



**Коммерциялық емес
акционерлік қоғам**

АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА
ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТИ

Жоғары математика
кафедрасы

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУ

Есептеу-сызба жұмыстарға әдістемелік нұсқаулар

5B060200 мамандығына арналған

1-бөлім

Алматы 2014

Құрастырушылар: А.К. Дүйсек, Ж.С. Абдулланова. Математикалық талдау. Есептеу-сызба жұмыстарға әдістемелік нұсқаулар (5B060200 мамандығына арналған). 1-бөлім.- Алматы: АЭЖБУ, 2013- 24б.

«Информатика» мамандығында оқитын студенттер үшін есептеу-сызбалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. «Математикалық талдау» пәнінің №1 типтік есептеулерінен тұрады. Бағдарламаның теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Кестелер- 14, без.- 1, әдеб.көрсеткіші – 6 атау.

Пікір беруші: доцент М.В. Башкиров

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2013 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2014 ж.

Кіріспе

Бұл әдістемелік нұсқау 5B060200 мамандығының студенттеріне оқытатын «Математикалық талдау» курсы бойынша есептеу-сызбалық жұмыстарының 1-ші бөлімі болып табылады.

Есептеу-сызбалық жұмыс «Математикалық талдау» курсы бойынша 5B060200 мамандығының студенттеріне арналған типтік бағдарламаға сәйкес жазылған. Бұл ЕСЖ оқытушылар мен студенттерге қолдануға ұсынылады.

Осы ЕСЖ көмегімен аудиториялық сабақтарда студенттердің өзіндік жұмыс жасауына және оқытушылардың студенттерге жеке үй тапсырмаларын беруіне ыңғайлы.

Бұл әдістемелік нұсқауда функциялардың шектері теориясы, үзіліссіздігі, функцияның дифференциалдануы теориясының кейбір сипаттамалары қамтылған.

ЕСЖ әрқайсысы 30 нұсқаудан 14 тапсырмадан тұрады. Соңында типтік нұсқаудың тапсырмаларының толық шешімі көрсетілген. Сонымен қатар, берілген курс бойынша студенттердің меңгеруге тиісті негізгі теориялық сұрақтары берілген.

ЕСЖ тапсырмалары жұқа дәптерде орындалады, әрбір нөмірдің екінші цифрі нұсқа нөмірін көрсетеді.

1 Есептеу-сызбалық жұмыс №1. Талдауға кіріспе. Бір және көп айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері

Мақсаты: студенттердің теориялық білімдерін шектер теориясының негізгі қасиеттері бойынша функциялардың шектерін есептеуге үйрету. Сонымен қатар функция үзіліссіздігінің негізгі анықтамалары мен функция дифференциалдануының формулаларын есеп шығаруға қолдана білуге машықтандыру. Туынды көмегімен функцияларды зерттеуді үйрету.

1.1 Есептік тапсырмалар

Тапсырма 1. Шектерді табу керек.

1.1 $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 25}$	1.2 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5}$	1.3 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x}$
1.4 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$	1.5 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}$	1.6 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}$
1.7 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+6}}{x^2 + 6x + 8}$	1.8 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3+2x}}{x + x^2}$	1.9 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 3x - 10}$
1.10 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x}}$	1.11 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-4x}}$	1.12 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}$
1.13 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{x+16}}{x^2 - 5x - 50}$	1.14 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x^2 - 2x - 15}$	1.15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 35}{\sqrt{x+11} - \sqrt{1-x}}$
1.16 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{3x-17} - \sqrt{x-5}}$	1.17 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 5x - 50}$	1.18 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 16}$
1.19 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 14}{x^2 - x - 6}$	1.20 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 9}{x^2 + 3x}$	1.21 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 16}{\sqrt{x+5} - \sqrt{9+2x}}$
1.22 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+10}}$	1.23 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}}{x^2 - 7x + 12}$	1.24 $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{2x+13}}{x^2 + 6x}$
1.25 $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}{x + x^2 - 2}$	1.26 $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x+2}}{x + 3x - 10}$	1.27 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x - 36}{\sqrt{x+5} - \sqrt{9+2x}}$
1.28 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$	1.29 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 10}{x^2 - 1}$	1.30 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

Тапсырма 2. Шектерді табу керек.

2.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 5}{3x^2 - x + 6}$	2.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 5}{3x - 2x^4 + 6}$	2.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x^3 - 6}{7x^3 - x + 1}$
2.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 9}{2x^3 + 3x + x^2}$	2.5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^4 + 5}{x^3 - 3x - 5x^4}$	2.6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 + 5x^3}{x^4 - x^5 + 2}$
2.7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5x}{-x^5 + 2x^2 + 3}$	2.8 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - x + 3}{2x^3 + 3x^2 - 2x^4}$	2.9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x^2 - 2}{3x^3 - 5x + 4}$
2.10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 2x^2 + 3}{7 - 2x^4 - 9x^5}$	2.11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x - x^4}{1 + 3x^2 + 2x^5}$	2.12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 3}{2x^3 + x^2 - 7}$
2.13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x^3 - 3}{x^3 + 3x^2 - 1}$	2.14 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 - 9}{x^2 - x + 5x^3}$	2.15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + 5}{-2x^4 + 3x^2 + 6}$
2.16 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x^4 - 12}{3x^2 - x + 4x^4}$	2.17 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 5x^2 - 10}{3x^2 - x^3 + 4x^4}$	2.18 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 16}$
2.19 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x + 5}{3x^6 - 2x^4 + 7}$	2.20 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x^3 - 6x^4}{7x^3 - x + 1}$	2.21 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 9x^3}{2x^3 + 3x + 2}$
2.22 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^4 + 5}{x^3 - 3 - 5x^5}$	2.23 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^3 + 5x^5}{x^4 - 6x^5 + 2}$	2.24 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^2 + 5x}{9x^5 - x^2 + 6}$
2.25 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 - 12x^4}$	2.26 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{7x^3 - 5x + 1}$	2.27 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^2 + 3}{7 + 5x^4 - 7x^5}$
2.28 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 6}{x^2 - 4x + 5}$	2.29 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x^3 + 6}{x^2 - x + 5}$	2.30 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 5}{3x^3 - x + 6}$

Тапсырма 3. Шектерді табу керек.

3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 2x}$	3.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{3x^2}$	3.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x \cdot \sin x}{2x^2}$
3.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}{x^2}$	3.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{2x}$	3.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$
3.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 2x \operatorname{tg} 4x}$	3.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \operatorname{tg} 2x}{5x^2}$	3.9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 3x}$
3.10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x \sin 6x}$	3.11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 3x}$	3.12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x \sin 4x}$
3.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cos^2 x}{x^2}$	3.14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \arcsin 5x}$	3.15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x \sin 4x}$
3.16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2 \cos 3x}$	3.17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{2x \operatorname{tg} x}$	3.18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sin 2x \operatorname{tg} x}$

3.19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$	3.20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg} x}{3x^2}$	3.21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{arctg} 5x}{6x^2}$
3.22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 5x}{\sin^2 2x}$	3.23 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{4x^2}$	3.24 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\arcsin x \operatorname{tg} 6x}$
3.25 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3x}{2} \operatorname{arctg} 2x}{6x^2}$	3.26 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} 3x}$	3.27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x \arcsin 6x}$
3.28 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 5x}$	3.29 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$	3.30 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{4x}$

Тапсырма 4. Шектерді табу керек.

4.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{4x}\right)^{-5x}$	4.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{-5x}$	4.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-5x}$
4.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{4x+2}$	4.5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{2+2x}\right)^{5+x}$	4.6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x+1}$
4.7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-2}\right)^{-2x+5}$	4.8 $\lim_{x \rightarrow 1} (4x-3)^{\frac{x}{x-1}}$	4.9 $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{3x}{x-2}}$
4.10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{-2x}$	4.11 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{5}{1-x}}$	4.12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{3x}$
4.13 $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{3x}{2x-4}}$	4.14 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x-1}\right)^{2x+5}$	4.15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{1+4x}\right)^{-2x}$
4.16 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^{-2x}$	4.17 $\lim_{x \rightarrow 1} (5x-4)^{\frac{3x}{5x-5}}$	4.18 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^{5x}$
4.19 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{5x}$	4.20 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{-3x}$	4.21 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{-x+2}$
4.22 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+2x}{1+2x}\right)^{2+x}$	4.23 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+2}\right)^{2x-1}$	4.24 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+7}\right)^{x+5}$
4.25 $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-7)^{\frac{4x}{x-2}}$	4.26 $\lim_{x \rightarrow -2} (x+3)^{\frac{3x}{x+2}}$	4.27 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{5x}$
4.28 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{2x}\right)^{3x}$	4.29 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{3x}$	4.30 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{-2x}$

Тапсырма 5. Берілген функцияны үзіліссіздікке зерттеп, графигін салу керек.

5.1	$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{егер } x < -1, \\ x^2 - 1, & \text{егер } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{егер } x \geq 1. \end{cases}$	5.2	$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{егер } x \leq -1, \\ x^2 + 1, & \text{егер } -1 \leq x < 1, \\ -x+4, & \text{егер } x \geq 1. \end{cases}$
5.3	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x \leq 2, \\ (x-2)^2, & \text{егер } 2 < x < 3, \\ 1-x, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$	5.4	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{егер } 0 < x < 2, \\ x+3, & \text{егер } x \geq 2. \end{cases}$
5.5	$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{егер } x \leq -1, \\ x^2, & \text{егер } -1 < x \leq 2, \\ x+3, & \text{егер } x \geq 2. \end{cases}$	5.6	$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{егер } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{егер } 0 \leq x < \pi, \\ x-2, & \text{егер } x > \pi. \end{cases}$
5.7	$f(x) = \begin{cases} -(x+2), & \text{егер } x \leq -2, \\ (x+1)^2, & \text{егер } -2 < x \leq 0, \\ x+1, & \text{егер } x > 0. \end{cases}$	5.8	$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{егер } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} 2x, & \text{егер } 0 < x \leq \frac{\pi}{8}, \\ 2, & \text{егер } x > \frac{\pi}{8}. \end{cases}$
5.9	$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x^2 - 1, & \text{егер } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{егер } x > 1. \end{cases}$	5.10	$f(x) = \begin{cases} -4x, & \text{егер } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{егер } 0 < x < 4, \\ x-2, & \text{егер } x \geq 4. \end{cases}$
5.11	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x^2}, & \text{егер } x \leq 1, \\ x, & \text{егер } 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, & \text{егер } x \geq 2. \end{cases}$	5.12	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{егер } x \leq 0, \\ x-2, & \text{егер } 0 < x < 3, \\ 1, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$
5.13	$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x+1, & \text{егер } 0 \leq x \leq 3, \\ 4, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$	5.14	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{егер } x \leq -\pi, \\ x^2 - \pi^2, & \text{егер } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{егер } x \geq \pi. \end{cases}$

$5.15 \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{егер } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3, & \text{егер } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	$5.16 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{егер } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{егер } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{егер } x > \pi. \end{cases}$
$5.17 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{егер } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{егер } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	$5.18 \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x, & \text{егер } 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{егер } x \geq \pi. \end{cases}$
$5.19 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{егер } x \leq 2, \\ 5 - x, & \text{егер } 2 < x \leq \pi, \\ \sin x, & \text{егер } x > \pi. \end{cases}$	$5.20 \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{егер } x < 0, \\ x^2 - 12, & \text{егер } 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x+2}, & \text{егер } x > 4. \end{cases}$
$5.21 \quad f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{егер } x \leq 2, \\ (x+1)^2, & \text{егер } 2 < x \leq 0, \\ x^2 - 1, & \text{егер } x > 0. \end{cases}$	$5.22 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{егер } x \leq 0, \\ \sin 2x, & \text{егер } 0 < x \leq \frac{\pi}{8}, \\ 1, & \text{егер } x > \frac{\pi}{8}. \end{cases}$
$5.23 \quad f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{егер } x \leq 1, \\ x^2 - 1, & \text{егер } 1 < x \leq 2, \\ 3, & \text{егер } x > 2. \end{cases}$	$5.24 \quad f(x) = \begin{cases} -4x, & \text{егер } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1}, & \text{егер } 1 < x < 3, \\ x - 1, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$
$5.25 \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{егер } x \leq 1, \\ x, & \text{егер } 1 < x < 3, \\ x^2 - 2, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$	$5.26 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{егер } x \leq 0, \\ x, & \text{егер } 0 < x < 4, \\ 4, & \text{егер } x \geq 4. \end{cases}$
$5.27 \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{егер } 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{егер } x > 1. \end{cases}$	$5.28 \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{егер } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{егер } 0 < x < 3, \\ x^2 - 5, & \text{егер } x \geq 3. \end{cases}$

5.29	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{егер } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{егер } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	5.30	$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{егер } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{егер } 0 < x \leq \pi, \\ x - \pi, & \text{егер } x > \pi. \end{cases}$
------	---	------	--

Тапсырма 6. Функцияның $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

6.1	$y = 5\sqrt{3x+2} + \frac{2}{\sqrt{x^3+x^2-11}}$	6.2	$y = (x^3 - 4x)\sqrt{x^2 + 5x - 2}$
6.3	$y = (5 + \cos x)\sqrt{5x^3 + x}$	6.4	$y = \sqrt{x^2 + \sin 3x} + \sqrt[3]{2 - \cos x^3}$
6.5	$y = (2 + \sin 3x)\sqrt{x^3 + 2x^5}$	6.6	$y = \sqrt{x^2 + \cos 4x} + \sqrt[3]{5 + \operatorname{tg} x^3}$
6.7	$y = \frac{x + \cos 3x}{2 - \cos 3x}$	6.8	$y = \frac{2x + 5}{\sqrt{x^3 + 6x - 3}}$
6.9	$y = \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$	6.10	$y = \frac{3 - 2x}{\sqrt{5 - 2x + x^2}}$
6.11	$y = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt{x^3 + 6x + 2}}$	6.12	$y = \frac{3x + 4}{\sqrt{x^5 + 3x^2}}$
6.13	$y = \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^3 - 8}}$	6.14	$y = \frac{3x^2 + 4x}{\sqrt{x^3 + 3x}}$
6.15	$y = \frac{4x - 1}{\sqrt{x^3 + x - 6}}$	6.16	$y = \frac{x^2 + 2x - 5}{\sqrt{x^2 + 3}}$
6.17	$y = \frac{\sqrt{x^3 + 4x + 1}}{x^2 - 4}$	6.18	$y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6}{\sqrt{9x + x^2}}$
6.19	$y = \ln \sqrt{\frac{2^x + 6}{2^x - 6}}$	6.20	$y = \frac{3x - 2}{\sqrt{x^4 + 3x^2 - 6}}$
6.21	$y = \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 5}}$	6.22	$y = \frac{3x - 4}{\sqrt{x^3 + x + 3}}$
6.23	$y = x^4 \sqrt{1 + 3x^2}$	6.24	$y = \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$
6.25	$y = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^4 + 2x + 5}}$	6.26	$y = \frac{x^2 + 5x - 2}{\sqrt{x^2 - 8x}}$
6.27	$y = \frac{2x^3 + 5x}{\sqrt{x^2 + 3x}}$	6.28	$y = \frac{5x - 2}{\sqrt{x^3 + x^2 - 3}}$

6.29	$y = \frac{x^2 + 3x - 7}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$	6.30	$y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}{x^2 - 4x + 3}$
------	--	------	--

Тапсырма 7. Функцияның туындысын табу керек.

7.1	$y = (3^{\sin 2x} + 5)^3$	7.2	$y = 2tg^3(x^2 + 1)$
7.3	$y = (\log_3(1 + x^2) + 3^{tgx})^4$	7.4	$y = (e^{tg 2x} + \ln 4x)^5$
7.5	$y = (\log_2(x + 3x^2) + 2^{ctgx})^3$	7.6	$y = (e^{2x} + \ln(4x + 2))^3$
7.7	$y = (\sqrt{x + x^2} + \ln 3x)^3$	7.8	$y = [2^{tgx} + \ln(1 - 3x^3)]^5$
7.9	$y = 5^x \ln(e^{-2x} + 1)$	7.10	$y = \cos 2x - x^2 \sin 3x$
7.11	$y = (2^{\sin 2x} + tg^2 x)^4$	7.12	$y = (2^{ctg(x+1)} + \sqrt{x-2})^4$
7.13	$y = (5^{\sin 4x} + ctg^3 x)^2$	7.14	$y = (3^{tg\sqrt{x}} + \sqrt[3]{\sin x})^4$
7.15	$y = (e^{\cos 2x} + x^2)^3$	7.16	$y = (3^{\ln 4x} - \cos \sqrt{x})^3$
7.17	$y = (e^{\cos 4x} - x^4)^3$	7.18	$y = (\ln(\cos 2x + 3) + tg^3 x)^2$
7.19	$y = (\sqrt{x^2 + 3} \cdot \sin^2 4x)^3$	7.20	$y = \sqrt[5]{1 + e^{-5x} \cdot \cos^2 3x}$
7.21	$y = (3^{\cos x} + \sqrt{2 - x^3})^7$	7.22	$y = 3^x \ln(e^{2x^2} + x)$
7.23	$y = \frac{5ctgx}{\sin^3 x}$	7.24	$y = (e^{\sin 2x} + ctgx)^2$
7.25	$y = (3^{tg(x+1)} \sqrt{x^2 - 3})^5$	7.26	$y = (4^{\sin 3x} + tgx)^3$
7.27	$y = (2^{ctg\sqrt{x}} + \sqrt[5]{\cos x})^3$	7.28	$y = (3^{tg 2x} + x^4)^3$
7.29	$y = (4^{\ln 2x} - 3 \sin \sqrt{x})^2$	7.30	$y = (3^{\sin 2x} - x^3)^4$

Тапсырма 8. Берілген функцияны дифференциалдау керек.

8.1	$y = x^{\sin x}$	8.2	$y = x^{\frac{2}{x}}$
8.3	$y = x^{-x}$	8.4	$y = (\arctg x^{\ln x})$
8.5	$y = (\arctg x^{2x})$	8.6	$y = (1 - x^2)^x$
8.7	$y = (tgx)^{\sin x}$	8.8	$y = (\sin x)^x$
8.9	$y = (\sin x)^{x^3}$	8.10	$y = (x + 2)^{\ln x}$
8.11	$y = (1 + x^2)^x$	8.12	$y = (ctg 3x)^{\sin 3x}$
8.13	$y = (\ln x)^{tgx}$	8.14	$y = (\cos x)^{\sin x}$
8.15	$y = (tgx)^{\sin 2x}$	8.16	$y = (x^2 + \ln x)^{\cos x}$

8.17	$y = (x + x^2)^{\sin x}$	8.18	$y = (1 - \sqrt{x})^{\arctg x}$
8.19	$y = (x^3 + 1)^x$	8.20	$y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$
8.21	$y = (\arccos x)^{3x}$	8.22	$y = (1 + x)^{x^2}$
8.23	$y = (\cos 2x)^{\sin x}$	8.24	$y = (\arcsin x)^x$
8.25	$y = (\ln x)^{x^2}$	8.26	$y = (\ln x + 2)^x$
8.27	$y = (1 - x^2)^{\sin x}$	8.28	$y = (\tg 4x)^{\sin 4x}$
8.29	$y = (x)^{\lg 2x}$	8.30	$y = (x^3 + 1)^{\sin x}$

Тапсырма 9. Берілген функцияны дифференциалдау керек.

9.1	$\tg \frac{x}{y} + 2x - y = 0$	9.2	$3x + y + \arccos y = 0$
9.3	$ctg x + xy^3 - 2x = 0$	9.4	$(e^x - 1)(e^y - 1) = 0$
9.5	$\ln(y^2 + x) = e^y$	9.6	$x^2 - y^3 - 2xy = 0$
9.7	$x^2 - y^2 + 5\sin(x + y) = 0$	9.8	$x^3 y^2 - 3\ln(x + y) = 5$
9.9	$x^3 - y^2 + 2^y \tg x = 0$	9.10	$y + \sin 3x = \tg(x + y)$
9.11	$3x + ye^x - 2e^x = 0$	9.12	$\ln(x^2 - y^2) + tgy = 0$
9.13	$x \cos 2y - \tg x = 0$	9.14	$x^2 + y^2 + \ln(2x + 3y) = 0$
9.15	$e^x + x \ln y - 3y = 0$	9.16	$\ln x + y \tg x = 0$
9.17	$e^{2x} - e^{2y} - xy^2 = 0$	9.18	$3x + 2y + \sin(x - y) = 0$
9.19	$x + \ln y + \sqrt{3x - 4y} = 0$	9.20	$x^2 + \ln y + e^{-x} - e^{2x} = 0$
9.21	$\ln(y + x^2) = e^y$	9.22	$x^3 + y^2 + 5xy = 0$
9.23	$3x^2 + 2y^2 + 3\sin(x - 2y) = 0$	9.24	$x^3 + y^2 + \ln(xy) = 0$
9.25	$x^2 + 2y^2 + e^y \sin x = 0$	9.26	$x + \sin 2y = ctg(x + y)$
9.27	$3y + e^x - e^{2y} = 0$	9.28	$\ln(x^2 + y^2) + ctgy = 0$
9.29	$x \sin(2 + y) + ctgx = 0$	9.30	$x^3 - y^2 + \ln(x - 2y) = 0$

Тапсырма 10. Берілген функцияны дифференциалдау керек.

10.1	$\begin{cases} x = t^2 + \tg 2t \\ y = 3t + \ln t \end{cases}$	10.2	$\begin{cases} x = t - 2t^2 \\ y = 2t^2 + t^4 + 2 \end{cases}$
------	--	------	--

10.3	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$	10.4	$\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 2} \\ y = \frac{t + 3}{\sqrt{t^3 - 2}} \end{cases}$
10.5	$\begin{cases} x = \frac{t - 3}{t + 2} \\ y = \frac{t^2 + 3}{t - 5} \end{cases}$	10.6	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t \\ y = \frac{3}{1 + 4t^2} \end{cases}$
10.7	$\begin{cases} x = t^3 + \ln t \\ y = t^2 + 2t^4 \end{cases}$	10.8	$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = t g t^2 \end{cases}$
10.9	$\begin{cases} x = \sin^3(3 + t) \\ y = \cos(3 - t) \end{cases}$	10.10	$\begin{cases} x = t^2 + \ln t \\ y = 3t + 4t^3 \end{cases}$
10.11	$\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$	10.12	$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 3 \sin t \end{cases}$
10.13	$\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	10.14	$\begin{cases} x = \ln(2 + t^3) \\ y = \cos 2t \end{cases}$
10.15	$\begin{cases} x = t^4 + 2t \\ y = t^2 + \ln t \end{cases}$	10.16	$\begin{cases} x = 3^t + \sin t \\ y = 3^t - \cos t \end{cases}$
10.17	$\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = 4 \sin 3t \end{cases}$	10.18	$\begin{cases} x = \sqrt{2 + t^3} \\ y = 2 \cos t \end{cases}$
10.19	$\begin{cases} x = \sqrt{e^t + t^2} \\ y = \sin 5t \end{cases}$	10.20	$\begin{cases} x = \sin(t^2 + 1) \\ y = t g 2t \end{cases}$
10.21	$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 3}{t + 2} \\ y = \frac{t + 3}{t^2 - 5} \end{cases}$	10.22	$\begin{cases} x = t g 2t \\ y = \frac{4}{1 + 3t^2} \end{cases}$
10.23	$\begin{cases} x = t^2 - \ln t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$	10.24	$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t^2 \\ y = \operatorname{arctg} t^2 \end{cases}$
10.25	$\begin{cases} x = \sin(2 + t^3) \\ y = \cos(4 - t^2) \end{cases}$	10.26	$\begin{cases} x = t^3 + \sqrt{t} \\ y = t - 4t^3 \end{cases}$
10.27	$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$	10.28	$\begin{cases} x = t^2 \ln t \\ y = t^2 - 2 \sin t \end{cases}$
10.29	$\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$	10.30	$\begin{cases} x = \sin(2 + t^3) \\ y = \cos(2 + t^3) \end{cases}$

Тапсырма 11. Берілген функцияны зерттеп, графигін салу керек.

11.1 $y = \frac{x^2 + 2}{x}$	11.2 $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$	11.3 $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
11.4 $y = \frac{x}{4 - x^2}$	11.5 $y = \frac{x^2}{2 - x}$	11.6 $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$
11.7 $y = x - \frac{x}{2x + 1}$	11.8 $y = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$	11.9 $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$
11.10 $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$	11.11 $y = \frac{3x}{4 + x^2}$	11.12 $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$
11.13 $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$	11.14 $y = \frac{x^2 + 6}{x}$	11.15 $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$
11.16 $y = \frac{2x}{x^2 - 2}$	11.17 $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 3}$	11.18 $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$
11.19 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$	11.20 $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$	11.21 $y = \frac{x^2}{x - 2}$
11.22 $y = \frac{x + 2}{x^2 - 2}$	11.23 $y = x - \frac{2x}{x + 2}$	11.24 $y = \frac{x^2 + 3}{x - 3}$
11.25 $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$	11.26 $y = \frac{x}{x^2 - 2}$	11.27 $y = \frac{2x}{4 - x^2}$
11.28 $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}$	11.29 $y = \frac{x}{x^2 - 4}$	11.30 $y = \frac{x^2 + 3}{x^2}$

Тапсырма 12. Берілген $z = f(x, y)$ функциясы үшін

a) $\Delta yz, \Delta z$; b) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$; c) dz табу керек.

12.1 $z = e^{x^2 - y^2}$	12.11 $z = \text{ctg}(4x + 9y)$	12.21 $z = \sin(x^2 + 9y)$
12.2 $z = \text{ctg}(x + 5y)$	12.12 $z = \text{tg}(5x + 4y)$	12.22 $z = e^{x^2 + y^2}$
12.3 $z = \text{tg}(x + y^2)$	12.13 $z = \cos(x^4 + 3y^2)$	12.23 $z = \text{ctg}(3x + 2y)$
12.4 $z = \ln(x^4 + 2y^3)$	12.14 $z = \sqrt{4x^3 + y^2}$	12.24 $z = \text{tg}(x^2 + y)$
12.5 $z = \cos(7x + y)$	12.15 $z = 7^{x^2 + y^2}$	12.25 $z = \ln(x^2 + y^2)$

12.6 $z = \sin(x^2 + y^2)$	12.16 $z = e^{x^2 - y^2}$	12.26 $z = \cos(7x + y)$
12.7 $z = \cos(x^2 + y^2)$	12.17 $z = \operatorname{ctg}(2x + y)$	12.27 $z = \sin(x^2 + y^3)$
12.8 $z = \sin\sqrt{4x + y^2}$	12.18 $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$	12.28 $z = \sin(x^3 + 2x^4)$
12.9 $z = 9^{x^2 + y^2}$	12.19 $z = \ln(x + y^2)$	12.29 $z = \sqrt{7x^2 + y}$
12.10 $z = e^{x^2 + y^2}$	12.20 $z = \cos(3x + 8y)$	12.30 $z = 5^{x^2 - y^2}$

Тапсырма 13. $z = f(x, y)$ функциясы берілген.

Табу керек:

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; b) dz ; c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y \partial x}$ екендігін тексеру керек.

13.1 $z = (x^2 - 2y)^5$	13.11 $z = (3x + 2y)^9$	13.21 $z = (x - y^2)^2$
13.2 $z = (4x - y^3)^2$	13.12 $z = (5x^2 - 3y^2)^3$	13.22 $z = (2x + y)^7$
13.3 $z = (5x^2 + 2y)^4$	13.13 $z = (x^2 - 4y)^2$	13.23 $z = (x - 3y)^4$
13.4 $z = (2x^3 - y)^2$	13.14 $z = e^{2^{xy-4}}$	13.24 $z = (3x^2 - 2y^3)^3$
13.5 $z = (4x^2 - 5y^2)^5$	13.15 $z = \cos(xy^2)$	13.25 $z = e^{2x^2 - y^2}$
13.6 $z = e^{x^2 + y^2}$	13.16 $z = e^{x + y^2}$	13.26 $z = \frac{y}{x^2}$
13.7 $z = (4x + y)^9$	13.17 $z = e^{x^3 - y^3}$	13.27 $z = x^3 y^5$
13.8 $z = \cos(x - 5y)$	13.18 $z = \cos(xy^2)$	13.28 $z = e^{x^2 + y^2}$
13.9 $z = \sin(xy)$	13.19 $z = \sin(x^2 - y)$	13.29 $z = \sin(x^2 y)$
13.10 $z = \cos(3x^2 - y^2)$	13.20 $z = x^2 \cdot y^2$	13.30 $z = \sin(x^3 y^3 + 4)$

Тапсырма 14. Берілген $w = f(x, y, z)$ функциясы үшін $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ дербес туындыларын берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде есептеу керек.

14.1	$\ln(x^2 + y^2 - z^2),$	$M_0(5, 2, 3)$	14.16	$\ln\left(x + \frac{y}{27}\right),$	$M_0(1, 2, 1)$
14.2	$\sqrt{z}x^y,$	$M_0(1, 2, 4)$	14.17	$z/\sqrt{x^2 + y^2},$	$M_0(0, -1, 1)$
14.3	$-\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$	$M_0(1, 2, 2)$	14.18	$(\sin x)^{yz},$	$M_0\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)$
14.4	$\ln(x^2 + \sqrt[3]{yz}),$	$M_0(2, 1, 8)$	14.19	$\ln(x^2 + 2y^2 - z^2),$	$M_0(2, 1, 0)$
14.5	$\frac{z}{\sqrt{x^4 + y^2}},$	$M_0(2, 3, 25)$	14.20	$\sqrt[3]{x + y^2 + z^2},$	$M_0(3, 4, 2)$
14.6	$\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z},$	$M_0(3, 2, 1)$	14.21	$\text{arctg}(xy^2 + z),$	$M_0(2, 1, 0)$
14.7	$\ln(\sqrt{x} + \sqrt{z}),$	$M_0(1, 1, 1)$	14.22	$\arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right),$	$M_0(2, 5, 0)$
14.8	$-3x/\sqrt{y^2 + z^2},$	$M_0(3, 0, 1)$	14.23	$x/\sqrt{x^2 + y^2},$	$M_0(1, 0, 1)$
14.9	$ze^{-(x^2 + y^2)},$	$M_0(0, 0, 1)$	14.24	$\ln \cos(x^2 + y^2 + z),$	$M_0\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$
14.10	$\frac{\sin(x - y)}{z},$	$M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$	14.25	$\sqrt{z} \sin(y/x),$	$M_0(2, 0, 4)$
14.11	$\ln(x^2 + y^2 - z^2),$	$M_0(4, 1, 4_0)$	14.26	$y/\sqrt{x^2 + z^2},$	$M_0(-1, 1, 0)$
14.12	$xz/(x - y),$	$M_0(3, 1, 1)$	14.27	$\text{arctg} \frac{xz}{y^2},$	$M_0(2, 1, 1)$
14.13	$\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos z},$	$M_0\left(3, 4, \frac{\pi}{2}\right)$	14.28	$\ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right),$	$M_0(1, 1/2, \pi)$
14.14	$z \cdot e^{-xy},$	$M_0(0, 1, 1)$	14.29	$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z},$	$M_0(1, 1, 2)$
14.15	$\arcsin(\sqrt{yx}) - z^2,$	$M_0(0, 4, 1)$	14.30	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$	$M_0(1, 2, 2)$

1.2 Типтік нұсқаның шешуі

Тапсырма 1. Берілген шектерді табу керек

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{\sqrt{x+3} - 2}.$$

Шешуі. а) егер шектің мәнін қойсақ түрі $\frac{0}{0}$ анықталмағандыққа келеміз. Оны ашу үшін алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп, ортақ көбейткіш $(x+3)$ -ге қысқартамыз:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}.$$

б) бұл мысалда түрі $\frac{0}{0}$ анықталмағандыққа кезігеміз. Сондықтан бөлшектің алымы мен бөлімін бөлімнің түйіндесіне көбейтеміз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 5x - 6)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+6)(\sqrt{x+3} + 2) = 28. \end{aligned}$$

Тапсырма 2. Берілген шекті табу керек $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^2 - 4}{5x^3 + 3x - 2}$.

Шешуі. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^2 - 4}{5x^3 + 3x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, сондықтан бөлшектің алымы мен бөлімін x^3 -ке бөліп, функцияның шегі туралы теореманы қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^2 - 4}{5x^3 + 3x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{1+0-0}{5+0-0} = \frac{1}{5}.$$

Тапсырма 3. Берілген шекті табу керек $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$.

$$\text{Шешуі. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Тапсырма 4. Берілген шекті табу керек $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+4}$.

Шешуі. $x \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $\frac{2x+3}{2x-1}$ өрнегі 1-ге, ал дәреже көрсеткіш ∞ -ке ұмтылады. Сондықтан 1^∞ түріндегі анықталмағандық шығады.

Берілген бөлшекті келесі түрде түрлендірейік:

$$\frac{2x+3}{2x-1} = \frac{2x-1+4}{2x-1} = 1 + \frac{4}{2x-1},$$

$$\text{Сонда } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{3x+4}.$$

Енді $\frac{2x-1}{4} = y$ деп алып, табатынымыз

$$x = \frac{4y+1}{2}, \quad 3x+4 = 3 \cdot \frac{4y+1}{2} + 4 = 6y + \frac{11}{2}.$$

Сонымен
$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{6y + \frac{11}{2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{6y} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{11}{2}} = e^6.$$

Тапсырма 5. Берілген функцияны үзіліссіздікке зерттеп, графигін салу керек.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{егер } x \leq 1, \\ 2x, & \text{егер } 1 < x \leq 2, \\ -x + 3, & \text{егер } x > 2. \end{cases}$$

Шешуі. Функция x аргументінің өзгеру облысында әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілген. Функцияның анықталу облысы- барлық нақты сандар жиыны. $x^2 + 1, 2x, -x + 3$ функцияларының әрқайсысы сәйкес $(-\infty; 1), (1; 2), (2, +\infty)$ интервалдарында үзіліссіз. Функцияның тек $x = 1, x = 2$ нүктелерінде үзіліс нүктесі болуы мүмкін.

Функцияның $x = 1$ нүктесінде оң және сол жақ шектерін анықтайық.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2x = 2.$$

Біржақты шектері өзара тең. Яғни, бұл нүктеде функция үзіліссіз: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Функцияның $x = 1$ нүктесіндегі мәні $f(x) = (x^2 + 1)|_{x=1} = 2$.

Сонымен $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$. Яғни, функция $x = 1$ нүктесінде үзіліссіз.

Енді $x = 2$ нүктесі үшін біржақты шектерді есептейік:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 2x = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (-x + 3) = 1.$$

Функцияның $x = 2$ нүктесіндегі біржақты шектері өзара тең болмағандықтан, функция бұл нүктеде 1-ші текті үзіліс нүкте болады.

$x = 2$ нүктесінде функция секірісі $\Delta = |1 - 4| - |-3| = 3$.

Тапсырма 6. Берілген функцияның туындысын табу керек

$$y = \frac{x^2 - 7x + 3}{\sqrt{x^2 + 8x}}.$$

Шешуі. Бөлшектің туындысы формуласын қолданып табатынымыз:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}.$$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x^2 - 7x + 3}{\sqrt{x^3 + 8x}} \right)' = \frac{(x^2 - 7x + 3)'(\sqrt{x^3 + 8x}) - (\sqrt{x^3 + 8x})'(x^2 - 7x + 3)}{x^3 + 8x} = \\
&= \frac{(2x - 7)\sqrt{x^3 + 8x} - \frac{3x^2 + 8}{2\sqrt{x^3 + 8x}}(x^2 - 7x + 3)}{x^3 + 8x} = \frac{2(2x - 7)(x^3 + 8x) - (3x^2 + 8)(x^2 - 7x + 3)}{2(x^3 + 8x)\sqrt{x^3 + 8x}} = \\
&= \frac{4x^4 - 14x^3 + 32x^2 - 112x - 3x^4 - 8x^2 + 21x^3 + 56x - 9x^2 - 24}{2(x^3 + 8x)\sqrt{x^3 + 8x}} = \frac{x^4 + 7x^3 + 15x^2 - 56x - 24}{2(x^3 + 8x)\sqrt{x^3 + 8x}}.
\end{aligned}$$

Тапсырма 7. Берілген күрделі функцияның туындысын табу керек

$$y = (5^{\cos 2x} - 2)^4.$$

Шешуі. Дәрежелі, көрсеткішті және тригонометриялық функцияның туындысының формулаларын қолдансақ:

$$\begin{aligned}
y' &= ((5^{\cos 3x} - 2)') = 4(5^{\cos 3x} - 2)^3 (5^{\cos 3x} - 2)' = 4(5^{\cos 3x} - 2)^3 \cdot 5^{\cos 3x} \ln 5 \cdot (\cos 3x)' = -12(5^{\cos 3x} - 2)^3 \\
&\cdot 5^{\cos 3x} \ln 5 \cdot \sin 3x.
\end{aligned}$$

Тапсырма 8. Берілген функцияның $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек

$$y = (x^2 + 3)\cos 2x.$$

Шешуі. Өрнектің екі жағын да e негізі бойынша логарифмдейміз:

$$\ln y = \cos 2x \cdot \ln(x^2 + 3).$$

Енді теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$(\ln y)' = (\cos 2x \cdot \ln(x^2 + 3))';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos 2x)' \ln(x^2 + 3) + (\ln(x^2 + 3))' \cdot \cos 2x = -2 \sin 2x \cdot \ln(x^2 + 3) + \frac{x \cos 2x}{x^2 + 3}.$$

Көрсеткішті-дәрежелі функцияның туындысын келесі формуланы қолдану арқылы табуға болады:

$$(U^v)' = v \cdot U^{v-1} \cdot U' + U^v \cdot \ln U \cdot v';$$

$$y' = \cos 2x \cdot (x^2 + 3)^{\cos 2x - 1} \cdot 2x + (x^2 + 3)^{\cos 2x} \cdot \ln(x^2 + 3) \cdot (-2 \sin 2x);$$

$$y' = 2(x^2 + 3)^{\cos 2x - 1} (x \cos 2x - (x^2 + 3) \cdot \ln(x^2 + 3) \cdot \sin 2x).$$

Тапсырма 9. Берілген функцияның туындысын табу керек

$$\sin(x^3 + y^3) - 3x + 2y = 0.$$

Шешуі. Функция айқындалмаған түрде берілген. Оның туындысын табу үшін y функциясы x -тен алынған функция екенін ескере отырып, теңдіктің екі жағынан x бойынша туындыны аламыз да, шыққан теңдеуді y' бойынша шешеміз.

$$\text{Сонымен } (3x^2 + 3y^2 \cdot y') \cos(x^3 + y^3) - 3 + 2y' = 0.$$

Табылған теңдіктен алатынымыз:

$$y'(3y^2 \cos(x^3 + y^3) + 2) - 3(1 - x^2 \cos(x^3 + y^3)) = 0.$$

Одан

$$y' = \frac{3(1 - x^2 \cos(x^3 + y^3))}{2 + 3y^2 \cos(x^3 + y^3)}.$$

Тапсырма 10. Функцияның $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек $\begin{cases} x = \ln(2t - t^3) \\ y = \arctg 2t \end{cases}$.

Шешуі. x пен y арасындағы тәуелділік параметрлік теңдеулермен берілген. Ізделінді y' табу үшін, алдымен x, y -тен t айнымалысы бойынша туындыны тауып, келесі формуланы қолданамыз:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$x'_t = \frac{2 - 3t^2}{2t - t^3}, \quad y'_t = \frac{2}{1 + 4t^2}.$$

Берілген формулаға қойсақ:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 + \frac{2}{4t^2}}{\frac{3t^2 - 2}{t^3 - 2t}} = \frac{2(t^3 - 2t)}{(3t^2 - 2)(4t^2 + 1)}.$$

Тапсырма 11. Берілген функцияны зерттеп, графигін салу керек

$$y = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Шешуі. Функцияны зерттеу келесі пункттерден тұрады:

а) Функция анықталу облысын табамыз.

$$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D(y) = (-\infty; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

ә) Функция тақ функция болғандықтан, оның графигі координата

басына қарағанда симметриялы: $f(-x) = \frac{(-x)}{1 - (-x)^2} = -\frac{x}{1 - x^2} = -f(x)$.

б) Функцияның графигінің координата остерімен қиылысу нүктелерін табамыз. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0)$ - функция графигі координата басы арқылы өтеді.

в) Экстремумның бар болуының екінші жеткілікті шартын пайдалана отырып, функцияны экстремумға зерттейміз. Егер x_0 кризис нүктесінде екінші туындысы нольден өзгеше болса, онда бұл нүктеде $f(x)$ функциясы $f''(x_0) < 0$ болғанда максимум мәнін, ал $f''(x_0) > 0$ болғанда минимум мәнін қабылдайды. Бірінші туындысын есептейік:

$$y' = \frac{1 \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot x}{(1 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}.$$

Бұдан $x_1 = 1, x_2 = -1$ нүктелері кризистік нүктелері болады, бірақ ол нүктелер анықталу облысына тиісті емес. Сондықтан функцияның экстремумы жоқ.

г) Дөңес, ойыс аралықтарын, иілу нүктесін табамыз. Ол үшін екінші ретті туындысын y'' есептейік:

$$y'' = \left(\frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1 - x^2)^2 - (-2x)2(1 - x^2)(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}.$$

Сонымен $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$.

Екінші ретті туынды $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ нүктелерінде жоқ немесе 0-ге тең. $x_1 = 0$ нүктесінен өткенде екінші ретті туынды таңбасын минусан плюске ауыстырады. Сондықтан $(0, 0)$ нүктесі иілу нүктесі болады. Ал $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ нүктелерінде функция анықталмағандықтан, бұл нүктелер иілу нүктелері бола алмайды. Ойыс аралығы $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$, дөңес аралығы $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

д) Функция графигінің асимптоталарын анықтайық. Тік асимптотасы

$$x = 1, x = -1. \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{1 - x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{1 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{1 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{1 - x^2} = -\infty.$$

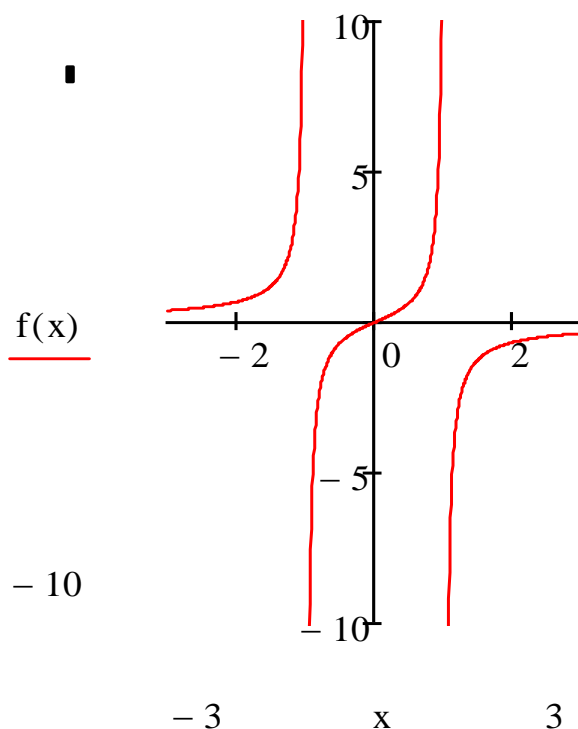
Енді көлбеу асимптотасын табайық. Ол үшін келесі коэффициенттерді есептейміз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(1 - x^2)x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - x^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{1 - x^2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0.$$

Яғни $y = 0$ -көлденең асимптота.

е) Алынған нәтижелер негізінде функция графигін саламыз (1 суретті қара).



1 сурет

Тапсырма 12. $z = \ln(x^2 + y^4)$ функциясы берілген.

Табу керек: а) $\Delta_y z, \Delta z$; ә) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; б) dz .

Шешуі. Есептейміз: а)

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \ln[x^2 + (y + \Delta y)^4] - \ln(x^2 + y^4) = \ln \frac{x^2 + (y + \Delta y)^4}{x^2 + y^4};$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \ln[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^4] - \ln(x^2 + y^4) = \ln \frac{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^4}{x^2 + y^4}.$$

$$\text{ә) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^4}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2 + y^4};$$

$$\text{б) } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2x}{x^2 + y^4} dx + \frac{4y^3}{x^2 + y^4} dy.$$

Тапсырма 13. $z = \cos(4x^2 - 3y^2)$ функциясы берілген.

Табу керек:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; б) dz ; в) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдігі орындалатынын тексеру

керек.

Шешуі. а) алдымен бірінші ретті дербес туындыларды есептейміз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(4x^2 - 3y^2) \cdot 8x = -8x \sin(4x^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(4x^2 - 3y^2) \cdot (-6y) = 6y \sin(4x^2 - 3y^2).$$

Енді екінші ретті және аралас туындыларды есептейміз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -8 \sin(4x^2 - 3y^2) - 8x \cos(4x^2 - 3y^2) \cdot 8x = -8 \sin(4x^2 - 3y^2) - 64x^2 \cos(4x^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \sin(4x^2 - 3y^2) + 6y \cos(4x^2 - 3y^2) \cdot (-6y) = 6 \sin(4x^2 - 3y^2) - 36y^2 \cos(4x^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x \cos(4x^2 - 3y^2) \cdot (-6y) = 48xy \cos(4x^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y \cos(4x^2 - 3y^2) \cdot 8x = 48xy \cos(4x^2 - 3y^2).$$

Соңғы екі теңдіктен $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ екендігі көрініп тұр.

$$\text{б) } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -8x \sin(4x^2 - 3y^2) dx + 6y \sin(4x^2 - 3y^2) dy.$$

Тапсырма 14. $w = \arctg(x^2 y^3 + 3z)$ функциясы берілген.

Берілген $M_0(1, -2, 0)$ нүктесінде $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ табу керек.

Шешуі. Есептейміз:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{1}{1 + (x^2 y^3 + 3z)^2} \cdot 2xy^3 \Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot (-2)^3}{1 + (-8)^2} = -\frac{16}{65};$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{1}{1 + (x^2 y^3 + 3z)^2} \cdot 2x^2 y^3 \Big|_{M_0} = \frac{3 \cdot (-2)^3}{65} = -\frac{24}{65};$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{M_0} = \frac{1}{1 + (x^2 y^3 + 3z)^2} \cdot 3 \Big|_{M_0} = \frac{3}{65}.$$

1.3 Теориялық сұрақтар

1. Функция ұғымы. Функцияның берілу тәсілдері, қасиеттері, классификациясы.
2. Сандық тізбектер. Сандық тізбектің шегі. Функция шегі.
3. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар. Шексіз аз шамалар туралы теоремалар.
4. Шектер туралы теоремалар. Біржақты шектер. 1-ші және 2-ші тамаша шектер.
5. Шексіз аз шамаларды салыстыру. Шексіз аз шамалар эквиваленттілігі туралы теоремалар.
6. Функция үзіліссіздігі. Үзіліс нүктесі, олардың классификациясы.
7. Туынды анықтамасы, оның физикалық және геометриялық мағынасы. Дифференциалдану мен үзіліссіздік арасындағы байланыс.
8. Дифференциалдаудың негізгі ережелері.
9. Қарапайым функциялардың туындыларының негізгі формулалары.
10. Логарифмдік дифференциалдау. Жоғарғы ретті туындылар.
11. Айқындалмаған және параметрлік түрде берілген функциялардың туындылары. Функция графигіне жүргізілген жанама мен нормаль теңдеулері.
12. Дифференциал, оның геометриялық мәні мен қолданылуы.
13. Жоғарғы ретті дифференциалдар. Күрделі функция дифференциалы.
14. Лопиталь ережесі. Функция өсуі мен кемуі туралы теоремалар.
15. Функция экстремумы. Экстремумның бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары.
16. Функция графигінің дөңес және ойыс аралықтары, иілу нүктесі.
17. Функция графигі асимптотасы. Функцияны толық зерттеу.
18. Көп айнымалылы функциялар. Шек пен үзіліссіздік.
19. Дербес өсімше мен туындылар.

20. Көп айнымалылы функция экстремумы. Қажетті және жеткілікті шарттар.

Әдебиеттер тізімі

Данко П.Е., Попов А.Т., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, в 2ч.-М.: Высшая школа, 2003.-ч.1,2.-352 с.

2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3ч. А.П.Рябушко, В.В.Барахатов, и др./ Под ред. А.П.Рябушко.- Минск: Высшая школа, 2006.-ч.2,3.-396 с.

3. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика (оқу құралы).- Алматы: ҚБТУ 2004. - 440 б.

4. Хасейнов К.А. Каноны математики. Учебник.- Алматы, 2003.-636 с.

Мазмұны

Кіріспе	3
1 ЕСЖ №1	4
1.1 Есептік тапсырмалар	4
1.2 Типтік нұсқаның шешуі	16
1.3 Теориялық сұрақтар	22
Әдебиеттер тізімі	24

2013 ж. жиынтық жоспары, реті 186

Дүйсек Абдулмансұр Көптілеуұлы
Абдулланова Жанар Советқалиқызы
МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУ
Есептеу-сызба жұмыстарға әдістемелік нұсқаулар
5В060200 мамандығына арналған
1-бөлім

Редактор Б.С. Қасымжанова

Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға қол қойылды _____

Таралымы 25 дана

Көлемі 1,6 баспа табак

Пішіні 60x84 1/16

№1 типографиялық қағаз

Тапсырыс _____ Бағасы 800 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
Коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтурсынұлы көшесі, 126