задание 5. Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через часть плоскости (р), расположенной в первом октанте (нормаль плоскости образует острый угол с осью Oz).

№	$\vec{a}(M)$	(p)
5.1	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
5.2	$y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
5.3	$2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
5.4	$x\bar{i}+3y\bar{j}+2z\bar{k}$	$x+y+z=1$
5.5	$2x\bar{i}+3y\bar{j}$	$x+y+z=1$
5.6	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
5.7	$x\bar{i}+2y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
5.8	$y\bar{j}+3z\bar{k}$	$x+2y+2z=2$
5.9	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
5.10	$2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
5.11	$3x\bar{i}+2z\bar{k}$	$6x+3y+2z=6$
5.12	$2x\bar{i}+3y\bar{j}+z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
5.13	$x\bar{i}+3y\bar{j}-z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
5.14	$-2x\bar{i}+y\bar{j}+4z\bar{k}$	$2x+6y+3z=6$
5.15	$x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$	$3x+2y+6z=6$
5.16	$2x\bar{i}+5y\bar{j}+5z\bar{k}$	$3x+2y+6z=6$
5.17	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
5.18	$2x\bar{i}+y\bar{j}-2z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
5.19	$x\bar{i}+y\bar{j}+2z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
5.20	$-x\bar{i}+y\bar{j}+12z\bar{k}$	$4x+y+2z=2$
5.21	$x\bar{i}+3y\bar{j}+8z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
5.22	$x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
5.23	$x\bar{i}+2y\bar{j}+5z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
5.24	$x\bar{i}+4y\bar{j}+5z\bar{k}$	$2x+4y+z=2$
5.25	$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$2x+3y+z=1$

Задание 6. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

№	$\vec{a}(M)$	(p)
6.1	$(x+\cos zy)\bar{i}+2y\bar{j}+(3z-e^x)\bar{k}$	$x+y+2z=4$
6.2	$(2x+e^y)\bar{i}-(y+x^z)\bar{j}+(4z+xy)\bar{k}$	$x+2y+z=6$
6.3	$(x-e^{zy})\bar{i}+(x^{z+1}+2y)\bar{j}-(z+x)\bar{k}$	$2x+3y+z=6$
6.4	$(3x-\sin y^2)\bar{i}+(2y-z^x)\bar{j}+(z-tgx)\bar{k}$	$-x+2y+3z=6$
6.5	$(2x+\cos yz)\bar{i}-(y-tgz)\bar{j}+2z\bar{k}$	$x+2y+2z=4$
6.6	$(x-\arcsin y)\bar{i}+(2y+\sin z)\bar{j}-(z+e^x)\bar{k}$	$x+y+z=1$
6.7	$(4x+\sin y^z)\bar{i}-(2y-ctgxz)\bar{j}-(z+xy)\bar{k}$	$-x+y+3z=3$
6.8	$(2x-\ln yz)\bar{i}+(y+\cos x)\bar{j}-(2z+x^y)\bar{k}$	$3x+y+z=6$
6.9	$(x+tgy)\bar{i}+(2y+e^x)\bar{j}-(z-\ln x)\bar{k}$	$2x+y+z=4$
6.10	$(3x-e^{yz})\bar{i}-(2y+\cos z)\bar{j}+(z-\sin y)\bar{k}$	$x-y+2z=4$
6.11	$(2x+\ln(y+1))\bar{i}+(2y-\cos z^x)\bar{j}+(3-2z)\bar{k}$	$-2x+3y+z=6$
6.12	$(thz+x)\bar{i}-(\sin x+y)\bar{j}+(2z-y)\bar{k}$	$x+y-z=1$
6.13	$(\ln yz+2x)\bar{i}+(\cos z+y)\bar{j}+(y^x-z)\bar{k}$	$x+2y-3z=6$
6.14	$(3x-\ln y)\bar{i}+(e^x-2y)\bar{j}+(z-x\ln y)\bar{k}$	$2x-y-z=4$
6.15	$(tgz-x)\bar{i}+(e^{xz}+3y)\bar{j}+(\sin x-z)\bar{k}$	$x+y-2z=2$
6.16	$(x+ye^z)\bar{i}+(x\ln x-y)\bar{j}+(2z+e^x)\bar{k}$	$-x+y+2z=3$
6.17	$(\arcsin y-2x)\bar{i}+(3y+\sin z)\bar{j}+(z+1)\bar{k}$	$x+y+3z=6$
6.18	$(e^{yz}+3x)\bar{i}-(2y+\cos zx)\bar{j}+(tgx+z)\bar{k}$	$3x-2y+z=6$
6.19	$(x-y\ln z)\bar{i}-(3\sin x-2y)\bar{j}+(e^x-z)\bar{k}$	$2x+2y-z=4$
6.20	$(ye^z-2x)\bar{i}+(3y-\sin z)\bar{j}+(tgxy+z)\bar{k}$	$-3x+2y-z=6$
6.21	$(e^z+x)\bar{i}-(x\ln z-2y)\bar{j}+(z-\sin x)\bar{k}$	$2x-2y+z=4$
6.22	$(\ln z+2x)\bar{i}+(e^x-y)\bar{j}+(tgy+z)\bar{k}$	$x-y+3z=3$
6.23	$(e^y+2x)\bar{i}-(x\ln z+2y)\bar{j}+(z+x\cos y)\bar{k}$	$-2x+y+3z=6$
6.24	$(arctgy+3x)\bar{i}-(2y+e^x)\bar{j}+(z-tgx)\bar{k}$	$x+2y+z=4$
6.25	$(2x-y\ln z)\bar{i}+(2y-e^x)\bar{j}+(z-\cos x)\bar{k}$	$x-2y+3z=6$

Задание 7. Показать, что векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным, и найти потенциал этого поля.

№	$\vec{a}(M)$
7.1	$3x^2e^y\bar{i}+(x^3e^y-1)\bar{j}$
7.2	$(3x^2-2xy+y)\bar{i}+(x-x^2-3y^2-4y)\bar{j}$
7.3	$(3x^2-2xy+y^2)\bar{i}+(2xy-x^2-3y^2)\bar{j}$
7.4	$(2xe^{x^2-y^2}-\sin x)\bar{i}+(\sin y-2ye^{x^2-y^2})\bar{j}$
7.5	$(20x^2-21x^2y+2y)\bar{i}+(3+2x-7x^3)\bar{j}$

7.6	$(y-\sin x)\bar{i}+\left(x-2y\cos y^2\right)\bar{j}$
7.7	$\left(5y+\cos x+6xy^2\right)\bar{i}+\left(5x+6x^2y\right)\bar{j}$
7.8	$\left(e^{x+y}-\cos x\right)\bar{i}+\left(e^{x+y}+\sin y\right)\bar{j}$
7.9	$\left(2x-3y^2+1\right)\bar{i}+(2-6xy)\bar{j}$
7.10	$\left(x^2-2y\right)\bar{i}+\left(y^2-2x\right)\bar{j}$
7.11	$\left(3x^2+6x^2y+3xy^2\right)\bar{i}+\left(2x^3+3x^2y\right)\bar{j}$
7.12	$xy^2\bar{i}+y\left(x^2+y^2\right)\bar{j}$
7.13	$2\left(3xy^2+2x^3\right)\bar{i}+3\left(2x^2y+y^2\right)\bar{j}$
7.14	$\left(x^2-4xy-2y^2\right)\bar{i}+\left(y^2-4xy-2x^2\right)\bar{j}$
7.15	$\left(\cos\left(x^2+y^2\right)+\sin x\right)\bar{i}+2y\cos\left(x+y^2\right)\bar{j}$
7.16	$\left(5xy^2-x^3\right)\bar{i}+\left(5x^2y-y\right)\bar{j}$
7.17	$xe^{y^2}\bar{i}+\left(x^2ye^{y^2}+tg^2y\right)\bar{j}$
7.18	$\left(y^3+\cos x\right)\bar{i}+\left(3xy^2+e^y\right)\bar{j}$
7.19	$e^y\bar{i}+\left(\cos y+xe^y\right)\bar{j}$
7.20	$\left(3x^2+4y^2\right)\bar{i}+\left(8xy+e^y\right)\bar{j}$
7.21	$\left(y^2+y\sec^2 x\right)\bar{i}+(2xy+tgx)\bar{j}$
7.22	$\left(3x^2y+2y+3\right)\bar{i}+\left(x^3+2x+3y^2\right)\bar{j}$
7.23	$(\sin 2x-2\cos(x+y))\bar{i}-2\cos(x+y)\bar{j}$
7.24	$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)\bar{i}-\left(2y-\frac{1}{x}\right)\bar{j}$
7.25	$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)\bar{i}-\frac{2y}{x^3}\bar{j}$

Решение типового варианта.

Задание 1. Решить задачу Коши численными методами:

а) методом Эйлера с шагом $h=0{,}1$ найти четыре значения функции y для дифференциального уравнения $y'=x+y$ с начальным условием $y(0)=1$;

б) методом Рунге-Кутта с шагом h=0,2 найдите численное решение дифференциального уравнения $y'=y-\frac{2x}{y}$ на отрезке [0,1], удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение:

а) методом Эйлера с шагом $h=0{,}1$ найти четыре значения функции y *д*ля дифференциального уравнения $y'=x+y$ с начальным условием $y(0)=1$

Из заданного начального условия $x_0=0,\ y_0=1,$ найдем следующие значения аргумента

$$x_0 = 0;$$
$$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0{,}1;$$
$$x_2 = x_0 + 2 \cdot h = 0{,}2;$$
$$x_3 = x_0 + 3 \cdot h = 0{,}3.$$

Тогда значения функции y находим по формулам:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1{,}22;$$
$$y_3 = y_2 + h(x_2 + y_2) = 1{,}36;$$
$$y_4 = y_3 + h(x_3 + y_3) = 1{,}52.$$

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

б) метод Рунге-Кутта. По методу Рунге-Кутта вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + k$ производится по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \dfrac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \end{cases}$$

где

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i);$$
$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right);$$
$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right);$$
$$K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

По условию задачи $x_0 = 0,\ y_0 = 1$.

При $i = 0$: $K_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left(y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0}\right) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2$;

$$K_2^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} - \frac{2 \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}2 \cdot \left[1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right] = 0{,}1836;$$

$$K_3^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} - \frac{2 \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}}\right] = 0{,}1817\ ;$$

$$K_4^{(0)} = 0{,}2 \cdot \left[y_0 + K_3^{(0)} - \frac{2 \cdot (x_0 + h)}{y_0 + K_3^{(0)}} \right] = 0{,}1686.$$

Тогда

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832; \qquad x_1 = 0{,}2.$$

При $i = 1$: $x_1 = 0{,}2$; $y_1 = 1{,}1832$.

$$K_1^{(1)} = 0{,}2 \cdot \left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1} \right) = 0{,}1690;$$

$$K_2^{(1)} = 0{,}2 \left[y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)}{y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}} \right] = 0{,}1589;$$

$$K_3^{(1)} = 0{,}2 \left[y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2} - \frac{2\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)}{y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}} \right] = 0{,}1575;$$

$$K_4^{(1)} = 0{,}2 \left[y_1 + K_3^{(1)} - \frac{2(x_1 + h)}{x_1 + K_3^{(1)}} \right] = 0{,}1488.$$

Тогда

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0{,}1690 + 2 \cdot 0{,}1589 + 2 \cdot 0{,}1575 + 0{,}1488) = 0{,}1584;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1832 + 0{,}1584 = 1{,}3416; \qquad x_2 = 0{,}4.$$

Аналогично находим значения x_3, x_4, x_5 и соответствующие им значения функции y_3, y_4, y_5.

Задание 2. Дана функция (скалярное поле) $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и точки M_1(-2; 3; 6), M_2(-1; 1; 4). Вычислить производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение:

Производная функции *u(M)* по направлению вектора $\vec{a}$ находится по формуле, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, которые являются координатами единичного вектора

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}.$$

Найдём компоненты записанной формулы:

$$u'_x(M_1) = \left. \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right|_{M_1} = \frac{-2}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = -\frac{2}{7};$$

$$u'_y(M_1)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{3}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{3}{7};$$

$$u'_z(M_1)=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{6}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{6}{7};$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1-(-2);1-3;4-6\}=\{1;-2;-2\};\quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+4+4}=3;$$

$$\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{-2}{3}\right\}.$$

Таким образом, $u'_{\vec{a}}(M_1)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)=-\frac{20}{21}$.

Ответ: $-\frac{20}{21}$.

Задание 3. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a}(M)=(2xy+z)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$$

соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Решение:

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным*, если в каждой его точке $div\,\vec{a}(M)=0$. Поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным*, если в каждой его точке $rot\,\vec{a}(M)=0$. Поле, одновременно соленоидальное и потенциальное, называется *гармоническим*.

$div\,\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2y-2+0=2y-2\neq 0$, следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является соленоидальным.

$$rot\,\vec{a}(M)=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(x)}{\partial y}-\frac{\partial\left(x^2-2y\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(x^2-2y\right)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+z)}{\partial y}\right)\vec{k}=(0-0)\vec{i}-$$

$-(1-1)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0$ – поле потенциальное.

Ответ: поле $\vec{a}(M)$ потенциальное, но не соленоидальное и не гармоническое.

Задание 4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M) = xy^2z^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ в точке $M_0(1;2;1)$.

Решение:

Наибольшая плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M_0 достигается в направлении ротора и численно равна его модулю.

$$rot\,\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z} \right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} \right)\vec{k} = (xz - 2x^2yz)\vec{i} -$$

$$-(yz - 2xy^2z)\vec{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\vec{k} = (xz - 2x^2yz)\vec{i} + (2xy^2z - yz)\vec{j}.$$

Таким образом, $rot\,\vec{a}(M_0) = -3\vec{i} + 6\vec{j}$,

$$\left|rot\,\vec{a}(M_0)\right| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}\ .$$

Ответ: наибольшая плотность циркуляции векторного поля достигается в направлении $rot\,\vec{a}(M_0) = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ и равна $3\sqrt{5}$.

Задание 5. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + 3z\vec{k}$ через часть плоскости (p), заданной уравнением $x+4y+z=4$ и расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение:

Уравнение плоскости (p): $\dfrac{x}{4} + y + \dfrac{z}{4} = 1$ приведём к уравнению в отрезках и построим чертёж (рисунок 1).

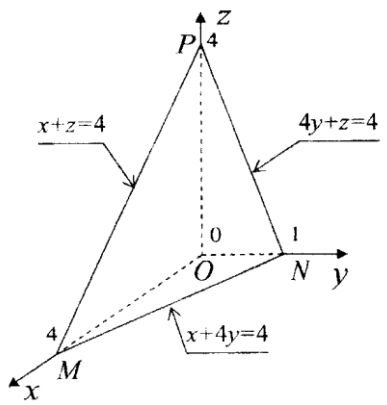

Рисунок 1

S – ΔMNP

S_{yz} – ΔNOP

S_{xz} – ΔPOM

S_{xy} – ΔMON

- проекции S на координатные плоскости. Часть плоскости, через которую вычисляется поток поля, обозначена через S (ΔMNP), $M(4;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;4)$ - координаты вершин треугольника.

Единичный вектор $\vec{n}$ нормали к плоскости $x+4y+z=4$ имеет координаты $\vec{n}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)=\vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{17}};\frac{4}{\sqrt{17}};\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{17}}>0$, следовательно, угол γ – острый с осью Oz, то есть поток поля проходит через внешнюю сторону ΔMNP.

По определению потока поля получаем:

$$\Pi=\iint_S P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dxdz+R(x;y;z)dxdy=$$

$$=\left|\text{поверхностный интеграл второго рода в координатной форме}\right|=$$

$$=\iint_S (2z-x)dydz+(x+2z)dxdz+(3z)dxdy=\left|\begin{matrix}\text{поверхностные интегралы}\\ \text{переводим в двойные}\end{matrix}\right|=$$

$$=\iint_S \big(2z-(4-4y-z)\big)dydz+(x+2z)dxdz+3(4-x-4y)dxdy=$$

$$=\iint_{S_{yz}}(3z+4y-4)dydz+\iint_{S_{xz}}(x+2z)dxdz+3\iint_{S_{xy}}(4-x-4y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{4-4y}(3z+4y-4)dz+\int_0^4 dz\int_0^{4-z}(x+2z)dx+3\int_0^4 dx\int_0^{4-z}(4-x-4y)dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{3}{2}\cdot 16(1-y)^2-4^2(1-y)^2\right]dy+\int_0^4\left[\frac{(4-z)^2}{2}+2z(4-z)\right]dz+$$

$$+3\int_0^4\left[\frac{1}{4}(4-x)^2-\frac{(4-x)^2}{8}\right]dx=8\int_0^1(1-y)^2dy+\frac{1}{2}\int_0^4\left(16+8z-3z^2\right)dz+3\int_0^4\frac{(4-x)^2}{8}dx=$$

$$=\frac{8}{3}(y-1)^3\Big|_0^1+\left(8z+2z^2-\frac{z^3}{2}\right)\Bigg|_0^4+\frac{3}{8}\frac{(x-4)^3}{3}\Bigg|_0^4=42\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\Pi=42\frac{2}{3}$.

Задание 6. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+z\vec{k}$$

через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p): $x-2y+2z=4$ и координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

Решение:

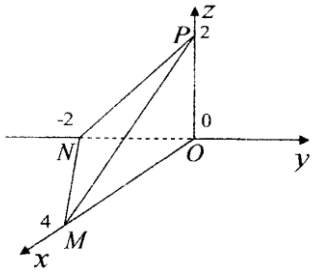

Рисунок 2

(p): $x-2y+2z=4$ $\rightarrow$ $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$, координаты вершин пирамиды (рисунок 2): $M(4;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;2)$.

Так как полная поверхность пирамиды является замкнутой поверхностью, то используем формулу Остроград ского-Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdydz.$$

Найдем:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (x+z)}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (2y-x)}{\partial y} = 2; \ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (z)}{\partial z} = 1.$$

Таким образом, $\Pi = \iiint\limits_V (1+2+1) dxdydz = 4 \iiint\limits_V dxdydz.$

Так как интеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объёму прямоугольной пирамиды *MNPO*, то для его вычисления воспользуемся формулой элементарной математики

$$\Pi = 4 \iiint\limits_V dxdydz = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\Pi = \frac{32}{3}$.

Задание 7. Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = \left(2xy + 3y^2 + 9y\right)\vec{i} + \left(x^2 + 6xy + 9x\right)\vec{j}$$

является потенциальным и найти потенциал этого поля.

Решение:

Потенциальное поле имеет нулевой ротор. Проверим это:

$$rot\,\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + 3y^2 + 9y & x^2 + 6xy + 9x & 0 \end{pmatrix} = (0-0)\vec{i} - (0-0)\vec{j} +$$

$$= \left(2x + 6y - (2x + 6y)\right)\vec{k} = 0.$$

Следовательно, поле $\vec{a}$ потенциальное. Потенциал $u = u(x;y)$ вычислим по формуле $u(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x;y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;y)dy + C.$ В качестве начальной точки $(x_0;y_0)$ выберем точку $(0;0)$.

$$u(x;y) = \int\limits_0^x (2x \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot 0)dx + \int\limits_0^y \left(x^2 + 6xy + 9x\right)dy + C = x^2y + 3xy^2 + 9xy + C.$$

Ответ: $u(x;y) = x^2y + 3xy^2 + 9xy + C$.

Список литературы

1 Данко П.Е., и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. - ч.1 и ч.2., М.: ОНИКС 21 век. Мир и образование, - 2003, 2008.

2 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2011. – 288 с.

3 Мустахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика. Полный курс.- Алматы, 2009. - 450с.

4 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

5 Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математике (с индивидуальными заданиями). Часть 2. – Алматы, 2009. – 631 с.

6 Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика:Учеб. пособие - Мн.: Выш. шк.,2007.-336 с.

7 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М. 2007.

8 Мустахишев К.М., Атабай Б.Ж. Решение дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления. Методические указания и задания к расчетно-графическим работам (для специальности 5В071800 Электроэнергетика). Ч.1. – Алматы: АУЭС, 2014. –19 с.

9 Искакова А.К., Отарова А.Г. Численные методы. Конспект лекций для специальности 5В060200 – Информатика. –Алматы, АУЭС. -2015.

Сводный план 2016., поз. 137

Искакова Акжолтай Курмантаевна
Бексултанова Алтынай Молыбаевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Методические указания и задания по выполнению
расчетно-графических работ для студентов специальности
5В071800 - Электроэнергетика

Редактор Л.Т.Сластихина
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать _____ Формат 60х84 1/16
Тираж 15 экз. Бумага типографская №1
Объем 1,6 уч.-изд. лист Заказ_____ Цена 800 тенге

Копировально-множительное бюро
некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126