Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания к расчетно-графическим работам для специальности 5В060200

Часть 1

Алматы 2014

Составители: А.К. Дуйсек, Ж.С. Абдулланова. Математический анализ. Методические указания к расчетно-графическим работам для специальности 5В060200. Часть 1. – Алматы: АУЭС, 2013.-23 с.

Методические указания к расчетно-графическим работам содержит типовой расчет №1 дисциплины «Математический анализ» для студентов всех форм обучения специальности 5В060200-Информатика. Приведены основные теоретические вопросы программы. Дано решение типового варианта.

Ил. 1, табл. 14, библиогр. – 6 назв.

Рецензент: доцент Башкиров М.В.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2013г.

Введение

Это методическое указание представляет собой 1-ю часть расчетно-графической работы по курсу «Математический анализ», который изучается студентами специальности 5В060200 - Информатика всех форм обучения АУЭС.

Расчетно-графическая работа написана в соответствии с действующей программой по курсу «Математический анализ» для студентов специальности 5В060200. Настоящее методическое указание адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения самостоятельной работы во время аудиторных занятий и выдачи индивидуальных домашних заданий. Здесь содержится материал по теории пределов функции, функциям от нескольких переменных.

Данный РГР состоит из 14 расчетных заданий по 30 вариантов каждый. В конце приведено решение типового варианта, где дано подробное решение каждого задания. Также приводятся основные теоретические вопросы, которые должны освоить студенты по этому разделу математики.

РГР выполняется на отдельной тонкой тетради, в номере каждого задания вторая цифра указывает на вариант.

1 Расчетно-графическая работа №1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных

Цель: научить студентов применять теоретические знания для вычисления пределов функций по основным свойствам пределов. Также уметь применять основные определения непрерывности и формулы дифференцируемости функций многих переменных для решения практических задач. Привить навыки исследования функций с помощью производной.

1.1 Расчетные задания

Задание 1. Найти пределы.

1.1 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+5x}{x^2-25}$	1.2 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-6x+5}$	1.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x}$
1.4 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$	1.5 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}$	1.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}$
1.7 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+6}}{x^2+6x+8}$	1.8 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3+2x}}{x+x^2}$	1.9 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-3x-10}$

1.10 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}}$	1.11 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-4x}}$	1.12 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$
1.13 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{x+16}}{x^2-5x-50}$	1.14 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x^2-2x-15}$	1.15 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-35}{\sqrt{x+11}-\sqrt{1-x}}$
1.16 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt{3x-17}-\sqrt{x-5}}$	1.17 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+7}}{x^2-5x-50}$	1.18 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-16}$
1.19 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x+14}{x^2-x-6}$	1.20 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-9}{x^2+3x}$	1.21 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-x-16}{\sqrt{x+5}-\sqrt{9+2x}}$
1.22 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+10}}$	1.23 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}}{x^2-7x+12}$	1.24 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x+13}}{x^2+6x}$
1.25 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x+x^2-2}$	1.26 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x+2}}{x+3x\ \ -10}$	1.27 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x-36}{\sqrt{x+5}-\sqrt{9+2x}}$
1.28 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$	1.29 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9x+10}{x^2-1}$	1.30 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Задание 2. Найти пределы.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+5}{3x^2-x+6}$	2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+5}{3x\ \ -2\div^4+6}$	2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x^3-6}{7x^3-x+1}$
2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x-9}{2x^3+3x+x^2}$	2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^4+5}{x^3-3x-5x^4}$	2.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^3+5x^3}{x^4-x^5+2}$
2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5x}{-x^5+2x^2+3}$	2.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-x+3}{2x^3+3x^2-2x^4}$	2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+x^2-2}{3x^3-5x+4}$
2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+2x^2+3}{7-2x^4-9x^5}$	2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x\ \ -x^4}{1+3x^2+2x^5}$	2.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x-3}{2x^3+x^2-7}$
2.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x^3-3}{x^3+3x^2-1}$	2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3-9}{x^2-x+5x^3}$	2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^3+5}{-2x^4+3x^2+6}$
2.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^4-12}{3x^2-x+4x^4}$	2.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+5x^2-10}{3x^2-x^3+4x^4}$	2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{x^2-3x+16}$
2.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x+5}{3x^6-2x^4+7}$	2.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x^3-6x^4}{7x^3-x+1}$	2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x-9x^3}{2x^3+3x+2}$
2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^4+5}{x^3-3-5x^5}$	2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^3+5x^5}{x^4-6x^5+2}$	2.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x^2+5x}{9x^5-x^2+6}$
2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x+3}{x^3+3x^2-12x^4}$	2.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2-2}{7x^3-5x+1}$	2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^2+3}{7+5x^4-7x^5}$
2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+6}{x^2-4x+5}$	2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x^3+6}{x^2-x+5}$	2.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{3x^3-x+6}$

Задание 3. Найти пределы.

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 2x}$	3.2 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1-\cos 10x}{3x^2}$	3.3 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin 4x\cdot\sin x}{2x^2}$
3.4 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin 3x\cdot tg\,2x}{x^2}$	3.5 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{arctg\,5x}{2x}$	3.6 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$
3.7 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{5x^2}{\sin 2x tg\,4x}$	3.8 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}tg\,2x}{5x^2}$	3.9 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{5x}{tg\,3x}$
3.10 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{tg^2 3x}{x\sin 6x}$	3.11 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x^2}{1-\cos 3x}$	3.12 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x\sin 4x}$
3.13 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin 2x\cos^2 x}{x^2}$	3.14 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\arcsin 5x}$	3.15 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\sin 4x}$
3.16 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2\cos 3x}$	3.17 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin^2 7x}{2xtgx}$	3.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin 2xtgx}$
3.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tgx}{3x^2}$	3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot arctg\,5x}{6x^2}$
3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xarctg\,5x}{\sin^2 2x}$	3.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\cos 5x}{4x^2}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\arcsin xtg\,6x}$
3.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{3x}{2}arctg\,2x}{6x^2}$	3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg\,3x}$	3.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{x\arcsin 6x}$
3.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 5x}$	3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2}$	3.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x}{4x}$

Задание 4. Найти пределы.

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^{-5x}$	4.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x}\right)^{-5x}$	4.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{-5x}$
4.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{4x+2}$	4.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2+2x}\right)^{5+x}$	4.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x+1}$
4.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-2}\right)^{-2x+5}$	4.8 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)^{\frac{x}{x-1}}$	4.9 $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{3x}{x-2}}$
4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{-2x}$	4.11 $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5}{1-x}}$	4.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$
4.13 $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{2x-4}}$	4.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x-1}\right)^{2x+5}$	4.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{1+4x}\right)^{-2x}$

4.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^{-2x}$	4.17 $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{3x}{5x-5}}$	4.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{5x}$
4.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{5x}$	4.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{-3x}$	4.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{-x+2}$
4.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x}{1+2x}\right)^{2+x}$	4.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{5x+2}\right)^{2x-1}$	4.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+7}\right)^{x+5}$
4.25 $\lim\limits_{x\to2}(4x-7)^{\frac{4x}{x-2}}$	4.26 $\lim\limits_{x\to-2}(x+3)^{\frac{3x}{x+2}}$	4.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{5x}$
4.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{2x}\right)^{3x}$	4.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{3x}$	4.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{-2x}$

Задание 5. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график.

5.1 $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x<-1, \\ x^2-1, & \text{если } -1\le x<1, \\ 2x, & \text{если } x\ge1. \end{cases}$	5.2 $f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{если } x\le-1, \\ x^2+1, & \text{если } -1\le x<1, \\ -x+4, & \text{если } x\ge1. \end{cases}$
5.3 $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\le2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2<6<3, \\ 1-x, & \text{если } x\ge3. \end{cases}$	5.4 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{если } x\le0, \\ x^2+1, & \text{если } 0<x<2, \\ x+3, & \text{если } x\ge2. \end{cases}$
5.5 $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le-1, \\ x^2, & \text{если } -1<x\le2, \\ x+3, & \text{если } x\ge2. \end{cases}$	5.6 $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\le0, \\ \cos x, & \text{если } 0\le x<\pi, \\ x-2, & \text{если } x>\pi. \end{cases}$

5.7 $f(x)=\begin{cases} -(x+2), & \text{если } x\le -2,\\ (x+1)^2, & \text{если } -2<x\le 0,\\ x+1, & \text{если } x>0. \end{cases}$	5.8 $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{если } x\le 0,\\ tg\,2x, & \text{если } 0<x\le \frac{\pi}{8},\\ 2, & \text{если } x>\frac{\pi}{8}. \end{cases}$
5.9 $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2-1, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0, & \text{если } x>1. \end{cases}$	5.10 $f(x)=\begin{cases} -4x, & \text{если } x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если } 0<x<4,\\ x-2, & \text{если } x\ge 4. \end{cases}$
5.11 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-x^2}, & \text{если } x\le 1,\\ x, & \text{если } 1<x<2,\\ x^2-2, & \text{если } x\ge 2. \end{cases}$	5.12 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 0,\\ x-2, & \text{если } 0<x<3,\\ 1, & \text{если } x\ge 3. \end{cases}$
5.13 $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & \text{если } x\le 0,\\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 3,\\ 4, & \text{если } x\ge 3. \end{cases}$	5.14 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{если } x\le -\pi,\\ x^2-\pi^2, & \text{если } -\pi<x<\pi,\\ 0, & \text{если } x\ge \pi. \end{cases}$
5.15 $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\le 0,\\ tg\,\frac{x}{2}, & \text{если } 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ 3, & \text{если } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$	5.16 $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le 0,\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le \pi,\\ 1, & \text{если } x>\pi. \end{cases}$
5.17 $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\le 0,\\ \cos x, & \text{если } 0<x<\frac{\pi}{2},\\ x, & \text{если } x\ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	5.18 $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & \text{если } x\le 0,\\ x, & \text{если } 0<x<\pi,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x\ge \pi. \end{cases}$
5.19 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\le 2,\\ 5-x, & \text{если } 2<x\le \pi,\\ \sin x, & \text{если } x>\pi. \end{cases}$	5.20 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{если } x<0,\\ x^2-12, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ \sqrt{x+2}, & \text{если } x>4. \end{cases}$

5.21	$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{если } x\le 2,\\ (x+1)^2, & \text{если } 2<x\le 0,\\ x^2-1, & \text{если } x>0.\end{cases}$	5.22	$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\le 0,\\ \sin 2x, & \text{если } 0<x\le \frac{\pi}{8},\\ 1, & \text{если } x>\frac{\pi}{8}.\end{cases}$
5.23	$f(x)=\begin{cases}3x, & \text{если } x\le 1,\\ x^2-1, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 3, & \text{если } x>2.\end{cases}$	5.24	$f(x)=\begin{cases}-4x, & \text{если } x\le 0,\\ \sqrt{x+1}, & \text{если } 1<x<3,\\ x-1, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$
5.25	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{если } x\le 1,\\ x, & \text{если } 1<x<3,\\ x^2-2, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$	5.26	$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если } x\le 0,\\ x, & \text{если } 0<x<4,\\ 4, & \text{если } x\ge 4.\end{cases}$
5.27	$f(x)=\begin{cases}tgx, & \text{если } x\le 0,\\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$	5.28	$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\le 0,\\ x+1, & \text{если } 0<x<3,\\ x^2-5, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$
5.29	$f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x\le 0,\\ \cos x, & \text{если } 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & \text{если } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$	5.30	$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если } x\le 0,\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le \pi,\\ x-\pi, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$

Задание 6. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ функции.

6.1	$y=5\sqrt{3x+2}+\frac{2}{\sqrt{x^3+x^2-11}}$	6.2	$y=(x^3-4x)\sqrt{x^2+5x-2}$
6.3	$y=(5+\cos x)\sqrt{5x^3+x}$	6.4	$y=\sqrt{x^2+\sin 3x}+\sqrt[3]{2-\cos x^3}$
6.5	$y=(2+\sin 3x)\sqrt{x^3+2x^5}$	6.6	$y=\sqrt{x^2+\cos 4x}+\sqrt[3]{5+tgx^3}$
6.7	$y=\frac{x+\cos 3x}{2-\cos 3x}$	6.8	$y=\frac{2x+5}{\sqrt{x^3+6x-3}}$

6.9 $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+2x+3}}$	6.10 $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt{5-2x+x^2}}$
6.11 $y=\dfrac{x^2-8x}{\sqrt{x^3+6x+2}}$	6.12 $y=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^5+3x^2}}$
6.13 $y=\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x^3-8}}$	6.14 $y=\dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+3x}}$
6.15 $y=\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^3+x-6}}$	6.16 $y=\dfrac{x^2+2x-5}{\sqrt{x^2+3}}$
6.17 $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x+1}}{x^2-4}$	6.18 $y=\dfrac{2x^4-3x^3-6}{\sqrt{9x+x^2}}$
6.19 $y=\ln\sqrt{\dfrac{2^x+6}{2^x-6}}$	6.20 $y=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^4+3x^2-6}}$
6.21 $y=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2+8x-5}}$	6.22 $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+x+3}}$
6.23 $y=x^4\sqrt{1+3x^2}$	6.24 $y=\dfrac{x^3-5x}{\sqrt{x^2+5x+1}}$
6.25 $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^4+2x+5}}$	6.26 $y=\dfrac{x^2+5x-2}{\sqrt{x^2-8x}}$
6.27 $y=\dfrac{2x^3+5x}{\sqrt{x^2+3x}}$	6.28 $y=\dfrac{5x-2}{\sqrt{x^3+x^2-3}}$
6.29 $y=\dfrac{x^2+3x-7}{\sqrt{x^2+3x+2}}$	6.30 $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+1}}{x^2-4x+3}$

Задание 7. Найти производные функции.

7.1 $y=\left(3^{\sin 2x}+5\right)^3$	7.2 $y=2tg^3\left(x^2+1\right)$
7.3 $y=(\log_3(1+x^2)+3^{tgx})^4$	7.4 $y=\left(e^{tg\,2x}+\ln 4x\right)^5$
7.5 $y=(\log_2(x+3x^2)+2^{ctgx})^3$	7.6 $y=\left(e^{2x}+\ln(4x+2)\right)^3$
7.7 $y=(\sqrt{x+x^2}+\ln 3x)^3$	7.8 $y=[2^{tgx}+\ln(1-3x^3)]^5$
7.9 $y=5^x\ln(e^{-2x}+1)$	7.10 $y=\cos 2x-x^2\sin 3x$
7.11 $y=(2^{\sin 2x}+tg^2x)^4$	7.12 $y=(2^{ctg(x+1)}+\sqrt{x-2})^4$
7.13 $y=(5^{\sin 4x}+ctg^3x)^2$	7.14 $y=(3^{tg\sqrt{x}}+\sqrt[3]{\sin x})^4$
7.15 $y=(e^{\cos 2x}+x^2)^3$	7.16 $y=(3^{\ln 4x}-\cos\sqrt{x})^3$
7.17 $y=(e^{\cos 4x}-x^4)^3$	7.18 $y=(\ln(\cos 2x+3)+tg^3x)^2$
7.19 $y=(\sqrt{x^2+3}\cdot\sin^2 4x)^3$	7.20 $y=\sqrt[5]{1+e^{-5x}}\cdot\cos^2 3x$

7.21 $y=(3^{\cos x}+\sqrt{2-x^3})^7$	7.22 $y=3^x\ln(e^{2x^2}+x)$
7.23 $y=\dfrac{5ctgx}{\sin^3 x}$	7.24 $y=(e^{\sin 2x}+ctgx)^2$
7.25 $y=(3^{tg(x+1)}\sqrt{x^2-3})^5$	7.26 $y=(4^{\sin 3x}+tgx)^3$
7.27 $y=(2^{ctg\sqrt{x}}+\sqrt[5]{\cos x})^3$	7.28 $y=(3^{tg2x}+x^4)^3$
7.29 $y=(4^{\ln 2x}-3\sin\sqrt{x})^2$	7.30 $y=(3^{\sin 2x}-x^3)^4$

Задание 8. Продифференцировать данные функции.

8.1 $y=x^{\sin x}$	8.2 $y=x^{\frac{2}{x}}$
8.3 $y=x^{-x}$	8.4 $y=\left(arctgx^{\ln x}\right)$
8.5 $y=\left(arctgx^{2x}\right)$	8.6 $y=\left(1-x^2\right)^x$
8.7 $y=(tgx)^{\sin x}$	8.8 $y=(\sin x)^x$
8.9 $y=(\sin x)^{x^3}$	8.10 $y=(x+2)^{\ln x}$
8.11 $y=\left(1+x^2\right)^x$	8.12 $y=(ctg3x)^{\sin 3x}$
8.13 $y=(\ln x)^{tgx}$	8.14 $y=(\cos x)^{\sin x}$
8.15 $y=(tgx)^{\sin 2x}$	8.16 $y=\left(x^2+\ln x\right)^{\cos x}$
8.17 $y=\left(x+x^2\right)^{\sin x}$	8.18 $y=\left(1-\sqrt{x}\right)^{arctgx}$
8.19 $y=\left(x^3+1\right)^x$	8.20 $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$
8.21 $y=(\arccos x)^{3x}$	8.22 $y=(1+x)^{x^2}$
8.23 $y=(\cos 2x)^{\sin x}$	8.24 $y=(\arcsin x)^x$
8.25 $y=(\ln x)^{x^2}$	8.26 $y=(\ln x+2)^x$
8.27 $y=\left(1-x^2\right)^{\sin x}$	8.28 $y=(tg4x)^{\sin 4x}$
8.29 $y=(x)^{tg2x}$	8.30 $y=\left(x^3+1\right)^{\sin x}$

Задание 9. Продифференцировать данные функции.

9.1 $tg\dfrac{x}{y}+2x-y=0$	9.2 $3x+y+\arccos y=0$
9.3 $ctgx+xy^3-2x=0$	9.4 $\left(e^x-1\right)\left(e^y-1\right)=0$
9.5 $\ln\left(y^2+x\right)=e^{\frac{x}{y}}$	9.6 $x^2-y^3-2xy=0$
9.7 $x^2-y^2+5\sin(x+y)=0$	9.8 $x^3y^2-3\ln(x+y)=5$
9.9 $x^3-y^2+2^ytgx=0$	9.10 $y+\sin 3x=tg(x+y)$

9.11	$3x + ye^x - 2e^x = 0$	9.12	$\ln\left(x^2 - y^2\right) + tgy = 0$
9.13	$x\cos 2y - tgx = 0$	9.14	$x^2 + y^2 + \ln(2x + 3y) = 0$
9.15	$e^x + x\ln y - 3y = 0$	9.16	$\ln x + ytgx = 0$
9.17	$e^{2x} - e^{2y} - xy^2 = 0$	9.18	$3x + 2y + \sin(x - y) = 0$
9.19	$x + \ln y + \sqrt{3x - 4y} = 0$	9.20	$x^2 + \ln y + e^{-x} - e^{2x} = 0$
9.21	$\ln(y + x^2) = e^{\frac{y}{x}}$	9.22	$x^3 + y^2 + 5xy = 0$
9.23	$3x^2 + 2y^2 + 3\sin(x - 2y) = 0$	9.24	$x^3 + y^2 + \ln(xy) = 0$
9.25	$x^2 + 2y^2 + e^y \sin x = 0$	9.26	$x + \sin 2y = ctg(x + y)$
9.27	$3y + e^x - e^{2y} = 0$	9.28	$\ln(x^2 + y^2) + ctgy = 0$
9.29	$x\sin(2 + y) + ctgx = 0$	9.30	$x^3 - y^2 + \ln(x - 2y) = 0$

Задание 10. Продифференцировать данные функции.

10.1	$\begin{cases} x = t^2 + tg2t \\ y = 3t + \ln t \end{cases}$	10.2	$\begin{cases} x = t - 2t^2 \\ y = 2t^2 + t^4 + 2 \end{cases}$
10.3	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$	10.4	$\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 2} \\ y = \dfrac{t + 3}{\sqrt{t^3 - 2}} \end{cases}$
10.5	$\begin{cases} x = \dfrac{t - 3}{t + 2} \\ y = \dfrac{t^2 + 3}{t - 5} \end{cases}$	10.6	$\begin{cases} x = arctg 2t \\ y = \dfrac{3}{1 + 4t^2} \end{cases}$
10.7	$\begin{cases} x = t^3 + \ln t \\ y = t^2 + 2t^4 \end{cases}$	10.8	$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = tgt^2 \end{cases}$
10.9	$\begin{cases} x = \sin^3(3 + t) \\ y = \cos(3 - t) \end{cases}$	10.10	$\begin{cases} x = t^2 + \ln t \\ y = 3t + 4t^3 \end{cases}$
10.11	$\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$	10.12	$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 3\sin t \end{cases}$
10.13	$\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	10.14	$\begin{cases} x = \ln\left(2 + t^3\right) \\ y = \cos 2t \end{cases}$
10.15	$\begin{cases} x = t^4 + 2t \\ y = t^2 + \ln t \end{cases}$	10.16	$\begin{cases} x = 3^t + \sin t \\ y = 3^t - \cos t \end{cases}$
10.17	$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 4\sin 3t \end{cases}$	10.18	$\begin{cases} x = \sqrt{2 + t^3} \\ y = 2\cos t \end{cases}$

10.19	$\begin{cases} x = \sqrt{e^t + t^2} \\ y = \sin 5t \end{cases}$	10.20	$\begin{cases} x = \sin(t^2 + 1) \\ y = tg\, 2t \end{cases}$
10.21	$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 3}{t + 2} \\ y = \dfrac{t + 3}{t^2 - 5} \end{cases}$	10.22	$\begin{cases} x = tg\, 2t \\ y = \dfrac{4}{1 + 3t^2} \end{cases}$
10.23	$\begin{cases} x = t^2 - \ln t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$	10.24	$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t^2 \\ y = arctgt^2 \end{cases}$
10.25	$\begin{cases} x = \sin(2 + t^3) \\ y = \cos(4 - t^2) \end{cases}$	10.26	$\begin{cases} x = t^3 + \sqrt{t} \\ y = t - 4t^3 \end{cases}$
10.27	$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$	10.28	$\begin{cases} x = t^2 \ln t \\ y = t^2 - 2 \sin t \end{cases}$
10.29	$\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$	10.30	$\begin{cases} x = \sin(2 + t^3) \\ y = \cos(2 + t^3) \end{cases}$

Задание 11. Исследовать функцию и построить ее график.

11.1 $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$	11.2 $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$	11.3 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$
11.4 $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$	11.5 $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$	11.6 $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$
11.7 $y = x - \dfrac{x}{2x + 1}$	11.8 $y = \dfrac{x^2 + 7}{x - 3}$	11.9 $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$
11.10 $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$	11.11 $y = \dfrac{3x}{4 + x^2}$	11.12 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$
11.13 $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$	11.14 $y = \dfrac{x^2 + 6}{x}$	11.15 $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$
11.16 $y = \dfrac{2x}{x^2 - 2}$	11.17 $y = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 3}$	11.18 $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x}$
11.19 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$	11.20 $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$	11.21 $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

11.22 $y=\frac{x+2}{x^2-2}$	11.23 $y=x-\frac{2x}{x+2}$	11.24 $y=\frac{x^2+3}{x-3}$
11.25 $y=\frac{x^2-x}{x^2-1}$	11.26 $y=\frac{x}{x^2-2}$	11.27 $y=\frac{2x}{4-x^2}$
11.28 $y=\frac{x^2+3}{x^2-3}$	11.29 $y=\frac{x}{x^2-4}$	11.30 $y=\frac{x^2+3}{x^2}$

Задание 12. Для функции $z=f(x,y)$ найти: $a)\,\Delta yz, \Delta z;$ $b)\,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y};$ $c)\,dz.$

12.1 $z=e^{x^2-y^2}$	12.11 $z=ctg(4x+9y)$	12.21 $z=\sin(x^2+9y)$
12.2 $z=ctg(x+5y)$	12.12 $z=tg(5x+4y)$	12.22 $z=e^{x^2+y^2}$
12.3 $z=tg(x+y^2)$	12.13 $z=\cos(x^4+3y^2)$	12.23 $z=ctg(3x+2y)$
12.4 $z=\ln(x^4+2y^3)$	12.14 $z=\sqrt{4x^3+y^2}$	12.24 $z=tg(x^2+y)$
12.5 $z=\cos(7x+y)$	12.15 $z=7^{x^2+y^2}$	12.25 $z=\ln(x^2+y^2)$
12.6 $z=\sin(x^2+y^2)$	12.16 $z=e^{x^2-y^2}$	12.26 $z=\cos(7x+y)$
12.7 $z=\cos(x^2+y^2)$	12.17 $z=ctg(2x+y)$	12.27 $z=\sin(x^2+y^3)$
12.8 $z=\sin\sqrt{4x+y^2}$	12.18 $z=tg\,\frac{x}{y}$	12.28 $z=\sin(x^3+2x^4)$
12.9 $z=9^{x^2+y^2}$	12.19 $z=\ln(x+y^2)$	12.29 $z=\sqrt{7x^2+y}$
12.10 $z=e^{x^2+y^2}$	12.20 $z=\cos(3x+8y)$	12.30 $z=5^{x^2-y^2}$

Задание 13. Дана функция $z=f(x,y)$.

Найти:

$a)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$ $b)\,dz;$ c) убедиться, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\ z}{\partial y\partial x}$.

13.1 $z=(x^2-2y)^5$	13.11 $z=(3x+2y)^9$	13.21 $z=(x-y^2)^2$
13.2 $z=(4x-y^3)^2$	13.12 $z=(5x^2-3y^2)^3$	13.22 $z=(2x+y)^7$
13.3 $z=(5x^2+2y)^4$	13.13 $z=(x^2-4y)^2$	13.23 $z=(x-3y)^4$
13.4 $z=(2x^3-y)^2$	13.14 $z=e2^{xy-4}$	13.24 $z=(3x^2-2y^3)^3$

13.5 $z=\left(4x^2-5y^2\right)^5$	13.15 $z=\cos\left(xy^2\right)$	13.25 $z=e^{2x^2-y^2}$
13.6 $z=e^{x^2+y^2}$	13.16 $z=e^{x+y^2}$	13.26 $z=\dfrac{y}{x^2}$
13.7 $z=(4x+y)^9$	13.17 $z=e^{x^3-y^3}$	13.27 $z=x^3y^5$
13.8 $z=\cos(x-5y)$	13.18 $z=\cos\left(xy^2\right)$	13.28 $z=(4x+y)^9$
13.9 $z=\sin(xy)$	13.19 $z=\sin\left(x^2-y\right)$	13.29 $z=\sin\left(x^2y\right)$
13.10 $z=\cos\left(3x^2-y^2\right)$	13.20 $z=x^2\cdot y^2$	13.30 $z=\sin\left(x^3y^3+4\right)$

Задание 14. Для функции $w=f(x,y,z)$ найти частные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$ в точке $M_0(x_o,y_o,z_o)$.

14.1	$\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$,	$M_0(5{,}2\ \ ,3)$	14.16	$\ln\left(x+\dfrac{y}{27}\right)$,	$M_0(1{,}2{,}1)$
14.2	$\sqrt{z}x^y$,	$M_0(1{,}2{,}4)$	14.17	$z/\sqrt{x^2+y^2}$,	$M_0(0{,}-1{,}1)$
14.3	$-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,	$M_0(1{,}2{,}2)$	14.18	$(\sin x)^{yz}$,	$M_0\left(\dfrac{\pi}{6},1{,}2\right)$
14.4	$\ln\left(x^2+\sqrt[3]{yz}\right)$,	$M_0(2{,}1{,}8)$	14.19	$\ln\left(x^2+2y^2-z^2\right)$,	$M_0(2{,}1{,}0)$
14.5	$\dfrac{z}{\sqrt{x^4+y^2}}$,	$M_0(2{,}3{,}25)$	14.20	$\sqrt[3]{x+y^2+z^2}$,	$M_0(3{,}4{,}2)$
14.6	$\sqrt[3]{x^2+y^2+z}$,	$M_0(3{,}2{,}1)$	14.21	$arctg\left(xy^2+z\right)$,	$M_0(2{,}1{,}0)$
14.7	$\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)$,	$M_0(1{,}1{,}1)$	14.22	$\arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}-z\right)$,	$M_0(2{,}5{,}0)$
14.8	$-3x/\sqrt{y^2+z^2}$,	$M_0(3{,}0{,}1)$	14.23	$x/\sqrt{x^2+y^2}$,	$M_0(1{,}0{,}1)$
14.9	$ze^{-\left(x^2+y^2\right)}$,	$M_0(0{,}0{,}1)$	14.24	$\ln\cos\left(x^2+y^2+z\right)$,	$M_0\left(0{,}0,\dfrac{\pi}{4}\right)$
14.10	$\dfrac{\sin(x-y)}{z}$,	$M_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$	14.25	$\sqrt{z}\sin(y/x)$,	$M_0(2{,}0{,}4)$
14.11	$\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$,	$M_0(4{,}1{,}4_o)$	14.26	$y/\sqrt{x^2+z^2}$,	$M_0(-1{,}1{,}0)$

14.12 $\quad xz/(x-y)$, $\quad M_0(3,1,1)$	14.27 $\quad arctg\,\dfrac{xz}{y^2}$, $\quad M_0(2,1,1)$
14.13 $\quad \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$, $\quad M_0\left(3,4,\dfrac{\pi}{2}\right)$	14.28 $\quad \ln\sin\left(x-2y+\dfrac{z}{4}\right)$, $\quad M_0(1,1/2,\pi)$
14.14 $\quad z\cdot e^{-xy}$, $\quad M_0(0,1,1)$	14.29 $\quad \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$, $\quad M_0(1,1,2)$
14.15 $\quad \arcsin\left(\sqrt{y}x\right)-z^2$, $\quad M_0(0,4,1)$	14.30 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad M_0(1,2,2)$

1.2 Решение типового варианта

Задание 1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение. а) если подставим предельное значение $x=-3$ в предел, то это приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель $(x+3)$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}.$$

б) в этом примере неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поэтому числитель и знаменатель дроби умножаем на сопряженное знаменателя:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+5x-6)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+6)/\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=$$

$$=\lim_{x\to1}(x+6)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=28.$$

Задание 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^2-4}{5x^3+3x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^2-4}{5x^3+3x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому разделим числитель и знаменатель на x^3 и применим теорему о пределах функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x^2-4}{5x^3+3x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)}=\frac{1+0-0}{5+0-0}=\frac{1}{5}.$$

Задание 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2=2\cdot 3^2=18.$

Задание 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+4}$.

Решение. При $x\to\infty$ состояние $\frac{2x+3}{2x-1}$ стремится к 1, а показатель степени $3x+4$ стремится к ∞, поэтому имеем неопределенность вида 1^{∞}.

Представим данную дробь следующим образом:

$$\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{2x-1+4}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1},$$

тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{3x+4}$.

Положим $\frac{2x-1}{4}=y$, отсюда

$$x=\frac{4y+1}{2},\qquad 3x+4=3\cdot\frac{4y+1}{2}+4=6y+\frac{11}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y+\frac{11}{2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{11}{2}}=e^6$.

Задание 5. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \textit{егер } x\le 1,\\ 2x, & \textit{егер } 1<x\le 2,\\ -x+3, & \textit{егер } x>2.\end{cases}$$

Решение. Функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента x. Область определения функции- множество всех действительных чисел. Каждая из функции $x^2+1,\ 2x,\ -x+3$ непрерывна соответственно в интервалах $(-\infty;1),\ (1;2),\ (2,+\infty)$.

Функция может иметь разрыв только в точках $x=1,\ x=2$.

Определим односторонние пределы в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2,\qquad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}2x=2.$$

Односторонние пределы равны. Значит, существует предел функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2.$

Значение функции в точке $x=1$: $f(x)=(x^2+1)\big|_{x=1}=2.$ Получили, что $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$. Следовательно, функция непрерывна в точке $x=1$.

Для точки $x=2$ найдем:

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}2x=4,\qquad \lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(-x+3)=1.$$

Так как односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x=2$ не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода. В точке $x=2$ скачок функции $\Delta = |1-4|-|-3| = 3.$

Задание 6. Найти производную функции $y=\dfrac{x^2-7x+3}{\sqrt{x^2+8x}}$.

Решение. Применяем формулу производной от частного двух функции:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - V'\cdot U}{V^2}.$$

$$y' = \left(\frac{x^2-7x+3}{\sqrt{x^3+8x}}\right)' = \frac{(x^2-7x+3)'\left(\sqrt{x^3+8x}\right)-\left(\sqrt{x^3+8x}\right)'(x^2-7x+3)}{x^3+8x} =$$

$$= \frac{(2x-7)\sqrt{x^3+8x}-\dfrac{3x^2+8}{2\sqrt{x^3+8x}}(x^2-7x+3)}{x^3+8x} = \frac{2(2x-7)(x^3+8x)-(3x^2+8)(x^2-7x+3)}{2(x^3+8x)\sqrt{x^3+8x}} =$$

$$= \frac{4x^4-14x^3+32x^2-112x-3x^4-8x^2+21x^3+56x-9x^2-24}{2(x^3+8x)\sqrt{x^3+8x}} == \frac{x^4+7x^3+15x^2-56x-24}{2(x^3+8x)\sqrt{x^3+8x}}.$$

Задание 7. Найти производную сложной функции $y=\left(5^{\cos 2x}-2\right)^4$.

Решение. Используем формулы производной от степенной, показательной и тригонометрической функции:

$$y' = ((5^{\cos 3x}-2)') = 4(5^{\cos 3x}-2)^3(5^{\cos 3x}-2)' = 4(5^{\cos 3x}-2)^3\cdot 5^{\cos 3x}\ln 5\cdot(\cos 3x)' =$$

$$= -12(5^{\cos 3x}-2)^3\cdot 5^{\cos 3x}\ln 5\cdot \sin 3x.$$

Задание 8. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=\left(x^2+3\right)\cos 2x$.

Решение. Прологарифмируем по основанию e обе части равенства:

$$\ln y = \cos 2x\cdot \ln\left(x^2+3\right).$$

Теперь дифференцируем обе части, считая $\ln y$ сложной функцией от переменной x:

$$(\ln y)' = (\sin 4x\cdot \ln(\cos x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\cos 2x)'\ln\left(x^2+3\right)+\left(\ln(x^2+3)\right)'\cdot\cos 2x = -2\sin 2x\cdot\ln(x^2+3)+\frac{x\cos 2x}{x^2+3}).$$

Производная степенно-показательной функции можно найти используя формулу:

$$(U^v)' = V\cdot U^{v-1}\cdot U' + U^v\cdot \ln U\cdot V';$$

$$y' = \cos 2x\cdot\left(x^2+3\right)^{\cos 2x-1}\cdot 2x + \left(x^2+3\right)^{\cos 2x}\cdot\ln\left(x^2+3\right)\cdot(-2\sin 2x);$$

$$y' = 2\left(x^2+3\right)^{\cos 2x-1}(x\cos 2x-(x^2+3)\cdot\ln\left(x^2+3\right)\cdot\sin 2x).$$

Задание 9. Найти производную функции: $\sin(x^3+y^3)-3x+2y=0$.

Решение. Функция задана в неявном виде. Чтобы найти производную y', надо дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'.

Имеем $(3x^2+3y^2\cdot y')\cos(x^3+y^3)-3+2y'=0$.

Из полученного равенства, связывающего x, y и y', находим производную y':

$$y'(3y^2\cos(x^3+y^3)+2)-3(1-x^2\cos(x^3+y^3))=0.$$

Откуда

$$y'=\frac{3(1-x^2\cos(x^3+y^3))}{2+3y^2\cos(x^2+y^3)}.$$

Задание 10. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функций $\begin{cases} x=\ln(2t-t^3) \\ y=arctg\,2t \end{cases}$.

Решение. Зависимость между переменными x и y задана параметрическими уравнениями. Чтобы найти искомую производную y', сначала найдем производные от x и y по t, затем применяем формулу:

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

Итак $x_t'=\frac{2-3t^2}{2t-t^3}$, $y_t'=\frac{2}{1+4t^2}$.

Подставляем эти данные в формулу и получаем:

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{1+\frac{2}{4t^2}}{\frac{3t^2-2}{t^3-2t}}=\frac{2\left(t^3-2t\right)}{\left(3t^2-2\right)\left(4t^2+1\right)}.$$

Задание 11. Исследовать функцию $y=\frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение. Исследование функции проведем по следующим пунктам:

а) Область определения функции

$$1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1\Rightarrow D(y)-(-\infty;1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

б) Функция является нечетной, так как $f(-x)=\frac{(-x)}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начало координат.

в) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$y=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow O(0,0)$- график функции проходит через начало координат.

г) Исследуем функцию на экстремум, используя второй достаточный признак экстремума: если в критической точке x_0 вторая производная отлична от нуля, то в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум при $f''(x_0)<0$ и минимум при $f''(x_0)>0$. Находим первую производную:

$$y' = \frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Отсюда критическими точками являются точки $x_1 = 1,\ \ x_2 = -1$ (y'' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

д). Исследуем функцию на выпуклость. Найдем вторую производную y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2)^2-(-2x)2(1-x^2)(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Получили, что $y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$.

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ \ x_3 = 1$. При переходе через точку $x_1 = 0$ вторая производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому точка O(0,0)-точка перегиба графика функции. Так как в точках $x_2 = -1,\ \ x_3 = 1$ функция не определена, то эти точки не являются точками перегиба. График выпуклый вверх на интервалах (-1;0) и (1; ∞); выпуклый вниз на интервалах (-∞; -1) и (0; 1).

е) Определим асимптоты графика функции. Вертикальные асимптоты

$$x = 1,\ x = -1.\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{1-x^2} = \infty,\ \ \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{1-x^2} = -\infty,\ \ \lim_{x\to -1-0}\frac{x}{1-x^2} = +\infty,\ \ \lim_{x\to -1+0}\frac{x}{1-x^2} = -\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты. Для этого находим следующие коэффициенты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(1-x^2)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, $y = 0$ - уравнение горизонтальной асимптоты.

ж) По результатам исследования построим график функции (см. рисунок 1).

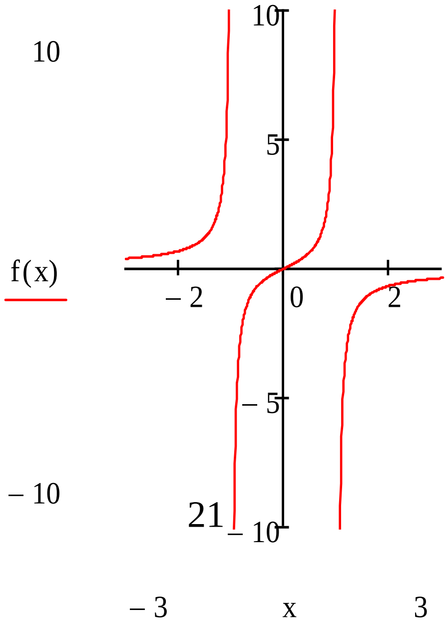

Рисунок 1

Задание 12. Для функции $z=\ln\left(x^2+y^4\right)$ найти:

а) $\Delta_y z, \Delta z$; б) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; в) dz.

Решение. Находим

а) $\Delta_y z = f(x, y+oy) - f(x,y) = \ln\left[x^2+(y+\Delta y)^4\right] - \ln\left(x^2+y^4\right) = \ln\frac{x^2+(y+\Delta y)^4}{x^2+y^4}$;

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \ln\left[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^4\right] - \ln\left(x^2+y^4\right) = \ln\frac{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^4}{x^2+y^4}.$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^4}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}$;

в) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2+y^4}dx + \frac{4y^3}{x^2+y^4}dy.$

Задание 13. Дана функция $z=\cos\left(4x^2-3y^2\right)$.

Найти:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; б) dz; в) убедиться, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\left(4x^2+3y^2\right)\cdot 8x = -8x\sin\left(4x^2-3y^2\right)$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\left(4x^2-3y^2\right)\cdot(-6y) = 6y\sin\left(4x^2-3y^2\right)$.

Теперь найдем производные второго порядка и смешанную производную:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -8\sin\left(4x^2-3y^2\right) - 8x\cos\left(4x^2-3y^2\right)\cdot 8x = -8\sin\left(4x^2-3y^2\right) - 64x^2\cos\left(4x^2-3y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6\sin\left(4x^2-3y^2\right) + 6y\cos\left(4x^2-3y^2\right)\cdot(-6y) = 6\sin\left(4x^2-3y^2\right) - 36y^2\cos\left(4x^2-3y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -8x\cos\left(4x^2-3y^2\right)\cdot(-6y) = 48xy\cos\left(4x^2-3y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 6y\cos\left(4x^2-3y^2\right)\cdot 8x = 48xy\cos\left(4x^2-3y^2\right).$$

Из последних двух равенств видно, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

б) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -8x\sin\left(4x^2-3y^2\right)dx + 6y\sin\left(4x^2-3y^2\right)dy.$

Задание 14. Для функций $w = arctg\left(x^2 y^3 + 3z\right)$ найти частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ в точке $M_0(1, -2, 0)$.

Решение. Находим

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{M_0} = \frac{1}{1 + \left(x^2 y^3 + 3z\right)^2} \cdot 2xy^3\Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot (-2)^3}{1 + (-8)^2} = -\frac{16}{65};$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{1}{1 + \left(x^2 y^3 + 3z\right)^2} \cdot 2x^2 y^3\Big|_{M_0} = \frac{3 \cdot (-2)^3}{65} = -\frac{24}{65};$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_0} = \frac{1}{1 + \left(x^2 y^3 + 3z\right)^2} \cdot 3\Big|_{M_0} = \frac{3}{65}.$$

1.3 Теоретические вопросы

1. Понятие функции. Способы задания, свойства, классификация функции.
2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности Предел функции.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Теоремы о бесконечно малых.
4. Теорема о пределах. Односторонние пределы. Первый и второй замечательные пределы.
5. Сравнение бесконечно малых. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых.
6. Непрерывные функции. Точки разрыва, их классификация.
7. Определение производной, ее физический и геометрический смысл. Связь дифференцируемости и непрерывности.
8. Основные правила дифференцирования.
9. Производные основных элементарных функции.
10. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.
11. Производные функции, заданных неявно и параметрическ Уравнения касательной и нормали к графику функции.
12. Дифференциал, его геометрический смысл и применение.
13. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
14. Правило Лопиталя. Теоремы о возрастании и убывании функции.
15. Экстремумы функции одной переменной. Необходимые и достаточные условия экстремума.
16. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.
17. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции.

18. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.
19. Частные приращения и частные производные.
20. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия.

Список литературы

1. Данко П.Е., Попов А.Т., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, в 2ч.-М.: Высшая школа, 2003.-ч.1,2.-352 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3ч. А.П.Рябушко, В.В.Барахатов, и др./ Под ред. А.П.Рябушко.- Минск: Высшая школа, 2006.-ч.2,3.-396 с.
3. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика (оқу құралы).- Алматы: ҚБТУ 2004. - 440 б.
4. Хасейнов К.А. Каноны математики. Учебник.- Алматы, 2003.-636 с.

Содержание

Сводный план 2013 г., поз. 187

Дуйсек Абдулмансур Коптлеуович
Абдулланова Жанар Советкалиевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Методические указания к расчетно-графическим работам
для специальности 5В060200
Часть 1

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К.Молдабекова

Подписано в печать_______ Формат 6084 1/16
Тираж _25_экз. Бумага типографская №1
Объем 1,5 уч.-из.л. Заказ______ цена 750 тг.

Копировально-множительное бюро
некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул.Байтурсынова, 126